UNIVERSITY OF PATRAS
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

Σημειώσεις διαλέξεων «Στοιχεία Γεωδαισίας»

Διάλεξη 4
21/03/2023

Λευθεριώτης Γεώργιος
Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος
Πανεπιστήμιο Πατρών

Θεμελιώδη Προβλήματα

Βασικά προβλήματα στο επίπεδο

Τα βασικά μεγέθη μετρήσεων στο ύπαιθρο, στα πλαίσια των γεωδαιτικών εργασιών, είναι μήκη, γωνίες και υψομετρικές διαφορές.

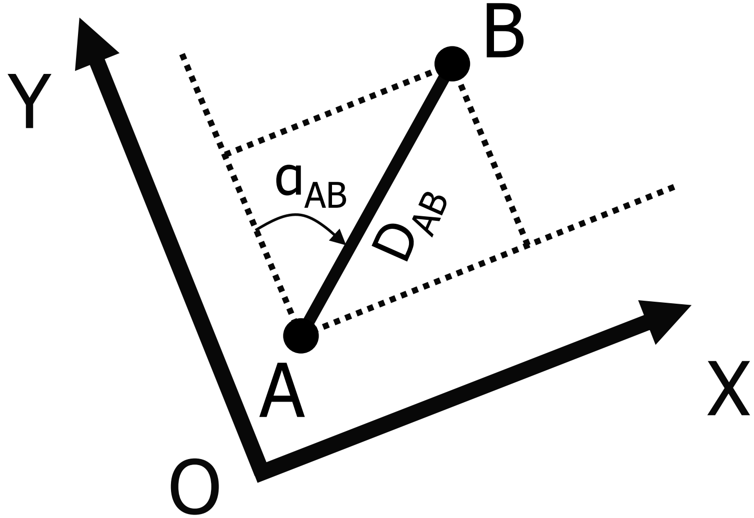
- Από τα παραπάνω στοιχεία μπορούν να υπολογιστούν η θέση ενός σημείου στις 2 διαστάσεις (επίπεδο), και στην 3^{η} διάσταση (υψόμετρο).
- Για τον προσδιορισμό των σημείων χρησιμοποιείται ένα Καρτεσιανό (ορθογώνιο) Σύστημα Συντεταγμένων.
- Ο προσδιορισμός της θέσης σημείων στη Γεωδαισία αντιμετωπίζεται με τα **θεμελιώδη προβλήματα**.
- Στα θεμελιώδη προβλήματα κάποια στοιχεία είναι γνωστά, ενώ κάποια άλλα προσδιορίζονται είτε με μετρήσεις, είτε μετά από μία διαδικασία υπολογισμών.

Θεμελιώδη Προβλήματα

1ο Θεμελιώδες Πρόβλημα

Αρχικά ορίζουμε τη **γωνία διεύθυνσης μίας πλευράς**.

Έστω η πλευρά AB στο παρακάτω σχήμα. Η γωνία διεύθυνσής της (α_{AB}) ορίζεται ως η οριζόντια δεξιόστροφη γωνία κατά την οποία πρέπει να στραφεί η παράλληλη του θετικού ημιάξονα ΟΥ που περνάει από το Α για να συμπέσει με την πλευρά (ΑΒ).



Δεδομένα: Συντεταγμένες του A (X_A,Y_A)

Μετριέται ή υπολογίζεται: Η απόσταση D_{AB}

Ζητούμενο: Συντεταγμένες του B (X_B,Y_B)

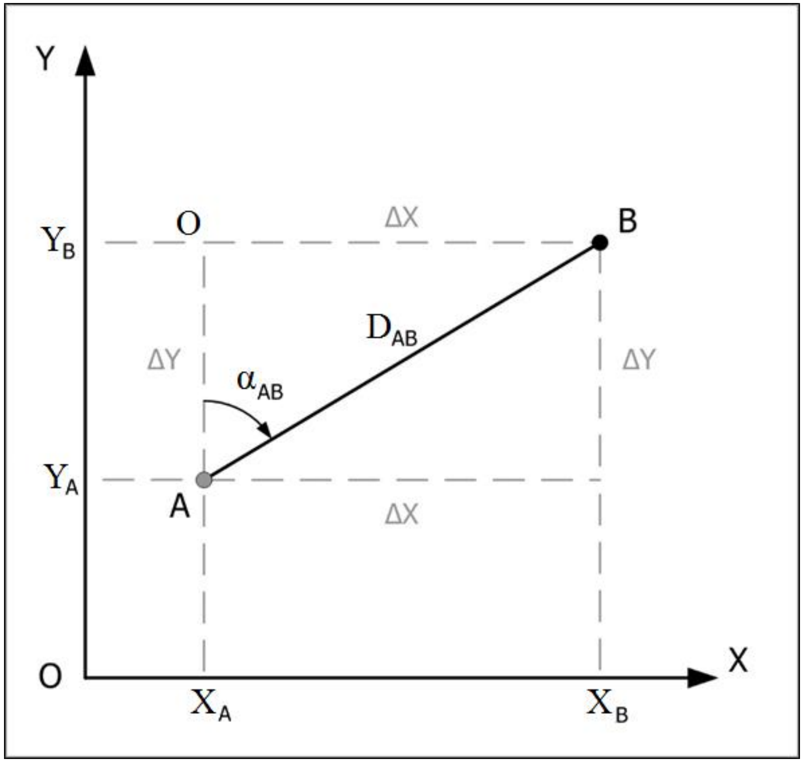
Λύση

$$X_B = X_A + D_{AB} \cdot \sin\alpha_{AB}$$
$$Y_B = Y_A + D_{AB} \cdot \cos\alpha_{AB}$$

Θεμελιώδη Προβλήματα

1ο Θεμελιώδες Πρόβλημα

Απόδειξη σχέσεων



Τρίγωνο AOB

$$\sin\alpha_{AB} = \frac{\Delta X}{D_{AB}} = \frac{X_B - X_A}{D_{AB}}$$

$$\cos\alpha_{AB} = \frac{\Delta Y}{D_{AB}} = \frac{Y_B - Y_A}{D_{AB}}$$

Άρα έχουμε:

$$X_B = X_A + D_{AB}\cdot\sin a_{AB}$$

$$Y_B = Y_A + D_{AB}\cdot\cos a_{AB}$$

Θεμελιώδη Προβλήματα

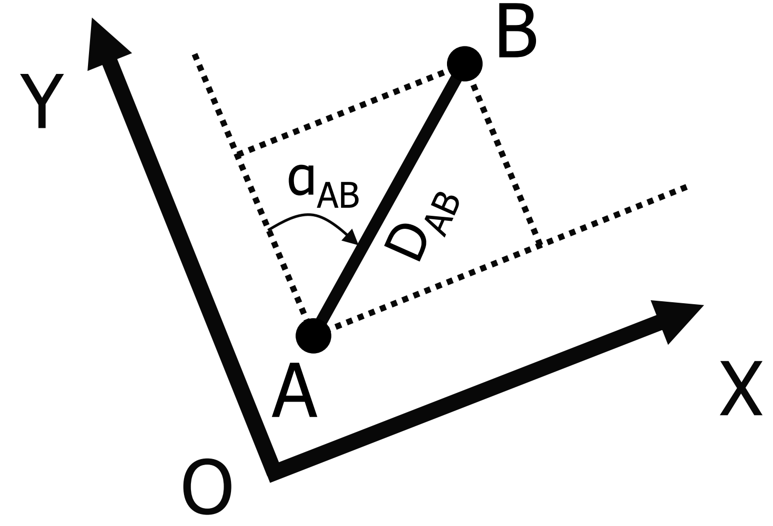
1ο Θεμελιώδες Πρόβλημα (Παράδειγμα)

Δίνονται οι συντεταγμένες του σημείου Α:

$$X_A = -1442{,}37\ m,\quad Y_A = -2568{,}24\ m \quad \text{και} \quad \alpha_{AB} = 316{,}261^g$$

Μετρήθηκε η απόσταση D_{AB} **= 137,85 m**.

Ζητούνται οι συντεταγμένες του σημείου Β.



Λύση

$$X_B = X_A + D_{AB} \cdot \sin a_{AB} \Rightarrow$$

$$X_B = -1442{,}37 + 137{,}85 \cdot \sin 316{,}261 \Rightarrow$$

$$\boxed{X_B = -1575{,}74\ m}$$

$$Y_B = Y_A + D_{AB} \cdot \cos a_{AB} \Rightarrow$$

$$Y_B = -2568{,}24 + 137{,}85 \cdot \cos 316{,}261 \Rightarrow$$

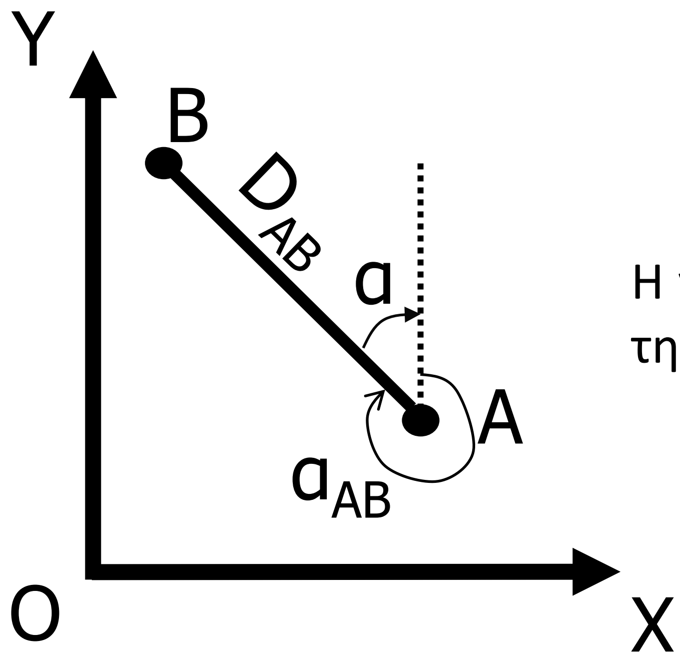
$$\boxed{Y_B = -2533{,}41\ m}$$

Θεμελιώδη Προβλήματα

2ο Θεμελιώδες Πρόβλημα

Δεδομένα: Συντεταγμένες των σημείων A (X_A,Y_A) και B (X_B,Y_B)

Ζητούμενο: Η απόσταση D_{AB} και η γωνία διεύθυνσης α_{AB}.



Λύση

Η απόσταση $\mathbf{D_{AB}}$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

Η γωνία διεύθυνσης $\boldsymbol{\alpha_{AB}}$ υπολογίζεται με τη βοήθεια της γωνίας **α** η οποία υπολογίζεται από τη σχέση:

$$a = \arctan\frac{|\Delta X_{AB}|}{|\Delta Y_{AB}|} = \arctan\frac{|X_B - X_A|}{|Y_B - Y_A|}$$

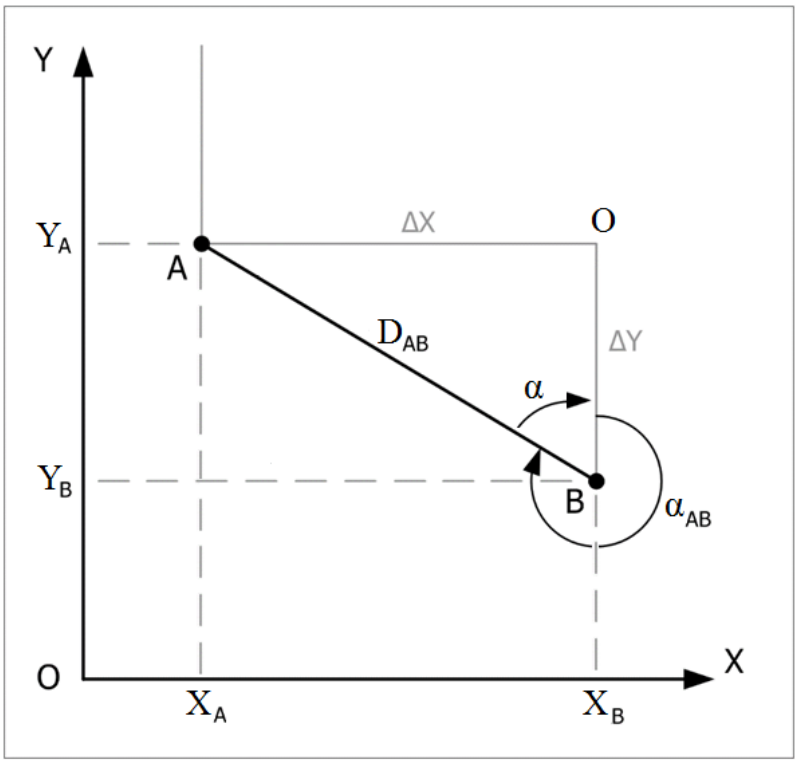
όπου $\arctan = \operatorname{atan} = \tan^{-1}$

Προσοχή: Απαιτείται έλεγχος τεταρτημορίου

Θεμελιώδη Προβλήματα

2ο Θεμελιώδες Πρόβλημα

Απόδειξη σχέσεων



Τρίγωνο ΑΟΒ

$$D_{AB} = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} = \sqrt{\left(X_B - X_A\right)^2 + \left(Y_B - Y_A\right)^2}$$

$$\tan\alpha = \frac{\left|\Delta X_{AB}\right|}{\left|\Delta Y_{AB}\right|} = \frac{\left|X_B - X_A\right|}{\left|Y_B - Y_A\right|}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\left|\Delta X\right|}{\left|\Delta Y\right|}\right) = \arctan\left(\frac{\left|X_B - X_A\right|}{\left|Y_B - Y_A\right|}\right)$$

όπου $\arctan = \mathrm{atan} = \tan^{-1}$

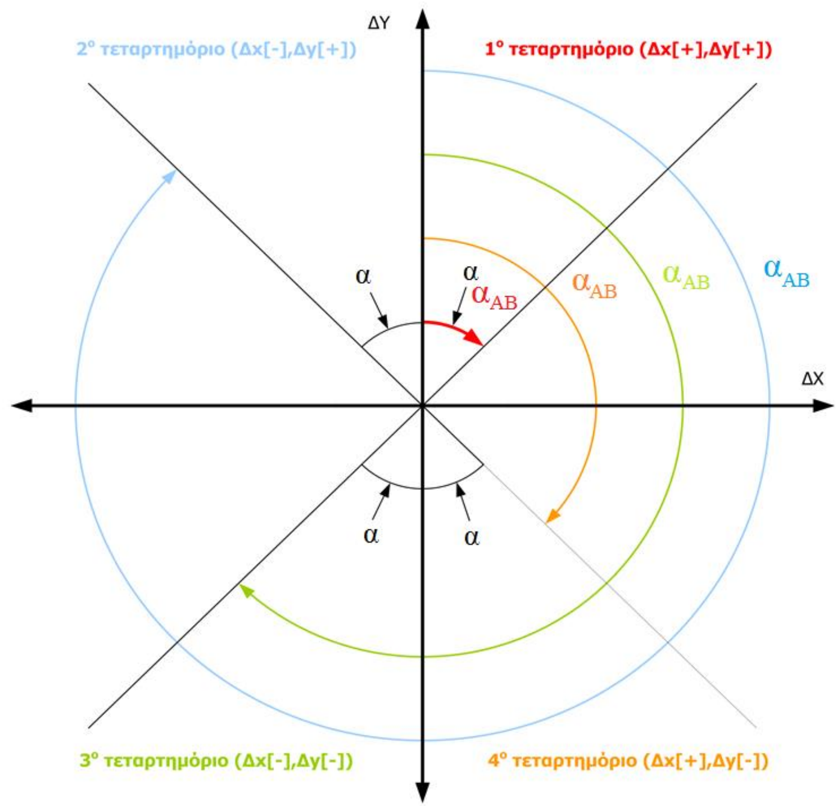
Θεμελιώδη Προβλήματα

2ο Θεμελιώδες Πρόβλημα – Έλεγχος τεταρτημορίου

- Αναγωγή της τιμής **α** στο σωστό τεταρτημόριο
- Ανάλογα με τα πρόσημα των ποσοτήτων $\mathbf{\Delta X_{AB} = X_B - X_A}$ και $\mathbf{\Delta Y_{AB} = Y_B - Y_A}$ η γωνία $\boldsymbol{\alpha_{AB}}$ προσδιορίζεται ως εξής:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{|\Delta X|}{|\Delta Y|}\right) = \arctan\left(\frac{|X_B - X_A|}{|Y_B - Y_A|}\right)$$

$$0 \leq \alpha \leq 100g$$



Θεμελιώδη Προβλήματα

2ο Θεμελιώδες Πρόβλημα – Έλεγχος τεταρτημορίου

Υπολογίζουμε

$$|\Delta X| / |\Delta Y| \rightarrow \alpha = \arctan\left(|\Delta X| / |\Delta Y|\right), \quad 0^g < a < 100^g$$

Με βάση τα πρόσημα των ΔΧ και ΔΥ έχουμε:

- $\Delta X_{AB} > 0$ και $\Delta Y_{AB} > 0 \rightarrow \alpha_{AB} = \alpha$ (Ι τεταρτημόριο)
- $\Delta X_{AB} > 0$ και $\Delta Y_{AB} < 0 \rightarrow \alpha_{AB} = 200^g - \alpha$ (IV τεταρτημόριο)
- $\Delta X_{AB} < 0$ και $\Delta Y_{AB} < 0 \rightarrow \alpha_{AB} = 200^g + \alpha$ (ΙΙΙ τεταρτημόριο)
- $\Delta X_{AB} < 0$ και $\Delta Y_{AB} > 0 \rightarrow \alpha_{AB} = 400^g - \alpha$ (ΙΙ τεταρτημόριο)
- $\Delta X_{AB} = 0$ και $\Delta Y_{AB} > 0 \rightarrow \alpha_{AB} = 0^g$
- $\Delta X_{AB} = 0$ και $\Delta Y_{AB} < 0 \rightarrow \alpha_{AB} = 200^g$
- $\Delta Y_{AB} = 0$ και $\Delta X_{AB} > 0 \rightarrow \alpha_{AB} = 100^g$
- $\Delta Y_{AB} = 0$ και $\Delta X_{AB} < 0 \rightarrow \alpha_{AB} = 300^g$
- $\Delta Y_{AB} = 0$ και $\Delta X_{AB} = 0 \rightarrow$ Τα δύο σημεία ταυτίζονται (απροσδιοριστία)

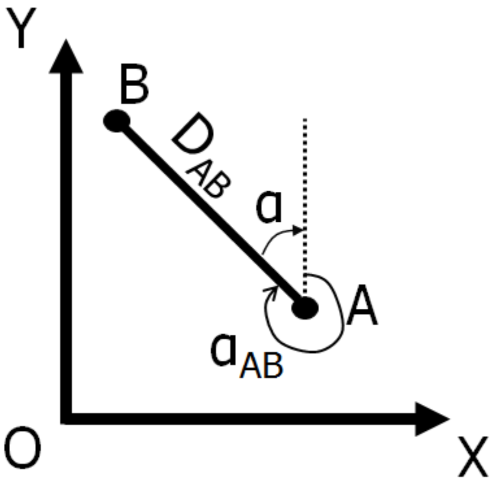
Θεμελιώδη Προβλήματα

2ο Θεμελιώδες Πρόβλημα (Παράδειγμα)

Δίνονται οι συντεταγμένες των σημείων Α, Β:

X_A = 3561,37 m, Y_A = -5215,52 m και **X_B = 3781,85 m, Y_B = -5513,27 m**

Ζητούνται η απόσταση $\mathbf{D_{AB}}$ και η γωνία διεύθυνσης $\boldsymbol{\alpha_{AB}}$.



<u>Λύση</u>

Η απόσταση D_{AB} υπολογίζεται από τη σχέση:

$$D_{AB} = \sqrt{\left(X_B - X_A\right)^2 + \left(Y_B - Y_A\right)^2} \Rightarrow$$

$$D_{AB} = \sqrt{\left(3781,85 - 3561,52\right)^2 + \left(-5513,27 - \left(-5215,52\right)\right)^2} \Rightarrow$$

$$D_{AB} = \sqrt{\left(220,33\right)^2 + \left(-297,75\right)^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{D_{AB} = 370,41\ m}$$

Θεμελιώδη Προβλήματα

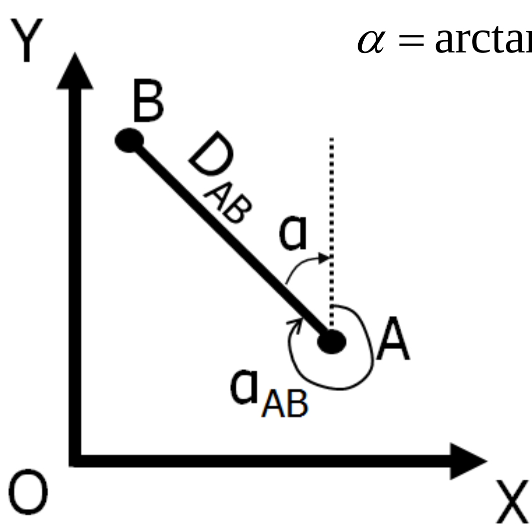
2ο Θεμελιώδες Πρόβλημα (Παράδειγμα – Συνέχεια)

<u>Λύση</u>

Για τον υπολογισμό της γωνίας διεύθυνσης $\mathbf{\alpha_{AB}}$ υπολογίζεται η βοηθητική γωνία $\mathbf{\alpha}$ ως εξής:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{|\Delta X|}{|\Delta Y|}\right) = \arctan\left(\frac{|X_B - X_A|}{|Y_B - Y_A|}\right) = \arctan\left(\frac{|3781,85 - 3561,52|}{|-5513,27 - (-5215,52)|}\right) \Rightarrow$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{|220,33|}{|-297,75|}\right) = \arctan(|-0,74|) \Rightarrow \alpha = \arctan(0,74) \Rightarrow \boxed{\alpha = 40.557^g}$$



<u>Έλεγχος τεταρτημορίου</u>

$$\Delta X = X_B - X_A = 220,33 > 0$$

$$\Delta Y = Y_B - Y_A = -297,75 < 0$$

<u>Άρα :</u> $a_{AB} = 200^g - a = 200^g - 40,557^g \Rightarrow \boxed{a_{AB} = 159,443^g}$

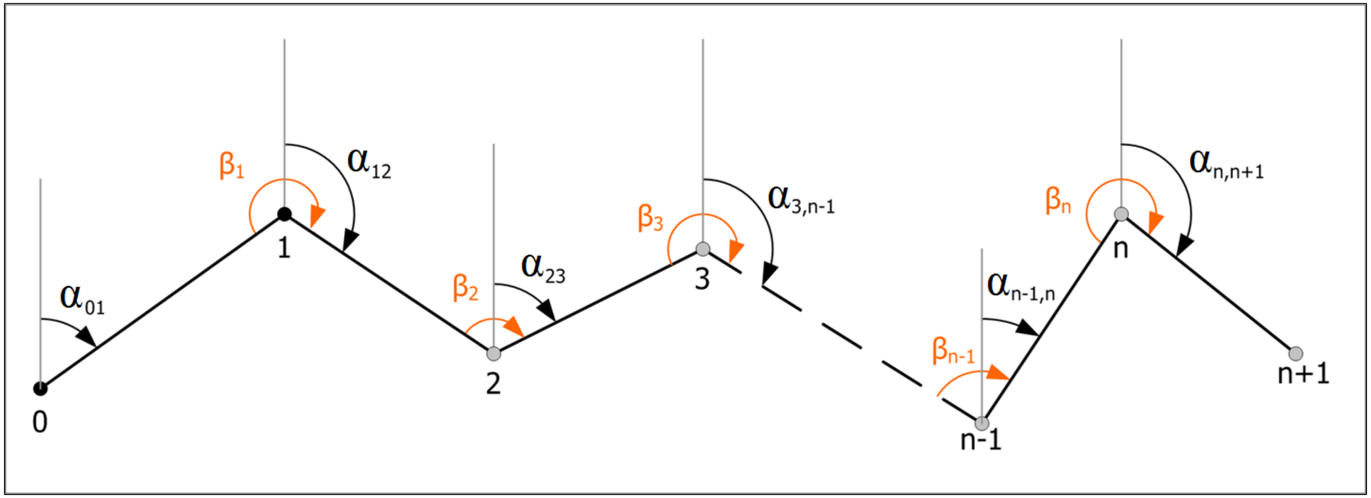
Θεμελιώδη Προβλήματα

3ο Θεμελιώδες Πρόβλημα

Ορίζουμε τη **γωνία θλάσης** μεταξύ των πλευρών μίας τεθλασμένης γραμμής.

Γωνία θλάσης ορίζεται η οριζόντια δεξιόστροφη γωνία κατά την οποία πρέπει να στραφεί η πίσω πλευρά της γραμμής για να συμπέσει με την μπροστινή πλευρά.

Επίσης πρέπει να προσδιοριστεί η φορά διαγραφής (**αρχή-τέλος**) της τεθλασμένης γραμμής. Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες θλάσης που αντιστοιχούν στη φορά διαγραφής (**0 → n**) είναι αυτές που βρίσκονται από πάνω (πορτοκαλί γωνίες β_i).



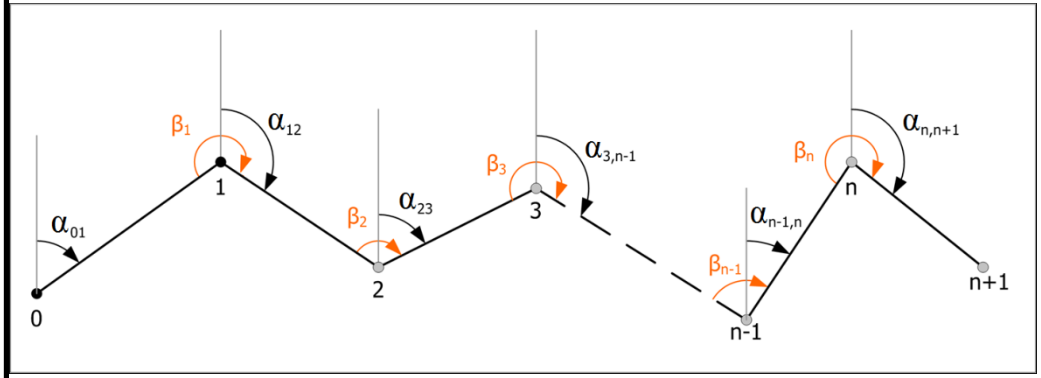
Θεμελιώδη Προβλήματα

3ο Θεμελιώδες Πρόβλημα

Σε εργασίες πεδίου μπορούμε να μετρήσουμε οποιαδήποτε από τις δύο γωνίες μεταξύ διαδοχικών πλευρών της τεθλασμένης γραμμής, αρκεί να ληφθεί σωστά η γωνία θλάσης κατά τους υπολογισμούς.

Στη **Γεωδαισία** αυτή η τεθλασμένη γραμμή ονομάζεται **όδευση**.

Οι πλευρές και τα σημεία τομής τους λέγονται **πλευρές** και **κορυφές της όδευσης**.



Δεδομένα: Η γωνία διεύθυνσης $\boldsymbol{\alpha_{01}}$

Μετριούνται: Οι γωνίες θλάσης $\boldsymbol{\beta_i}$

Ζητούμενο: Η γωνία διεύθυνσης της τελευταίας πλευράς $\boldsymbol{\alpha_{n,n+1}}$

Θεμελιώδη Προβλήματα

3ο Θεμελιώδες Πρόβλημα

Λύση

Από το σχήμα ισχύει ότι:

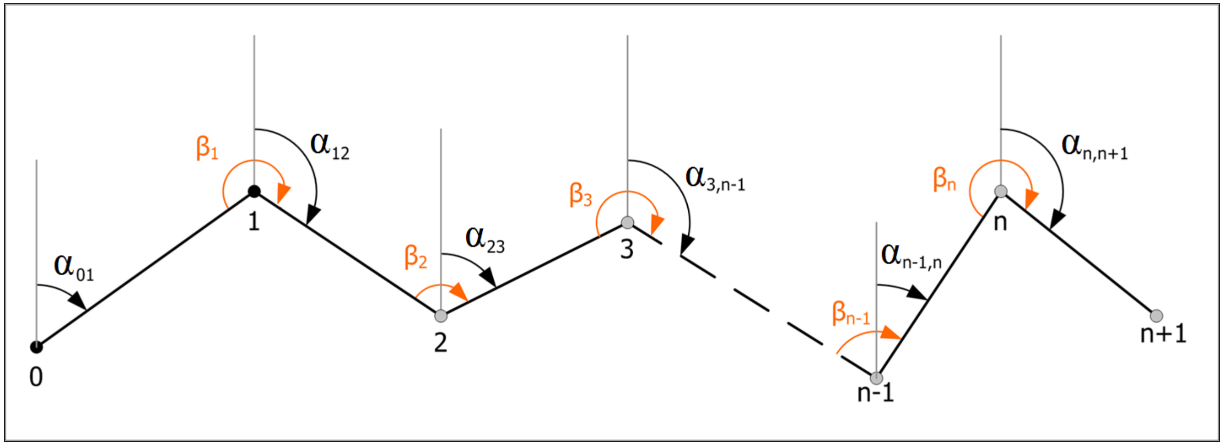
$\alpha_{12} = \alpha_{01} + \beta_1 + 200^g - 400^g$

$\alpha_{23} = \alpha_{12} + \beta_2 + 200^g - 400^g$

....

....

$\alpha_{n,n+1} = \alpha_{n,n-1} + \beta_n + 200^g - 400^g$



Προσθέτοντας τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει για τη γωνία διεύθυνσης $\boldsymbol{\alpha_{n,n+1}}$ ότι :

$$\boxed{\alpha_{n,n+1} = \alpha_{01} + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n + n \cdot 200^g - k \cdot 400^g}$$

Στο συντελεστή k δίνουμε κατάλληλη τιμή ώστε $0 \leq \alpha_{n,n+1} \leq 400^g$

Θεμελιώδη Προβλήματα

3ο Θεμελιώδες Πρόβλημα (Παράδειγμα)

Δίνεται η γωνία διεύθυνσης της πλευράς 0,1 και είναι ίση με $\boldsymbol{\alpha_{01} = 245^g}$

Έχουν μετρηθεί οι γωνίες θλάσης: $\boldsymbol{\beta_1 = 267{,}541^g}$, $\boldsymbol{\beta_2 = 171{,}561^g}$ και $\boldsymbol{\beta_3 = 217{,}684^g}$

Ζητούνται οι γωνίες διεύθυνσης $\boldsymbol{\alpha_{23}}$ και $\boldsymbol{\alpha_{34}}$.

<u>Λύση</u>

Οι γωνίες διεύθυνσης υπολογίζονται ως εξής:

$\boldsymbol{\alpha_{23}} = \alpha_{01} + \beta_1 + \beta_2 + 2\cdot200^g - k\cdot400^g = 245^g + 267{,}541^g + 171{,}561^g + 2\cdot200^g - k\cdot400^g \Rightarrow$

$\alpha_{23} = 1084{,}102^g - \mathbf{2}\cdot400^g \Rightarrow \boxed{\alpha_{23} = 284{,}102^g}$ (Επιλέγουμε $\mathbf{k = 2}$ ώστε $0 \leq \alpha_{n,n+1} \leq 400^g$)

$\boldsymbol{\alpha_{34}} = \alpha_{23} + \beta_3 + 200^g - k\cdot400^g = 284{,}102^g + 217{,}684^g + 200^g - k\cdot400^g \Rightarrow$

$\alpha_{34} = 701{,}786^g - \mathbf{1}\cdot400^g \Rightarrow \boxed{\alpha_{34} = 301{,}786^g}$ (Επιλέγουμε $\mathbf{k = 1}$ ώστε $0 \leq \alpha_{n,n+1} \leq 400^g$)

<u>Εναλλακτικός τρόπος:</u>

$\boldsymbol{\alpha_{34}} = \alpha_{01} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + 3\cdot200^g - k\cdot400^g = 1501{,}786^g - \mathbf{3}\cdot400^g \Rightarrow \boxed{\alpha_{34} = 301{,}786^g}$

Αλλαγή Συστήματος Συντεταγμένων

Στη Γεωδαισία είναι σύνηθες να χρειάζεται να μετασχηματιστούν οι καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου από ένα **παλαιό** σύστημα συντεταγμένων $\mathbf{(X,Y,Z)_I}$ σε ένα **νέο** καρτεσιανό σύστημα $\mathbf{(X,Y,Z)_{II}}$ το οποίο διατηρεί τη μορφή των σχημάτων.

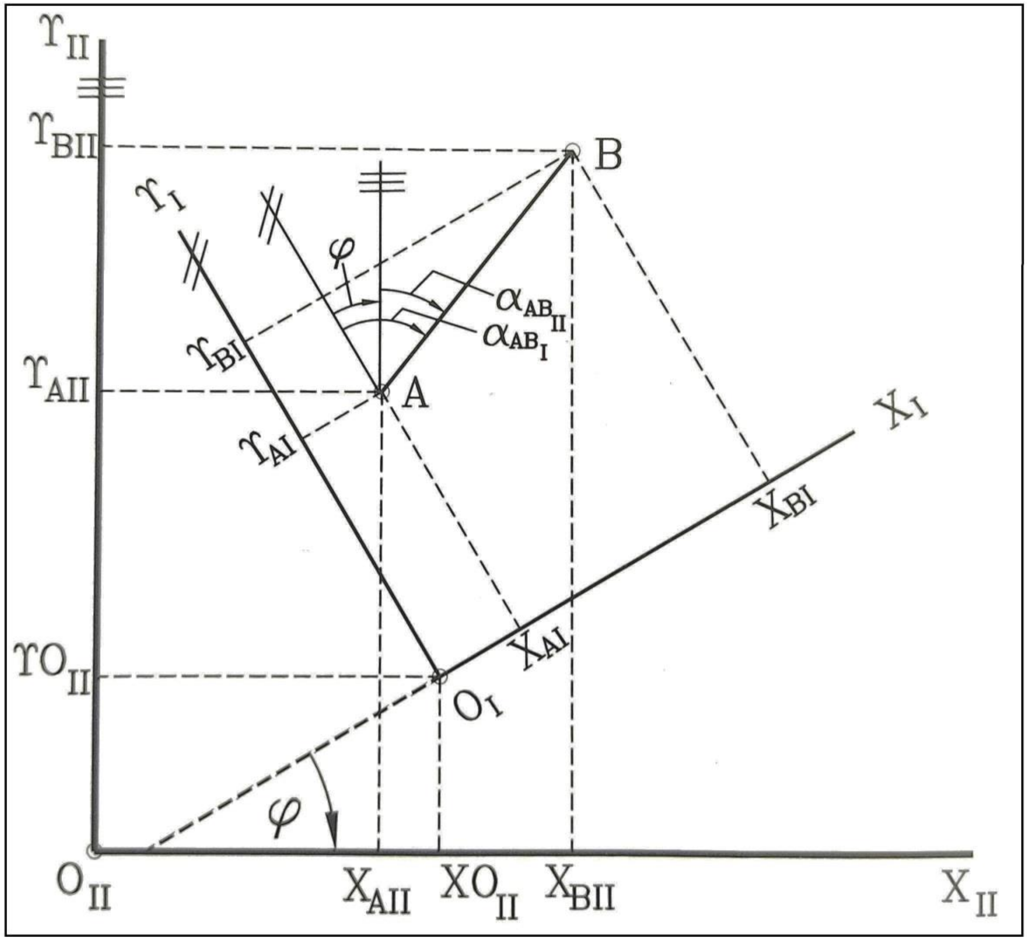
- Αυτό σημαίνει ότι ένα σχήμα στο σύστημα **I**, π.χ. ένα ισόπλευρο τρίγωνο, θα παραμένει ισόπλευρο και στο σύστημα **II**.
- Αυτός ο μετασχηματισμός ονομάζεται **μετασχηματισμός ομοιότητας**.
- Ο μετασχηματισμός ομοιότητας στο επίπεδο (2D) δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{\begin{aligned} X_{A_{II}} &= X_{O_{II}} + m\cdot\left(X_{A_I}\cdot\cos\varphi - Y_{A_I}\cdot\sin\varphi\right) \\ Y_{A_{II}} &= Y_{O_{II}} + m\cdot\left(X_{A_I}\cdot\sin\varphi - Y_{A_I}\cdot\cos\varphi\right) \end{aligned}}$$

όπου:

- $\mathbf{X_{A_{II}}}$ και $\mathbf{Y_{A_{II}}}$ οι συντεταγμένες του σημείου Α στο σύστημα ΙΙ (νέο)
- $\mathbf{X_{A_I}}$ και $\mathbf{Y_{A_I}}$ οι συντεταγμένες του σημείου Α στο σύστημα Ι (παλαιό)
- $\mathbf{X_{O_{II}}}$ και $\mathbf{Y_{O_{II}}}$ οι συντεταγμένες της αρχής $\mathbf{O_I}$ του συστήματος **I** στο σύστημα **II**
- ***φ*** η δεξιόστροφη γωνία κατά την οποία πρέπει να περιστραφεί το σύστημα **I** για να γίνει παράλληλο με το σύστημα **II**
- ***m*** ο συντελεστής ομοιότητας μεταξύ των δύο συστημάτων.

