



UNIVERSITY OF
PATRAS
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

«Στοιχεία Γεωδαισίας»

Ομάδα Ασκήσεων 3
Μετρήσεις γωνιών και μηκών

Λευθεριώτης Γεώργιος
Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος
Πανεπιστήμιο Πατρών

Άσκηση 1

Μεταξύ των σημείων A και B μετρήθηκε η ζενίθια γωνία $Z_{AB} = 88.1543^g$.

Να υπολογιστούν:

α) η γωνία ύψους u_{AB}

β) η κλίση $i_{AB} \%$.

Άσκηση 1

Λύση

α) Η γωνία ύψους και η ζενίθια γωνία είναι συμπληρωματικές, επομένως ισχύει:

$$Z_{AB} + \nu_{AB} = 100^{\circ}$$

$$\text{Άρα: } Z_{AB} + \nu_{AB} = 100^{\circ} \Rightarrow \nu_{AB} = 100^{\circ} - Z_{AB} \Rightarrow \nu_{AB} = 100^{\circ} - 88.1543^{\circ} \Rightarrow \nu_{AB} = 11.8457^{\circ}$$

Με βάση τον ορισμό της κλίσης ισχύει:

$$i_{AB} = \tan \nu_{AB}$$

ή

$$i_{AB} = \cot Z_{AB}$$

$$i_{AB} = \tan \nu_{AB} \Rightarrow i_{AB} = \tan(11.8457^{\circ}) \Rightarrow i_{AB} = 0.188$$

$$i_{AB} = \cot Z_{AB} \Rightarrow i_{AB} = \cot(88.1543^{\circ}) \Rightarrow i_{AB} = 0.188$$

Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο.

$$\text{Άρα: } i_{AB} \% = 0.188 \cdot 100 \Rightarrow i_{AB} \% = 18.8\%$$

Άσκηση 2

Η κλίση και η απόσταση μεταξύ δύο σημείων **A** και **B** δίνονται αντίστοιχα $i_{AB} = 8.4\%$ και $D_{AB} = 31.19 \text{ m}$.

Να υπολογισθεί η υψομετρική διαφορά των σημείων ΔH_{AB}

Ποια θα ήταν η υψομετρική διαφορά των σημείων A, B αν η κλίση ήταν $i_{AB} = - 8.4\%$

Άσκηση 2

Λύση

Η υψομετρική διαφορά ΔH_{AB} υπολογίζεται από τη σχέση:

$$i_{AB} = \frac{\Delta H_{AB}}{D_{AB}}$$

$$i_{AB} = \frac{\Delta H_{AB}}{D_{AB}} \Rightarrow \Delta H_{AB} = i_{AB} \cdot D_{AB} \Rightarrow \Delta H_{AB} = 0.084 \cdot 31.19 \Rightarrow \Delta H_{AB} = 2.62 \text{ m}$$

Άρα το σημείο **B** βρίσκεται ψηλότερα από το **A** κατά 2.62 m.

Αν η κλίση ήταν $i_{AB} = -8.4\%$, τότε το σημείο **B** θα ήταν χαμηλότερα από το **A** κατά 2.62 m.

$$i_{AB} = \frac{\Delta H_{AB}}{D_{AB}} \Rightarrow \Delta H_{AB} = i_{AB} \cdot D_{AB} \Rightarrow \Delta H_{AB} = -0.084 \cdot 31.19 \Rightarrow \Delta H_{AB} = -2.62 \text{ m}$$

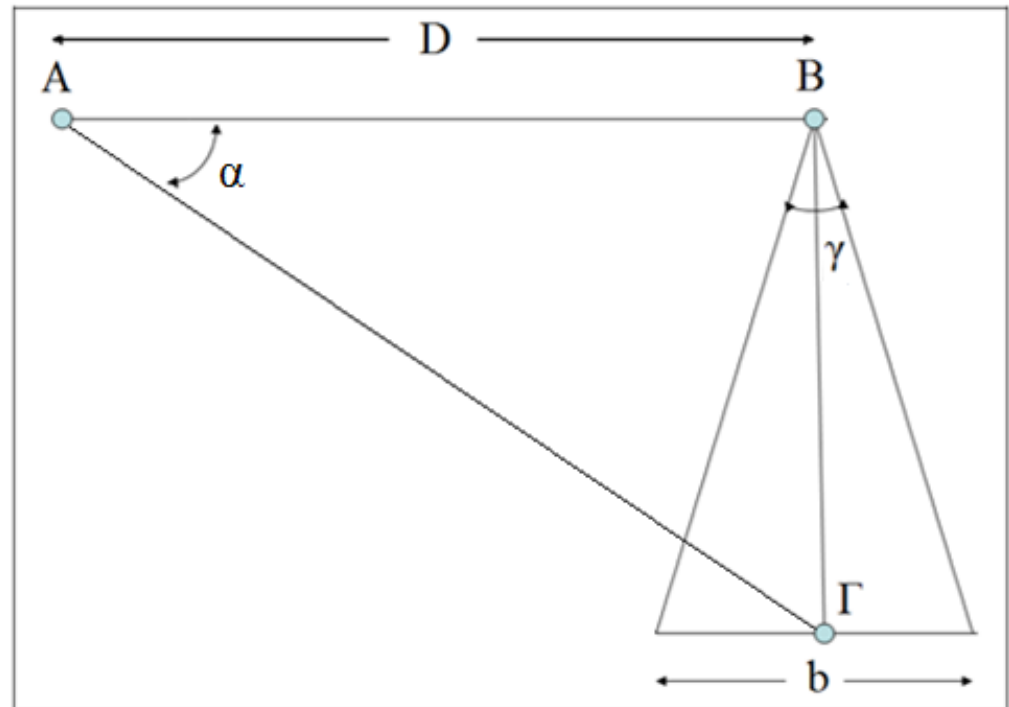
Στοιχεία Γεωδαισίας

6/14

Άσκηση 3

Για την μέτρηση της απόστασης $\mathbf{AB} = \mathbf{D}_{AB}$, χαράσσεται βοηθητική βάση $\mathbf{B\Gamma}$, η οποία είναι κάθετη στην \mathbf{AB} . Στο σημείο Γ τοποθετείται δίμετρη βάση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Με θεοδόλιχο μετράται η γωνία $\alpha = 6.5673^{\circ}$ και η γωνία $\gamma = 5.6956^{\circ}$.

Να υπολογιστεί το μήκος \mathbf{D}_{AB} .



Άσκηση 3

Λύση

Το μήκος **D** υπολογίζεται γνωρίζοντας τη γωνία **a** και τη βάση **BΓ** από τη σχέση:

$$D = (B\Gamma) \cdot \cot a$$

Η γωνία **a** είναι γνωστή, άρα πρέπει να υπολογιστεί η βάση **BΓ**.

Η βάση **BΓ** υπολογίζεται από το τρίγωνο της δίμμετρης βάσης, από τη σχέση:

$$(B\Gamma) = \frac{b}{2} \cdot \cot \frac{\gamma}{2} \Rightarrow (B\Gamma) = \frac{2}{2} \cdot \cot \left(\frac{5.6956}{2} \right) \Rightarrow (B\Gamma) = \cot(2.8478) \Rightarrow (B\Gamma) = 22.34 \text{ m}$$

$$\text{Άρα } D_{AB} = (B\Gamma) \cdot \cot a \Rightarrow D_{AB} = 22.34 \cdot \cot(6.5673) \Rightarrow D_{AB} = 215.8 \text{ m}$$

Στοιχεία Γεωδαισίας

8/14

Άσκηση 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι συντεταγμένες των σημείων **A** και **B** κατά ΕΓΣΑ'87

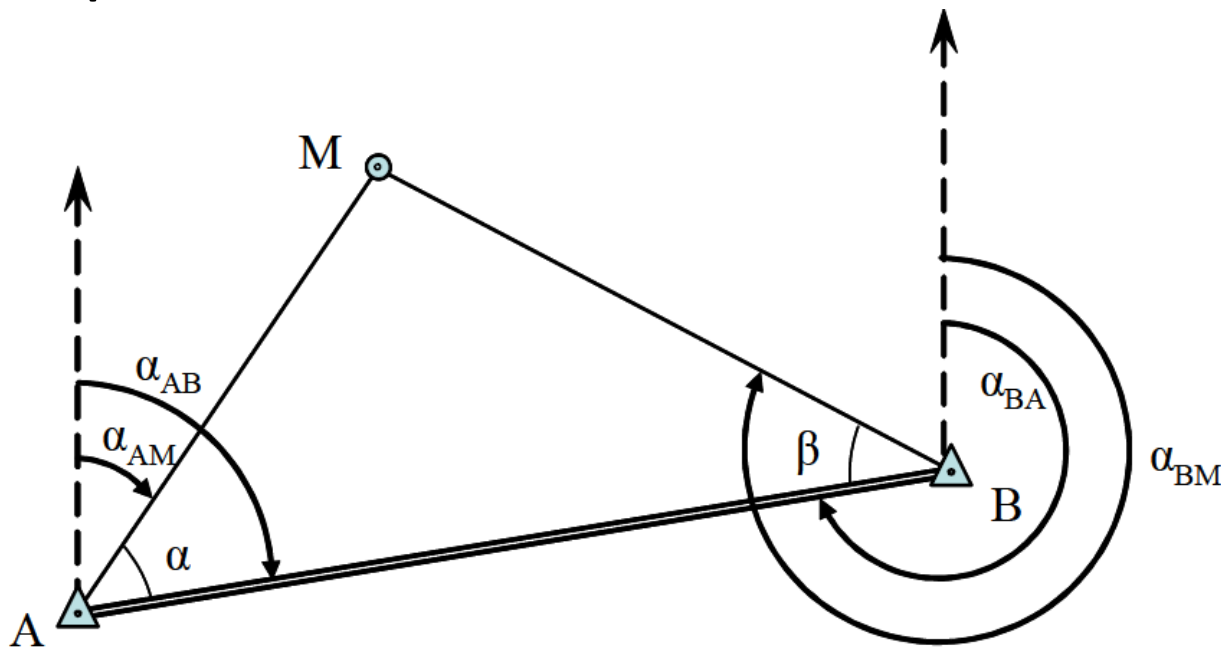
$$X_A = 472020.21 \text{ m}$$

$$X_B = 472311.47 \text{ m}$$

$$Y_A = 4142305.42 \text{ m}$$

$$Y_B = 4142338.37 \text{ m}$$

Να υπολογισθούν οι συντεταγμένες του σημείου **M** όταν έχουν μετρηθεί οι γωνίες $\alpha = 48.3316^\circ$ και $\beta = 56.4134^\circ$



Άσκηση 4

Λύση

Η απόσταση D_{AB} υπολογίζεται με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος και η γωνία διεύθυνσης α_{AB} με εφαρμογή του 2^{ου} θεμελιώδους προβλήματος ως εξής:

$$D_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \Rightarrow \boxed{D_{AB} = 293.12 \text{ m}}$$

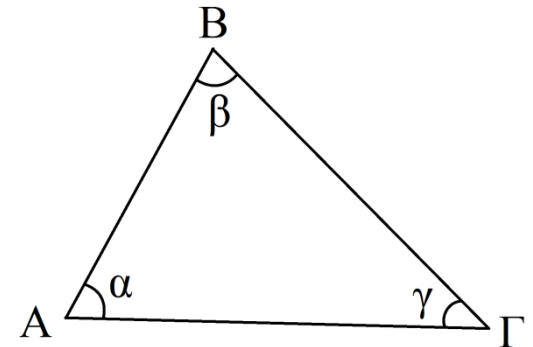
$$\alpha_{AB} = a \tan \left(\frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A} \right) \Rightarrow \boxed{\alpha_{AB} = 92.8285^\circ}$$

Οι αποστάσεις D_{AM} και D_{BM} υπολογίζονται από το τρίγωνο ABM με εφαρμογή του **νόμου των ημιτόνων**:

Νόμος Ημιτόνων

Ισχύει σε οποιοδήποτε τρίγωνο

$$\frac{(B\Gamma)}{\sin \alpha} = \frac{(A\Gamma)}{\sin \beta} = \frac{(AB)}{\sin \gamma}$$

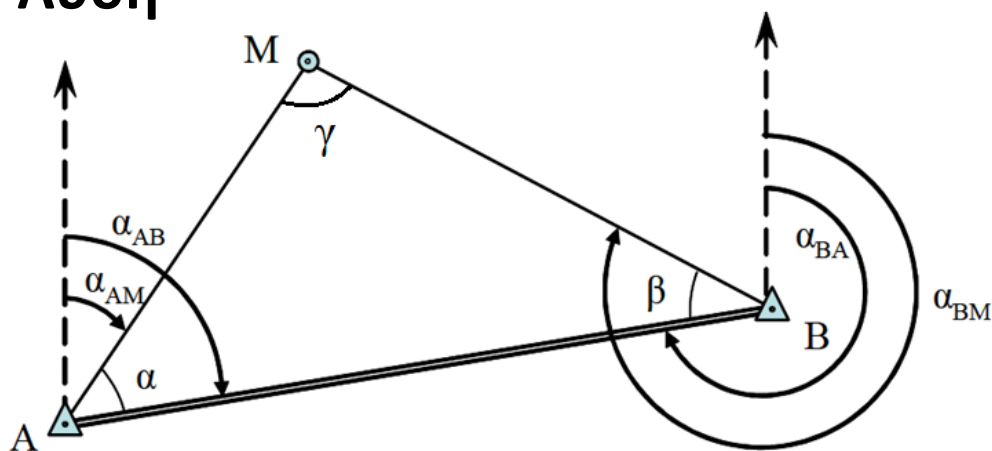


Άσκηση 4

Λύση

Άρα στο τρίγωνο ABM ισχύει ότι:

$$\frac{D_{AM}}{\sin \beta} = \frac{D_{AB}}{\sin \gamma} \Rightarrow D_{AM} = \frac{D_{AB} \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}$$



Όμως για τη γωνία γ ισχύει ότι:

$$\gamma = 200^{\circ} - \alpha - \beta = 200^{\circ} - 48.3316^{\circ} - 56.4134^{\circ} \Rightarrow \gamma = 95.255^{\circ}$$

$$\text{Άρα } D_{AM} = D_{AB} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \Rightarrow D_{AM} = 293.12 \cdot \frac{\sin(56.4134^{\circ})}{\sin(95.255^{\circ})} \Rightarrow \boxed{D_{AM} = 227.69 \text{ m}}$$

Άσκηση 4

Λύση

$$\text{Ομοίως: } D_{BM} = D_{AB} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \Rightarrow D_{BM} = 293.12 \cdot \frac{\sin(48.3316^\circ)}{\sin(99.255^\circ)} \Rightarrow \boxed{D_{BM} = 202.33 \text{ m}}$$

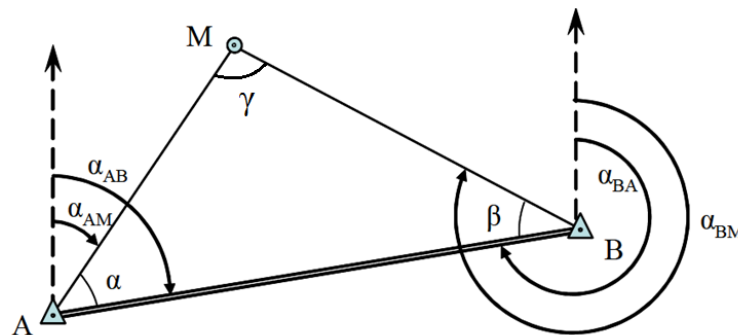
Οι γωνίες διεύθυνσης α_{AM} και α_{BM} υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\alpha_{AM} = \alpha_{AB} - \alpha = 92.8285^\circ - 48.3316^\circ \Rightarrow \boxed{\alpha_{AM} = 44.4969^\circ}$$

$$\alpha_{BM} = \alpha_{BA} + \beta = 292.8285^\circ + 56.4134^\circ \Rightarrow \boxed{\alpha_{BM} = 349.2419^\circ}$$

Προσοχή: Από το σχήμα παρατηρούμε ότι

$$\alpha_{BA} = 200^\circ + \alpha_{AB} \Rightarrow \alpha_{BA} = 292.8285^\circ$$



Άσκηση 4

Λύση

Οι συντεταγμένες του σημείου **M** προκύπτουν με εφαρμογή του 1^{ου} θεμελιώδους προβλήματος από τα σημεία **A** και **B**:

Από το σημείο A:

$$X_{M(A)} = X_A + D_{AM} \cdot \sin a_{AM} \Rightarrow X_{M(A)} = 472020.21 + 227.69 \cdot \sin(44.4969^g) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_{M(A)} = 472166.7099 \text{ m}$$

$$Y_{M(A)} = Y_A + D_{AM} \cdot \cos a_{AM} \Rightarrow Y_{M(A)} = 4142305.42 + 227.69 \cdot \cos(44.4969^g) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_{M(A)} = 4142479.7200 \text{ m}$$

Άσκηση 4

Λύση

Από το σημείο B:

$$X_{M(B)} = X_B + D_{BM} \cdot \sin a_{BM} \Rightarrow X_{M(B)} = 472311.47 + 202.33 \cdot \sin(349.2419^g) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_{M(B)} = 472166.7075 \text{ m}$$

$$Y_{M(B)} = Y_B + D_{BM} \cdot \cos a_{BM} \Rightarrow Y_{M(B)} = 4142338.37 + 202.33 \cdot \cos(349.2419^g) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_{M(B)} = 4142479.7251 \text{ m}$$

Παρατηρούμε μία μικρή απόκλιση μεταξύ των συντεταγμένων του σημείου **M**, οι οποίες υπολογίστηκαν ξεχωριστά από τα σημεία **A** και **B**.

Άσκηση 4

Λύση

Οι συντεταγμένες του σημείου **M** υπολογίζονται με ακρίβεια ως η μέσες τιμές των προηγούμενων τιμών:

$$X_M = \frac{X_{M(A)} + X_{M(B)}}{2} = \frac{472166.7099 + 472166.7075}{2} \Rightarrow X_M = 472166.7087 \text{ m}$$

$$Y_M = \frac{Y_{M(A)} + Y_{M(B)}}{2} = \frac{4142479.7200 + 4142479.7251}{2} \Rightarrow Y_M = 4142479.72255 \text{ m}$$