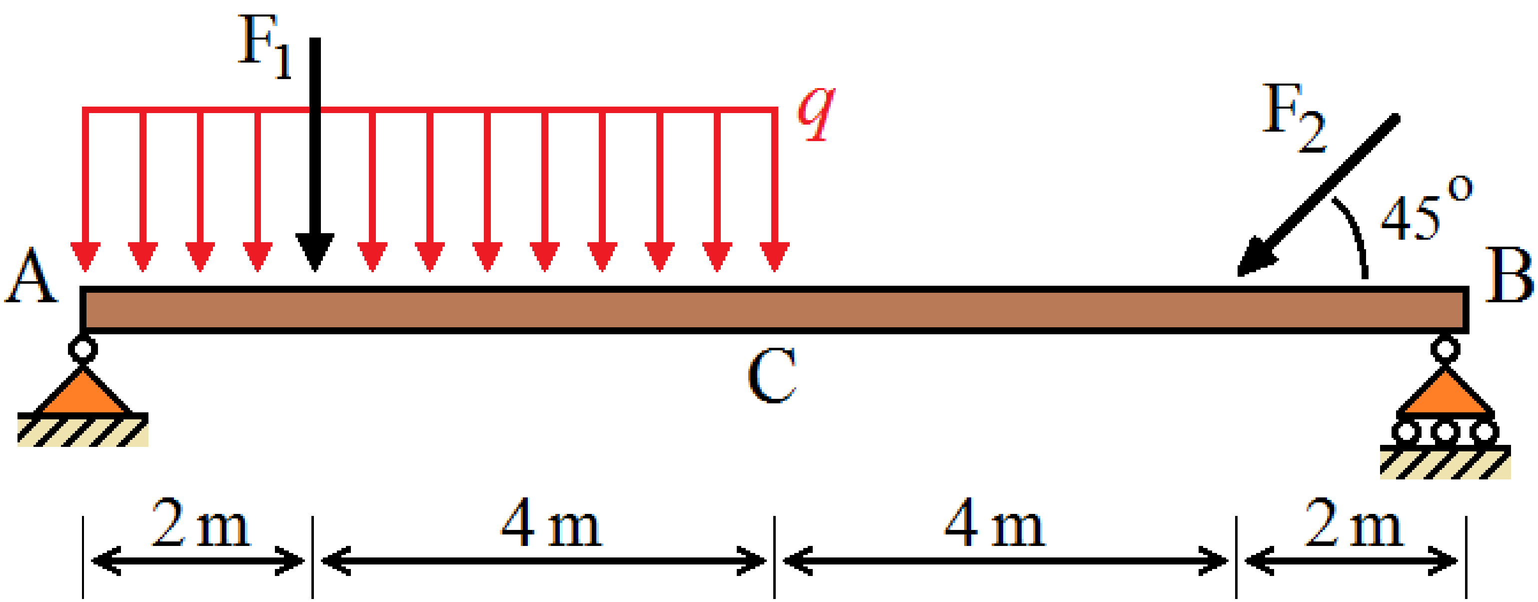
# Τεχνική Μηχανική

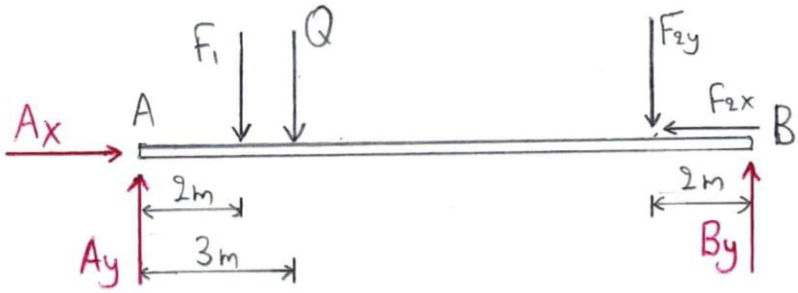
## Άσκηση 10

Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα **[N], [V], [M]** στην αμελητέου βάρους δοκό του παρακάτω σχήματος, η οποία στηρίζεται με άρθρωση στο σημείο **A** και κύλιση στο σημείο **B**. Στο αριστερό τμήμα της δοκού (**AC**) ασκείται μία κατανεμημένη ορθογωνική φόρτιση με μέτρο **q = 3 kN/m**. Στη δοκό ασκούνται επίσης δύο σημειακές δυνάμεις με μέτρα $\mathbf{F_1 = 10}$ **kN** και $\mathbf{F_2 = 20}$ **kN**.



Άσκηση 10 Τεχνική Μηχανική

Αρχικά θα κατασκευάσουμε το Δ.Ε.Σ. της δοκού.




- Το κατανεμημένο φορτίο q είναι ισοδύναμο με σημειακό φορτίο Q με μέτρο: $Q = q \cdot 6m = 3kN/m \cdot 6m \Rightarrow Q = 18\ kN$ το οποίο ασκείται στο μέσο της κατανεμημένης φόρτισης, δηλαδή σε απόσταση 3 m από το A.

- Η δύναμη $F_2$ θα αναλυθεί στις συνιστώσες της $F_{2x}$ και $F_{2y}$.

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos 45 = 14{,}14\ kN$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin 45 = 14{,}14\ kN$$

- Η άρθρωση θα αντικατασταθεί από τις Ax, Ay και η κύλιση από την By.

Στερεοστατικές Εξισώσεις Ισορροπίας

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x - F_{2x} = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = 14{,}14\ kN}$$

$$\overset{+}{\curvearrowleft} \Sigma M_A = 0 \Rightarrow -F_1 \cdot 2m - Q \cdot 3m - F_{2y} \cdot 10m + B_y \cdot 12m = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10kN \cdot 2m - 18kN \cdot 3m - 14{,}14kN \cdot 10m + B_y \cdot 12m = 0 \Rightarrow$$

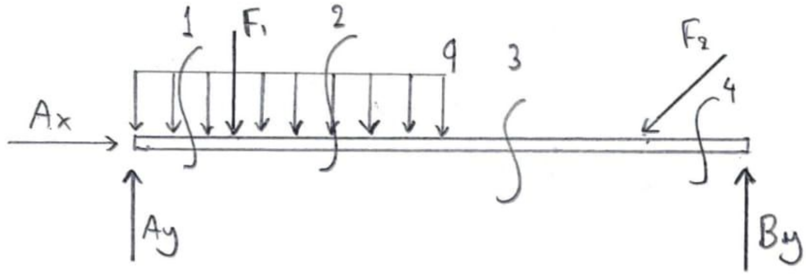
$$\Rightarrow -20kN \cdot m - 54\ kN\,m - 141{,}4\ kN \cdot m + B_y \cdot 12m = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_y \cdot 12m = 215{,}4\ kN \cdot m \Rightarrow \boxed{B_y = 17{,}95\ kN}$$

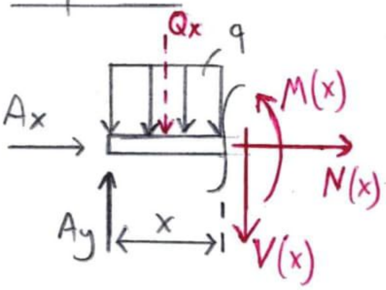
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - F_1 - Q - F_{2y} + B_y = 0 \Rightarrow A_y = F_1 + Q + F_{2y} - B_y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_y = 10\ kN + 18\ kN + 14{,}14\ kN - 17{,}95\ kN \Rightarrow \boxed{A_y = 24{,}19\ kN}$$

Για να υπολογίσουμε τα [N], [V], [M] πρέπει να χωρίσουμε τη δοκό σε 5 τμήματα με 4 τομές.




Τομή 1




Το κατανεμημένο φορτίο είναι ισοδύναμο με σημειακό φορτίο $Q_x = q \cdot x$, το οποίο ασκείται σε απόσταση $\frac{x}{2}$ από το A.

Η τομή είναι στο διάστημα $0 \leq x \leq 2m$

$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x + N(x) = 0 \Rightarrow \boxed{N(x) = -14{,}14\ kN}$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - Q_x - V(x) = 0 \Rightarrow V(x) = A_y - q \cdot x \Rightarrow \boxed{V(x) = 24{,}19\ kN - 3x}$

$\curvearrowleft + \Sigma M_1 = 0 \Rightarrow M(x) + Q_x \cdot \frac{x}{2} - A_y \cdot x = 0 \Rightarrow \boxed{M(x) = 24{,}19 \cdot x - \frac{3}{2} x^2}$

Για την V(x) ισχύουν τα εξής:

$x = 0 \rightsquigarrow V(x) = 24{,}19\ kN$

$x = 2m \rightsquigarrow V(x) = 18{,}19\ kN$

Για την M(x) ισχύουν τα εξής:

$x = 0 \Rightarrow M(x) = 0$ (Λογικό, η ροπή στην άρθρωση είναι μηδέν)

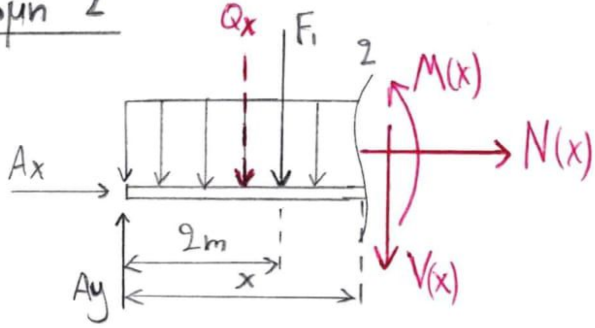
$x = 2 \Rightarrow M(x) = 42{,}38\ kN \cdot m$

$M'(x) = 24{,}19 - 3x$

$M''(x) = -3$ (Άρα τα κοίλα προς τα πάνω)

Βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο της M(x) για να βρούμε την κλίση της.

## Τομή 2




Το κατανεμημένο φορτίο είναι ισοδύναμο με σημειακό φορτίο $Q_x = q \cdot x$, το οποίο ασκείται σε απόσταση $\frac{x}{2}$ από το A.

Η τομή είναι στο διάστημα $2m \leq x \leq 6m$

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x + N(x) = 0 \Rightarrow \boxed{A_x = -14{,}14\ kN}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - Q_x - F_1 - V(x) = 0 \Rightarrow V(x) = A_y - F_1 - q \cdot x \Rightarrow \boxed{V(x) = 14{,}19kN - 3 \cdot x}$$

$$\overset{+}{\curvearrowleft} \Sigma M_2 = 0 \Rightarrow -A_y \cdot x + Q_x \cdot \frac{x}{2} + F_1(x-2) + M(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(x) = 24{,}19x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} - 10x + 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{M(x) = 14{,}19 \cdot x - 1{,}5x^2 + 20}$$

$x = 2 \rightarrow V(x) = 8{,}19\ kN$

$x = 6 \rightarrow V(x) = -3{,}81\ kN$

Η $V(x)$ τέμνει τον άξονα x.
Θα λύσουμε την $V(x) = 0$

$V(x) = 0 \Rightarrow 14{,}19 - 3x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 4{,}73m}}$

Στο σημείο αυτό θα παρουσιάζεται και η μέγιστη ροπή κάμψης $M_{max}$.

$\underline{M_{max} = M(4{,}73) = 53{,}56\ kN \cdot m}$

$x = 2 \rightarrow M(x) = 42{,}38\ kN \cdot m$ (Λογικό)

$x = 6 \rightarrow M(x) = 51{,}14\ kN \cdot m$

Για να βρούμε το μέγιστο και την κλίση της $M(x)$ θα βρούμε την 1η και τη 2η παράγωγο.

$M'(x) = 14{,}19 - 3x \rightarrow M'(x) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 4{,}73m}}$ ✓

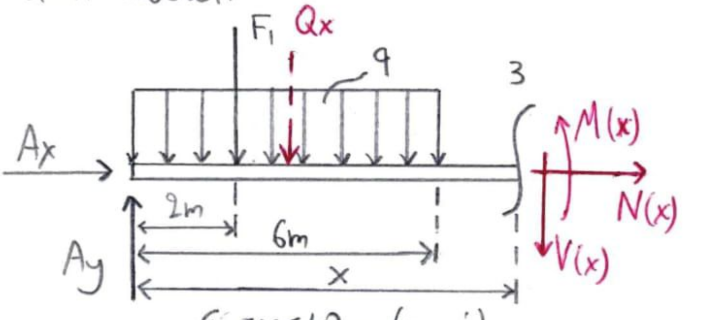
Η μέγιστη ροπή εμφανίζεται στο σημείο που η $M'(x)$ είναι μηδέν, η αλλιώς στο σημείο που η $V(x)$ είναι μηδέν.

Άρα επαληθεύτηκε η λύση για $x = 4{,}73$ m

$M''(x) = -3 < 0$ Άρα καμπύλη προς τα πάνω.

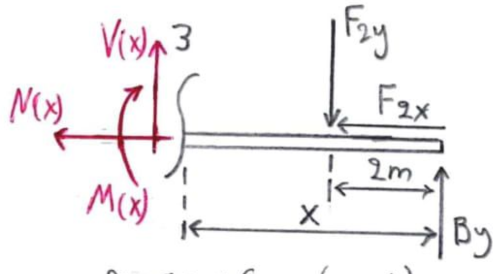
## Τομή 3

Η τομή 3 μπορεί να γίνει για ευκολία κρατώντας το δεξί τμήμα της δοκού. Όποιο τμήμα και να κρατήσουμε, η λύση θα είναι ίδια. Και οι δύο τρόποι είναι σωστοί.




$6m \leq x \leq 10m$ (τομή)

ή




$2m \leq x \leq 6m$ (τομή)

Προσοχή: Αν κρατήσουμε το δεξί τμήμα, δηλαδή η τομή είναι στα αριστερά, πρέπει να αντιστρέψουμε τη φορά των $N(x)$, $V(x)$, $M(x)$.

Για ευκολία, θα συνεχίσουμε με το δεξί τμήμα.

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow -N(x) - F_{2x} = 0 \Rightarrow \boxed{N(x) = -14{,}14 \text{ kN}}$

$+\uparrow \ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow V(x) - F_{2y} + B_y = 0 \Rightarrow V(x) = F_{2y} - B_y \Rightarrow \boxed{V(x) = -3{,}81 \text{ kN}}$

$\circlearrowleft + \ \Sigma M_3 = 0 \Rightarrow -M(x) - F_{2y}(x-2) + B_y \cdot x = 0 \Rightarrow M(x) = -F_{2y} \cdot x + 2 \cdot F_{2y} + B_y \cdot x \Rightarrow$

$\Rightarrow M(x) = -14{,}14 \cdot x + 17{,}95 \cdot x + 14{,}14 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{M(x) = 3{,}81 \cdot x + 28{,}28}$

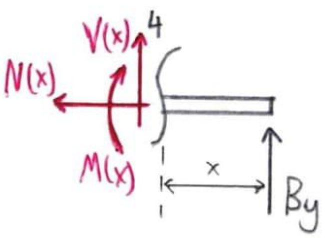
$x = 6m \rightsquigarrow M(x) = 51{,}14 \text{ kN}\cdot\text{m}$

$x = 2m \rightsquigarrow M(x) = 35{,}9 \text{ kN}\cdot\text{m}$

Είναι εξίσωση ευθείας

## Τομή 4

Η τομή 4 θα γίνει επίσης κρατώντας το δεξί τμήμα της δοκού. Είναι πολύ πιο εύκολο.




$0 \leq x \leq 2m$ (τομή)

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{N(x) = 0}$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \Rightarrow V(x) + B_y = 0 \Rightarrow \boxed{V(x) = -17{,}95\ kN}$

$\circlearrowleft + \Sigma M_4 = 0 \Rightarrow -M(x) + B_y \cdot x = 0 \Rightarrow \boxed{M(x) = 17{,}95 \cdot x}$ Εξίσωση ευθείας

$x = 2m \rightsquigarrow M(x) = 35{,}9\ kN \cdot m$

$x = 0m \rightsquigarrow M(x) = 0$ (Λογικό, δεν έχουμε ροπή στην κύλιση)

Αφού έχουμε βρει τις τιμές των [N], [V], [M] σε όλες τις τομές, μπορούμε να σχεδιάσουμε τα διαγράμματα N(x), V(x), M(x).