



UNIVERSITY OF
PATRAS
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

Σημειώσεις διαλέξεων «Τεχνική Μηχανική»

Διάλεξη 6
16/05/2023

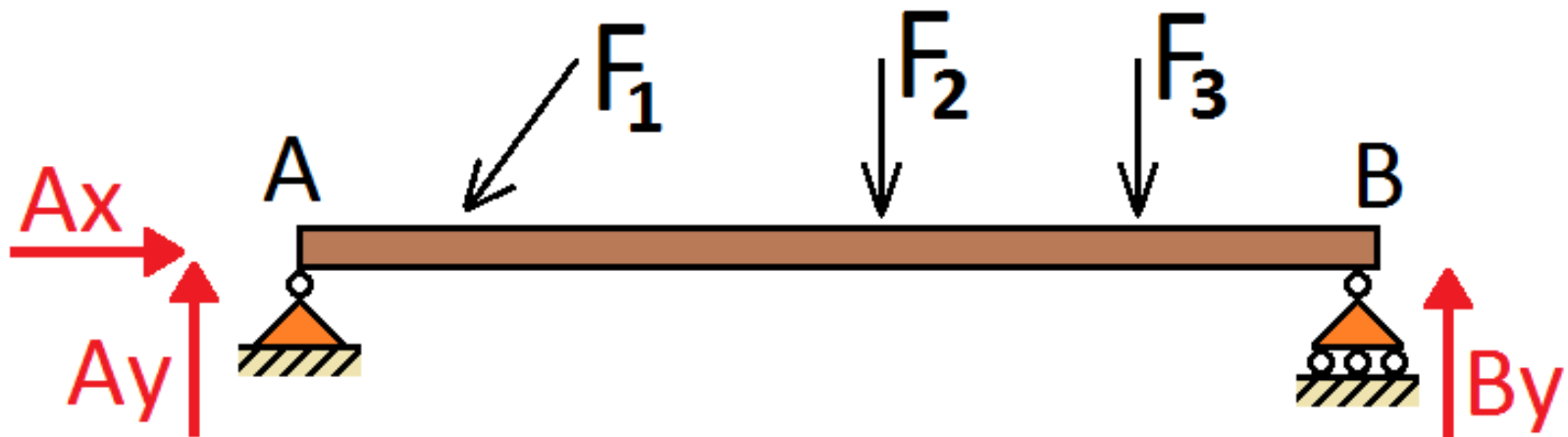
Λευθεριώτης Γεώργιος
Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος
Πανεπιστήμιο Πατρών

Εντατικά Μεγέθη Διατομής $N(x)$, $V(x)$, $M(x)$

Κάθε δύναμη η οποία είναι παράλληλη με το διαμήκη άξονα μίας δοκού θεωρείται **αξονική**, ενώ κάθε δύναμη η οποία είναι κάθετη θεωρείται **τέμνουσα**.

Αν μία δύναμη εφαρμόζεται υπό γωνία, την αναλύουμε σε συνιστώσες, μία αξονική και μία τέμνουσα.

