

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΓΕΩΛΟΓΙΑΣ
Μαθηματικά Ι

Ημερομηνία: 09-09-2015
Εξεταστής: Λέκτορας Ι. Δημητρίου

Ώρα: 09:00-12:00

1. [μονάδες: 4]

(α') [μονάδες: 0.5] Υπολογίστε την ορίζουσα του παρακάτω πίνακα συναρτήσει της παραμέτρου $\alpha \in R$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & -5 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(β') [μονάδες: 0.3] Για ποιες τιμές της παραμέτρου $\alpha \in R$ ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος;

(γ') [μονάδες: 1] Επιλέξτε στην τύχη μια από τις τιμές του $\alpha \in R$ που βρήκατε στο ερώτημα (β'), και υπολογίστε τον αντίστροφο του A για αυτή την τιμή.

(δ') [μονάδες: 1] Χρησιμοποιήστε την τιμή του α που επιλέξατε στο ερώτημα (γ') και βρείτε τη λύση του συστήματος $Ax = b$, όπου $b = (-1, 1, 2)'$.

(ε') [μονάδες: 1.2] Εφαρμόστε απαλοιφή Gauss για να λύσετε το σύστημα $Ax = b$, όπου $b = (-1, 1, 2)'$, για τις τιμές (ή τιμή) του α για τις οποίες (ή οποία) ο A είναι μη-αντιστρέψιμος. (Σημείωση: να διακρίνετε τις βασικές μεταβλητές και τις ελεύθερες μεταβλητές πριν κάνετε ανάδρομη αντικατάσταση).

2. [μονάδες: 2] Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των οριζουσών, ναδειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 1 \\ 1+b^2 & b & 1 \\ 1+c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(c-a).$$

3. [μονάδες: 1] Δίνεται ο τετραγωνικός πίνακας A για τον οποίο ισχύει ότι $A^3 - 6A^2 + 4A + 2I = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει ο A^{-1} και γράψτε τον ως συνάρτηση του A και του I .

4. [μονάδες: 3] Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} x + 2y - 7z = -3 \\ y + 4z - w = 4 \\ -2x - 6y + 6z + 2w = -2 \end{cases}, \quad x, y, z, w \in R.$$

Εφαρμόστε την απαλοιφή Gauss για να λύσετε το σύστημα, διακρίνοντας τις βασικές και τις ελεύθερες μεταβλητές πριν κάνετε την ανάδρομη αντικατάσταση. Ποια η λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος;