Σημειώσεις διαλέξεων «Στοιχεία Γεωδαισίας»

Διάλεξη 5
25/04/2023

Λευθεριώτης Γεώργιος
Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος
Πανεπιστήμιο Πατρών

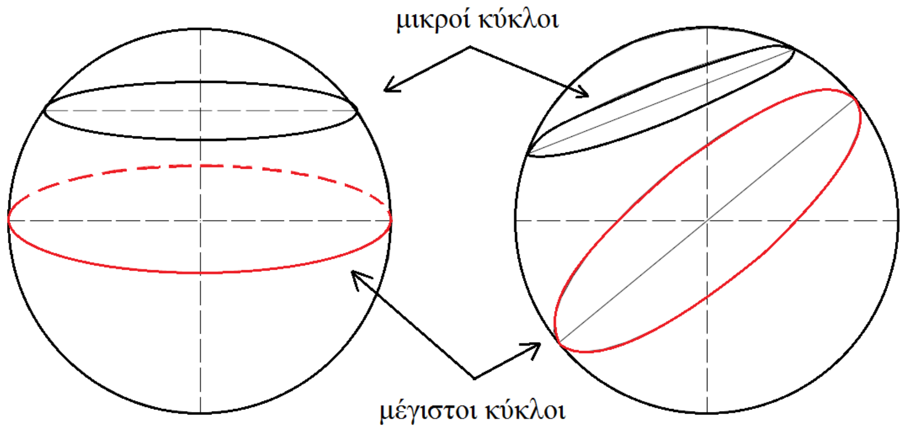
Υπολογισμοί στη Σφαίρα

- Όπως έχουμε αναφέρει, η Φυσική Γήινη Επιφάνεια (ΦΓΕ) προσεγγίζεται με το γεωειδές, μία ικανοποιητική προσέγγιση του οποίου είναι η μέση στάθμη της θάλασσας (ΜΣΘ).
- Για τις τοπογραφικές εργασίες οι οποίες εκτελούνται σε μικρές εκτάσεις, θεωρούμε ότι η επιφάνεια αυτή προσεγγίζει με ικανοποιητική ακρίβεια μία **σφαιρική επιφάνεια**.
- Η επιφάνεια αυτή αποτελεί ένα **προσεγγιστικό μοντέλο της Γης**, και χρησιμοποιείται ως επιφάνεια αναφοράς, για την αναγωγή των μετρήσεων και την εκτέλεση υπολογισμών.
- Το μοντέλο αυτό ονομάζεται **Γήινη Σφαίρα**.
- **Παραδοχές σφαιρικού μοντέλου:**
  - ✓ **Ομογενές**
  - ✓ **Συμπαγές**
  - ✓ **R = 6371 km (ακτίνα)**

Υπολογισμοί στη Σφαίρα

Βασικές Έννοιες

- **Σφαίρα** ονομάζουμε το γεωμετρικό τόπο όλων εκείνων των σημείων του χώρου, τα οποία απέχουν από ένα σταθερό σημείο (**O**) σταθερή απόσταση (**R**). Η απόσταση **R** είναι η **ακτίνα της σφαίρας**, ενώ το σταθερό σημείο **O** είναι το **κέντρο της σφαίρας**.
- Η τομή της σφαίρας με ένα επίπεδο, είναι **κύκλος**. Αν το επίπεδο αυτό διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας, τότε ο κύκλος που δημιουργείται ονομάζεται **μέγιστος κύκλος**.

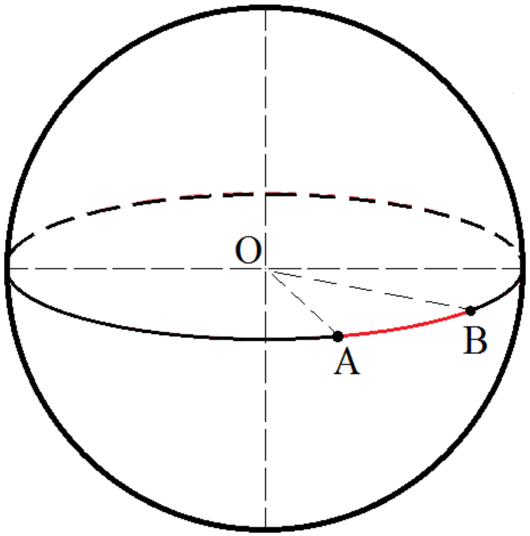


Υπολογισμοί στη Σφαίρα

Βασικές Έννοιες

- Δυο σημεία **Α** και **Β** πάνω στη σφαιρική επιφάνεια μαζί με το κέντρο της σφαίρας ορίζουν ένα επίπεδο, το οποίο διέρχεται από το κέντρο **Ο**.
- Το επίπεδο αυτό τέμνει τη σφαίρα και δημιουργείται ένας μέγιστος κύκλος. Το **τόξο** αυτού του μέγιστου κύκλου είναι αυτό που ορίζεται από τα δυο σημεία **Α** και **Β**, έχει το μικρότερο μήκος, και αποτελεί την **απόσταση των σημείων** πάνω στη σφαίρα.
- Η απόσταση μπορεί να εκφραστεί είτε σαν **γωνιακό μέγεθος**, σε μοίρες (°) πρώτα (′) και δεύτερα (″), είτε σαν **γραμμικό μέγεθος** σε μονάδες μήκους (π.χ. m).
- Οι παραπάνω εκφράσεις του μέτρου της απόστασης των σημείων Α, Β πάνω στη σφαίρα, συνδέονται από τη σχέση:

$$\boxed{\gamma^{rad} = \frac{S_{AB}}{R}}$$

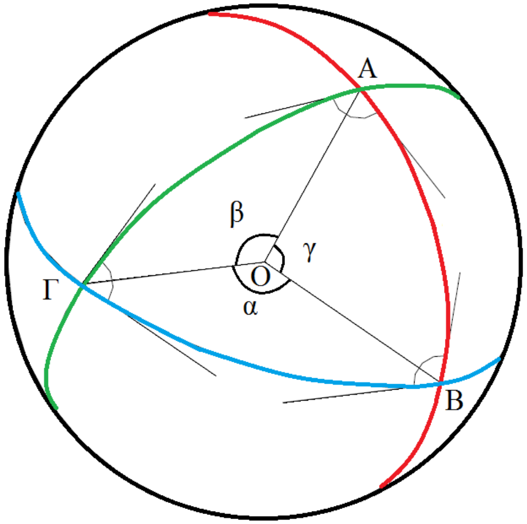


Υπολογισμοί στη Σφαίρα

Βασικές Έννοιες

- Η επιφάνεια πάνω στη σφαίρα που ορίζεται από την τομή τριών μέγιστων κύκλων ονομάζεται **σφαιρικό τρίγωνο**.
- Οι επίπεδες γωνίες (**Α**, **Β**, **Γ**) οι οποίες σχηματίζονται από τις εφαπτόμενες στις πλευρές του τριγώνου ονομάζονται **γωνίες του σφαιρικού τριγώνου**.
- Οι **πλευρές του σφαιρικού τριγώνου** ΑΒΓ είναι τα αντίστοιχα τόξα, **ΑΒ**, **ΒΓ**, **ΓΑ**, τα οποία έχουν μέτρο ίσο με το μέτρο των γωνιακών μεγεθών (**α, β, γ**) και εκφράζονται σε μοίρες (°) ή ακτίνια (rad).
- Οι πλευρές ενός σφαιρικού τριγώνου μπορούν να εκφραστούν και ως γραμμικά μεγέθη από τη σχέση του μήκους τόξου μεγίστου κύκλου στη σφαίρα.
- Π.χ. για το τόξο **ΒΓ** ισχύει (το **α** σε rad):

$$\boxed{S_{B\Gamma} = a \cdot R}$$



Υπολογισμοί στη Σφαίρα

Βασικές Έννοιες

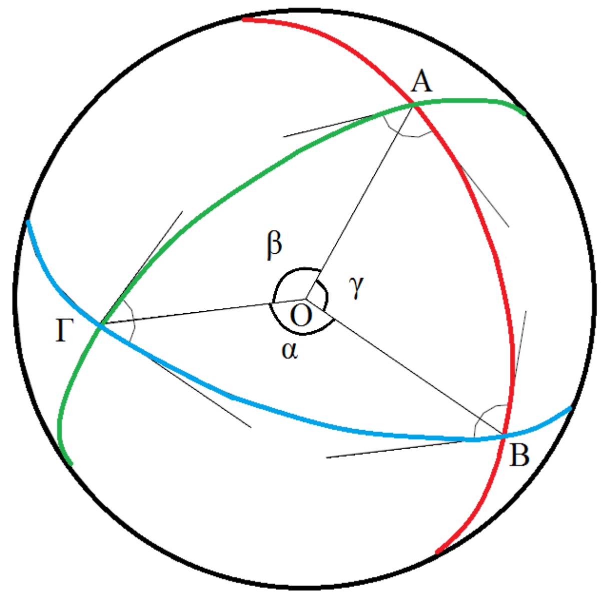
- Το σφαιρικό τρίγωνο δεν είναι επίπεδο τρίγωνο και επομένως το άθροισμα των γωνιών του δεν είναι ίσο με 180° (ή π rad) αλλά μεγαλύτερο.

$$\boxed{A + B + \Gamma = 180 + E}$$

- Η ποσότητα ***Ε*** ονομάζεται **σφαιρική υπεροχή**, είναι αδιάστατος αριθμός και η τιμή της (σε rad) δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{E = \frac{T}{R^2}}$$

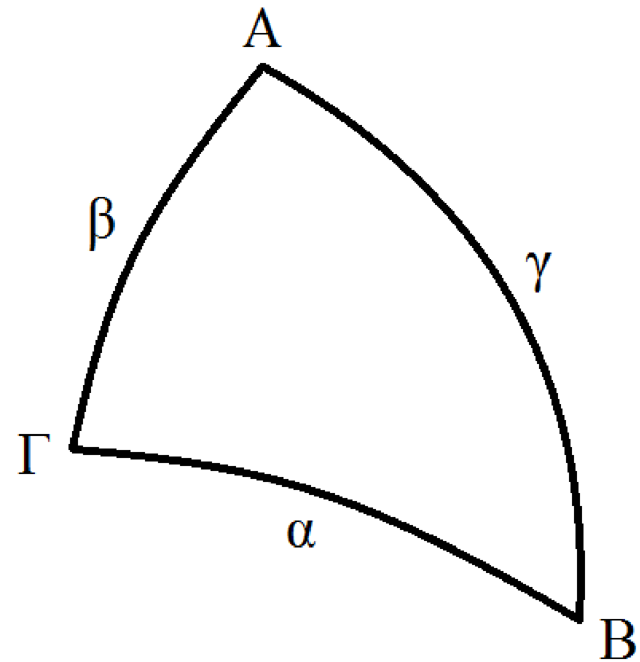
όπου : ***T*** είναι το εμβαδόν του σφαιρικού τριγώνου
R είναι η ακτίνα της σφαίρας



Υπολογισμοί στη Σφαίρα

Βασικές Έννοιες

- Μεταξύ των γωνιών και των πλευρών του σφαιρικού τριγώνου ισχύουν σχέσεις οι οποίες συνδέουν τις γωνίες **Α**, **Β**, **Γ** και τις πλευρές του **α**, **β**, **γ**.
- Στις σχέσεις αυτές οι πλευρές δεν εισάγονται ως γραμμικά μεγέθη αλλά ως γωνιακά.



I. **Νόμος Ημιτόνων**

$$\boxed{\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin \Gamma}}$$

II. **Νόμος Συνημίτονων**

$$\boxed{\cos a = \cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos A}$$

$$\boxed{\cos A = \cos a \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - \cos B \cdot \cos \Gamma}$$

Υπολογισμοί στη Σφαίρα

Βασικές Έννοιες

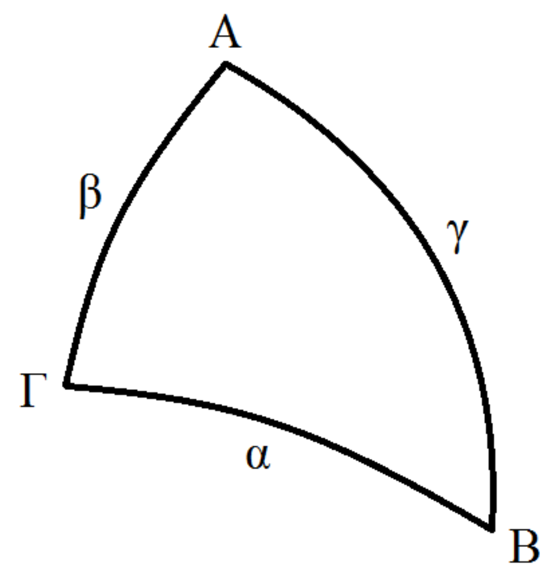
III. <u>Σχέσεις των 5 Στοιχείων</u>

$\sin a \cdot \cos B = \cos\beta \cdot \sin\gamma - \sin\beta \cdot \cos\gamma \cdot \cos A$
$\sin A \cdot \cos\beta = \cos B \cdot \sin\Gamma + \sin B \cdot \cos\Gamma \cdot \cos\alpha$
$\cos\alpha \cdot \cos B = \sin\alpha \cdot \cot\gamma - \sin B \cdot \cot\gamma$

IV. <u>Αναλογίες του Napier</u>

$$\tan\frac{a}{2} = \tan\frac{\beta-\gamma}{2} \cdot \frac{\sin\frac{B+\Gamma}{2}}{\sin\frac{B-\Gamma}{2}} = \tan\frac{\beta+\gamma}{2} \cdot \frac{\cos\frac{B+\Gamma}{2}}{\cos\frac{B-\Gamma}{2}}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \cot\frac{B-\Gamma}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}} = \cot\frac{B+\Gamma}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}$$



Υπολογισμοί στη Σφαίρα

Βασικές Έννοιες

- Οι προηγούμενες σχέσεις ισχύουν για όλα τα στοιχεία του τριγώνου εφ’ όσον γίνει κυκλική εναλλαγή των στοιχείων:

α → β → γ → α

Α → Β → Γ → Α

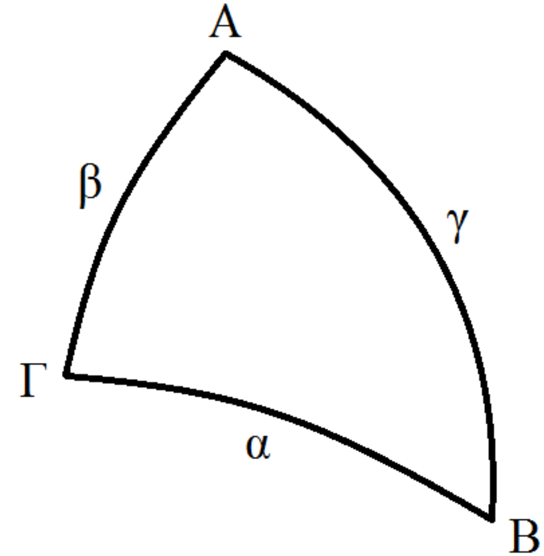
- **Ανισότητες μεταξύ των πλευρών και των γωνιών**

$$A < B \Leftrightarrow a < \beta$$

$$A + B > \pi \Leftrightarrow \alpha + \beta > \pi$$

$$|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$$

$$\alpha + \pi > \beta + \gamma$$



Υπολογισμοί στη Σφαίρα

Είδη Σφαιρικών Τριγώνων

- **Ορθόπλευρο** σφαιρικό τρίγωνο:
  - ✓ Όταν μια πλευρά του είναι τόξο μέτρου π/2 (90° ή 100^g)
  - ✓ Μπορεί να έχει ορθές τις 2 ή και τις 3 πλευρές του (**δις- ή τρις ορθόπλευρο**)

- **Ορθογώνιο** σφαιρικό τρίγωνο:
  - ✓ Όταν μια γωνία του είναι ορθή
  - ✓ Μπορεί να έχει ορθές τις 2 ή και τις 3 γωνίες του (**δις- ή τρις ορθογώνιο**)

- **Τυχαίο** σφαιρικό τρίγωνο:
  - ✓ Όταν δεν ανήκει σε κάποια από τις παραπάνω κατηγορίες
  - ✓ Μπορεί να είναι ισόπλευρο, ισοσκελές ή σκαληνό

Υπολογισμοί στη Σφαίρα

Επίλυση Σφαιρικών Τριγώνων

Επίλυση είναι η διαδικασία υπολογισμού των υπολοίπων τριών στοιχείων ενός σφαιρικού τριγώνου με δεδομένα τρία από τα βασικά στοιχεία.

Γενικά κατά την επίλυση πρέπει να ακολουθούνται οι παρακάτω κανόνες:

1. Να χρησιμοποιούνται όπου είναι δυνατόν σχέσεις υπολογισμού των στοιχείων με τη βοήθεια του συνημίτονου (cos) ή της εφαπτομένης (tan), επειδή δίνουν μονοσήμαντες (μοναδικές) λύσεις για το διάστημα (0° - 180°).
2. Ο υπολογισμός των στοιχείων να γίνεται από την εφαπτομένη, όπου είναι δυνατόν, σε μορφή λόγου δύο μεγεθών. Από τα πρόσημα αριθμητή και παρονομαστή υπολογίζεται το σωστό τεταρτημόριο της λύσης.
3. Σε περιπτώσεις διπλών λύσεων (π.χ. με το ημίτονο) η επιλογή της κατάλληλης μπορεί να γίνει και με τη χρήση των ανισοτήτων.

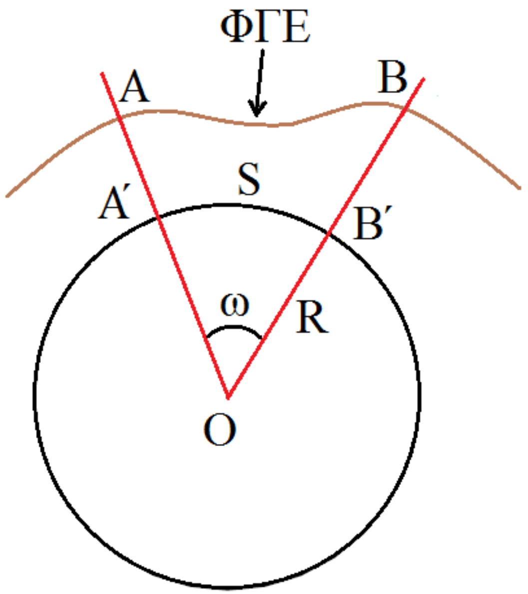
Υπολογισμοί στη Σφαίρα

Υπολογισμοί στην Επιφάνεια της Γης

- Το γεωειδές προσεγγίζεται τοπικά από μια σφαίρα με ακτίνα ***R* = 6371 km** με την παραδοχή ότι αυτή η σφαίρα είναι ομογενής.
- Οι κατακόρυφες οι οποίες περνούν από κάθε σημείο της γήινης επιφάνειας είναι κάθετες στην σφαιρική επιφάνεια, διέρχονται όλες από το κέντρο της και μπορούν να θεωρηθούν προεκτάσεις των αντιστοίχων ακτινών της σφαίρας.
- Η γωνία ***ω*** που σχηματίζεται από δύο κατακόρυφες με κορυφή το κέντρο της γης ονομάζεται **γεωκεντρική γωνία**. Το μέτρο της υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\boxed{\omega = \frac{S}{R} \;\; (rad)}$$

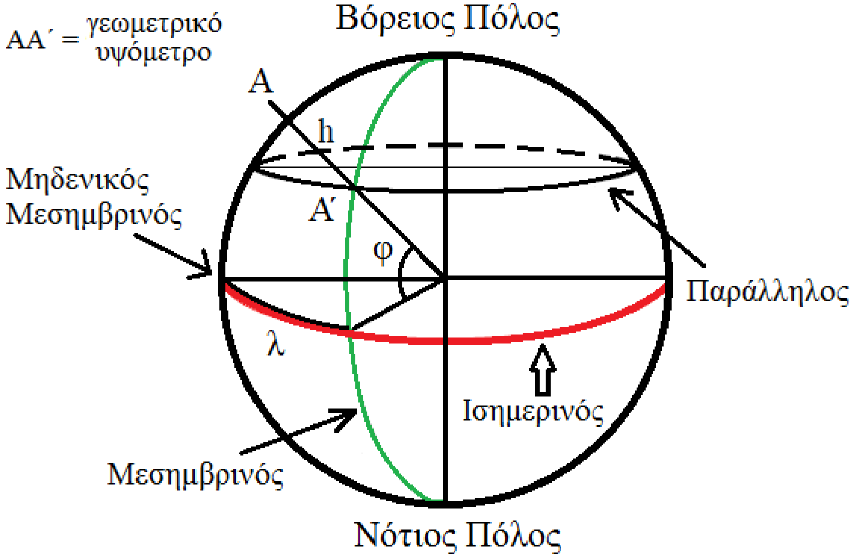
όπου: ***S*** το μήκος του τόξου και ***R*** η ακτίνα της γης.



Υπολογισμοί στη Σφαίρα

Υπολογισμοί στην Επιφάνεια της Γης

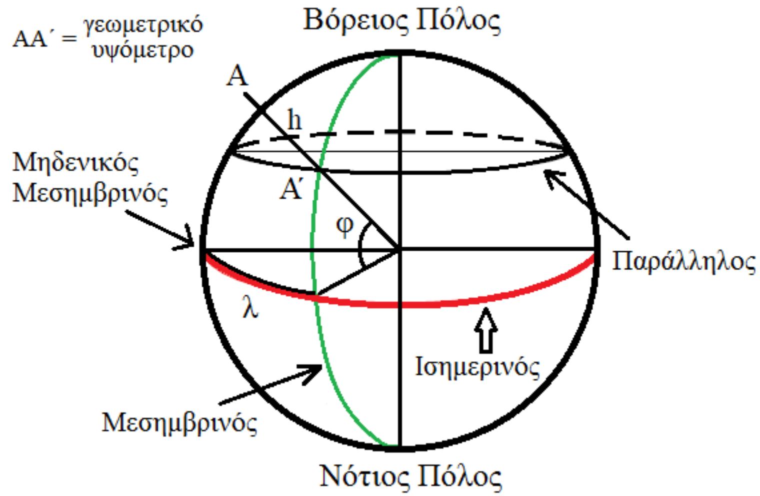
- Η γη περιστρέφεται γύρω από ένα άξονα ο οποίος τη διασχίζει από τον Βόρειο ως το Νότιο πόλο.
- Ο μέγιστος κάθετος κύκλος σε αυτόν τον άξονα τέμνει τη γήινη σφαίρα στο **ισημερινό επίπεδο** και σχηματίζει τον **Ισημερινό (κόκκινος κύκλος)**.
- Κάθε παράλληλο επίπεδο προς το ισημερινό τέμνει τη γη κατά **παράλληλους κύκλους**.
- Οι μέγιστοι κατακόρυφοι κύκλοι που περιέχουν τον άξονα περιστροφής της γης ορίζουν τους μεσημβρινούς **(πράσινος κύκλος)**.
- Ένα σημείο πάνω στη γήινη σφαίρα (έστω **Α΄**) ορίζεται με τις γεωγραφικές του συντεταγμένες ***φ, λ* (γεωγραφικό πλάτος, γεωγραφικό μήκος)**.



Υπολογισμοί στη Σφαίρα

Υπολογισμοί στην Επιφάνεια της Γης

- Ένα σημείο του γήινου ανάγλυφου (έστω **Α**) προβάλλεται στη γήινη σφαίρα μέσω της κατακόρυφης (**ΑΑ΄**) και η προβολή του (**Α΄**) προσδιορίζεται πλέον με τις γεωγραφικές συντεταγμένες (***φ***, ***λ***).
- Τα μεγέθη ***φ*** και ***λ*** αντιστοιχούν σε τόξα μεγίστων κύκλων.
- Το γεωγραφικό μήκος ***λ*** αντιστοιχεί σε τόξο του Ισημερινού με αφετηρία τον μηδενικό μεσημβρινό και διάστημα τιμών (0°-360°).
- Το γεωγραφικό πλάτος αντιστοιχεί σε τόξο του αντίστοιχου μεσημβρινού με αφετηρία μέτρησης τον Ισημερινό με διάστημα τιμών (-90°, +90°).
- Οι μονάδες μέτρησης των ***φ*** και ***λ*** συνήθως είναι οι **μοίρες** (π.χ. 23° 36′ 30″).

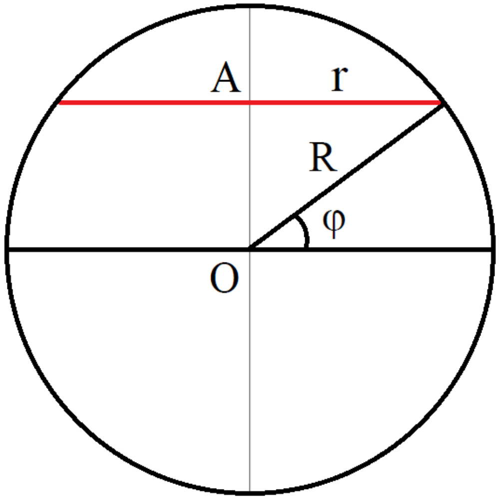


Υπολογισμοί στη Σφαίρα

Υπολογισμοί στην Επιφάνεια της Γης

- Οι μεσημβρινοί είναι μέγιστοι κύκλοι και επομένως η ακτίνα των κύκλων αυτών είναι ίση με την ακτίνα της γήινης σφαίρας. Το ίδιο συμβαίνει και με τον μέγιστο κύκλο του Ισημερινού.
- Αντιθέτως, κάθε παράλληλος δημιουργείται από την τομή της γήινης σφαίρας με ένα επίπεδο το οποίο είναι παράλληλο στον Ισημερινό και κάθετο στον άξονα περιστροφής.
- Το επίπεδο αυτό (κόκκινη γραμμή) τέμνει τον άξονα σε σημείο το οποίο είναι το κέντρο του κύκλου π.χ. **Α** και ο παράλληλος έχει ακτίνα **r**.
- Η σχέση που συνδέει την ακτίνα **r** του παραλλήλου με την ακτίνα **R** της γήινης σφαίρας και το γεωγραφικό πλάτος ***φ*** στο οποίο αντιστοιχεί ο παράλληλος, είναι:

$$\boxed{r = R \cdot \cos\varphi}$$



Υπολογισμοί στη Σφαίρα

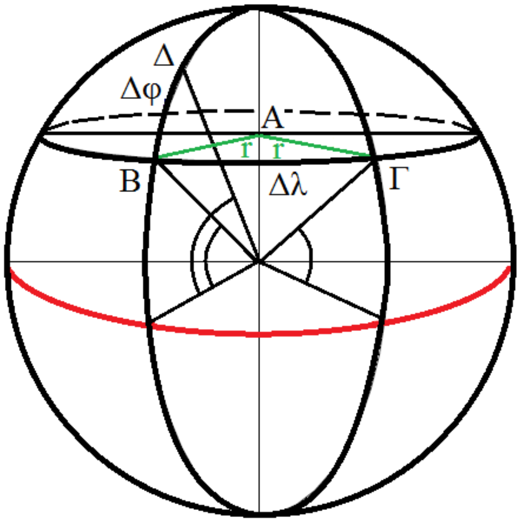
Υπολογισμοί στην Επιφάνεια της Γης

- Δυο σημεία που βρίσκονται στον ίδιο παράλληλο έχουν το ίδιο γεωγραφικό πλάτος $\boldsymbol{\varphi}$ αλλά διαφορετικό γεωγραφικό μήκος $\boldsymbol{\lambda}$.
- Έστω δυο σημεία **Β**, **Γ** που βρίσκονται στον ίδιο παράλληλο με συντεταγμένες $\boldsymbol{\varphi_B}$, $\boldsymbol{\lambda_B}$ και $\boldsymbol{\varphi_\Gamma}$, $\boldsymbol{\lambda_\Gamma}$ αντίστοιχα.
- Προφανώς ισχύει ότι $\boldsymbol{\varphi_B = \varphi_\Gamma}$. Το μήκος του τόξου **ΒΓ** δίνεται από την σχέση:

$$\boxed{S_{B\Gamma} = r \cdot (\lambda_\Gamma - \lambda_B) = r \cdot \Delta\lambda = R \cdot \cos\varphi \cdot \Delta\lambda}$$

Δλ σε rad

AB = AΓ = r = Rcosφ



- Το γεωγραφικό πλάτος και μήκος μετριούνται συνήθως σε μοίρες, άρα για την εφαρμογή της παραπάνω σχέσης είναι αναγκαία η μετατροπή του **Δλ** σε ακτίνια.

Βιβλιογραφία

- Μαθήματα Γεωδαισίας, 2η Έκδοση, Γ. Γεωργόπουλος, Εκδόσεις Τζιόλα, 2019.
- Στοιχεία Τοπογραφίας, Ε. Στυλιανίδη, Εκδόσεις Δίσιγμα, 2011.
- Εφαρμοσμένη Γεωδαισία, 2η Έκδοση, Ε. Λάμπρου, Γ. Πανταζής, Εκδόσεις Ζήτη, 2010.