Αλλαγή Συστήματος Συντεταγμένων

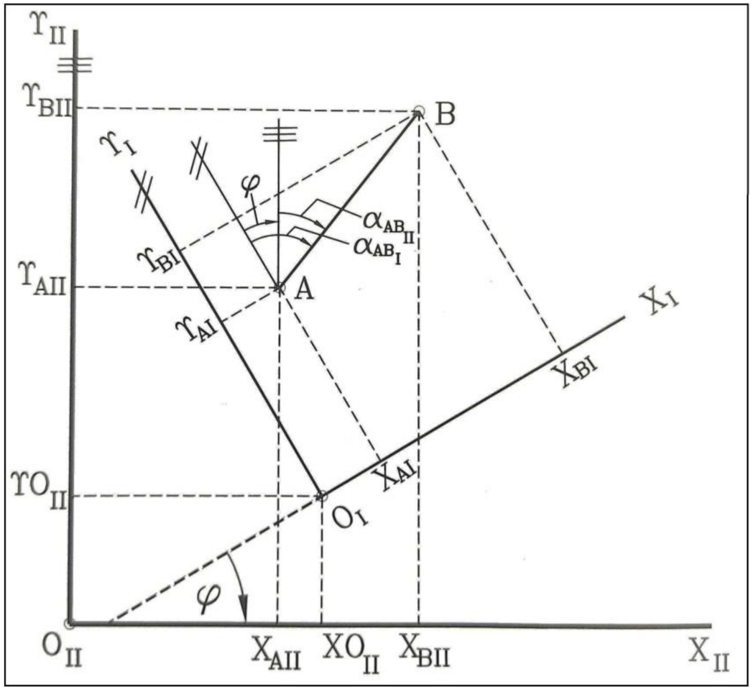


Μαθήματα Γεωδαισίας, 2η Έκδοση, Γ. Γεωργόπουλος, Εκδόσεις Τζιόλα, 2019.

Αλλαγή Συστήματος Συντεταγμένων

Ειδικές περιπτώσεις

- Αν $\mathbf{X_{O_{II}} = Y_{O_{II}} = 0}$ τότε έχουμε μόνο στροφή μεταξύ των συστημάτων.
- Αν $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0^g}$ τότε έχουμε μόνο παράλληλη μετάθεση μεταξύ των συστημάτων.
- Αν $\boldsymbol{m} = \mathbf{1}$ τότε δεν έχουμε μεταβολή των μηκών στα δύο συστήματα.



Αλλαγή Συστήματος Συντεταγμένων

- Για να μετατραπούν οι συντεταγμένες ενός σημείου από ένα σύστημα (παλιό) σε ένα άλλο (νέο), απαιτείται να είναι γνωστά τα στοιχεία $\mathbf{X_{OII}}$, $\mathbf{Y_{OII}}$, $\boldsymbol{\varphi}$ και $\boldsymbol{m}$.
- Για να γίνει ο υπολογισμός αυτών των στοιχείων, απαιτείται να υπάρχουν **δύο** τουλάχιστον σημεία **Α** και **Β** με γνωστές συντεταγμένες και στα 2 συστήματα.

➢ **Συντελεστής ομοιότητας m**. Από τον ορισμό του έχουμε: $\boxed{m = D_{AB_{II}} / D_{AB_{I}}}$

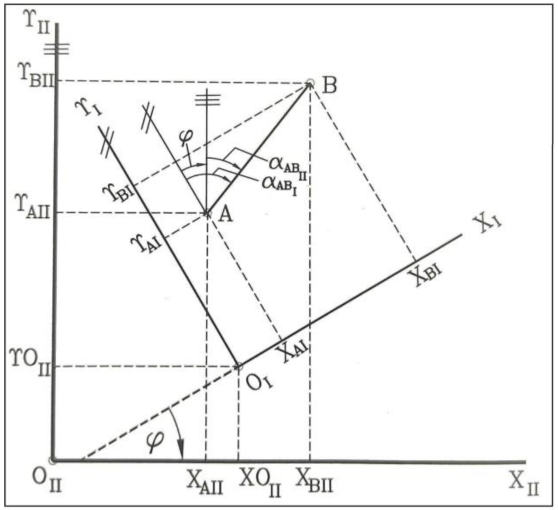
όπου $\mathbf{D_{ABI}}$ και $\mathbf{D_{ABII}}$ τα μήκη της πλευράς (ΑΒ) στα 2 συστήματα αντίστοιχα. Υπολογίζονται από το 2ο θεμελιώδες πρόβλημα.

➢ **Γωνία φ**. Με βάση το σχήμα έχουμε: $\boxed{\varphi = \alpha_{\mathrm{AB_I}} - \alpha_{\mathrm{AB_{II}}}}$

➢ **Συντεταγμένες $\mathbf{X_{OII}}$ και $\mathbf{Y_{OII}}$ στο σύστημα II.**

Με βάση τις προηγούμενες εξισώσεις για το σημείο Α έχουμε:

$$\boxed{\begin{aligned} X_{O_{II}} &= X_{A_{II}} - m\cdot\left(X_{A_I}\cdot\cos\varphi - Y_{A_I}\cdot\sin\varphi\right) \\ Y_{O_{II}} &= Y_{A_{II}} - m\cdot\left(X_{A_I}\cdot\sin\varphi - Y_{A_I}\cdot\cos\varphi\right) \end{aligned}}$$



Στοιχεία Γεωδαισίας

Βιβλιογραφία

- Μαθήματα Γεωδαισίας, 2η Έκδοση, Γ. Γεωργόπουλος, Εκδόσεις Τζιόλα, 2019.
- Στοιχεία Τοπογραφίας, Ε. Στυλιανίδη, Εκδόσεις Δίσιγμα, 2011.
- Εφαρμοσμένη Γεωδαισία, 2η έκδοση, Ε. Λάμπρου, Γ. Πανταζής, Εκδόσεις Ζήτη, 2010.