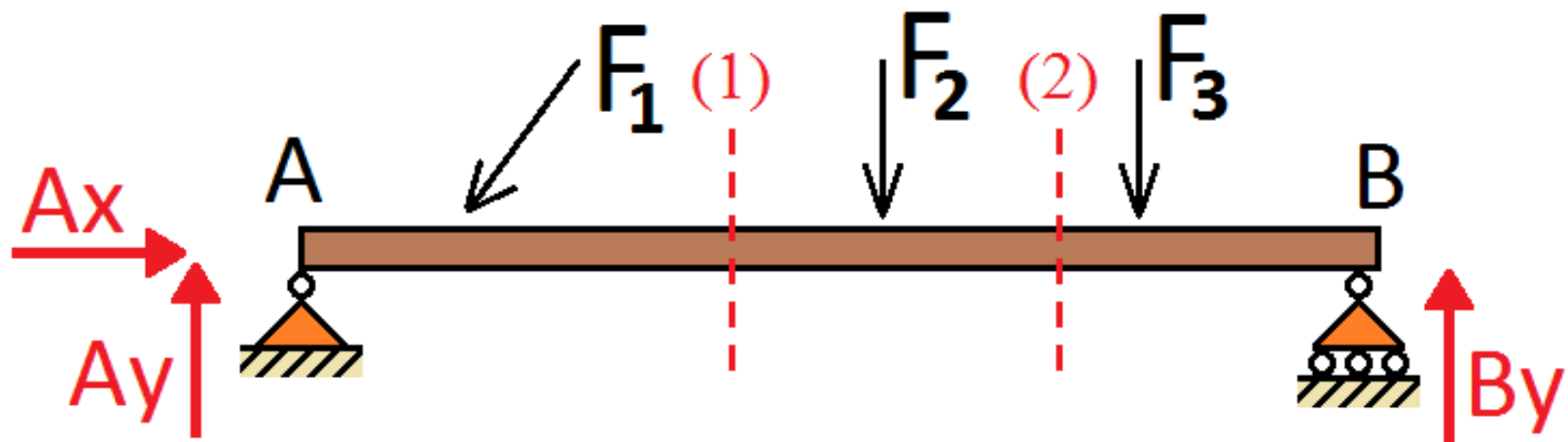
Έστω ότι στη δοκό του παρακάτω σχήματος δρουν οι δυνάμεις F_1 , F_2 , F_3 . Μετά από εφαρμογή των Στερεοστατικών Εξισώσεων Ισορροπίας υπολογίζουμε τις τρεις αντιδράσεις στήριξης, A_x , A_y , B_y της δοκού.



Εντατικά Μεγέθη Διατομής $N(x)$, $V(x)$, $M(x)$

Αν σε τυχαίες αποστάσεις θεωρήσουμε δύο νοητές τομές (1) και (2), αυτές χωρίζουν τη δοκό σε τρία ανεξάρτητα τμήματα.

Επειδή η δοκός ισορροπεί, πρέπει και τα τμήματα που νοητά έχουν αποκοπεί από αυτήν να ισορροπούν.



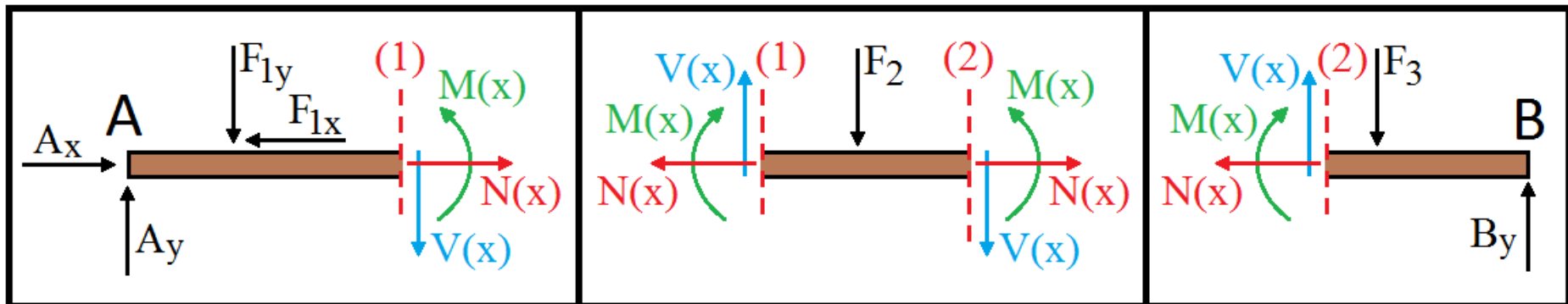
Για να συμβεί αυτό, πρέπει να αναπτυχθούν δυνάμεις στις επιφάνειες τομής με τα γειτονικά τμήματα.

Εντατικά Μεγέθη Διατομής $N(x)$, $V(x)$, $M(x)$

Η κατανομή των δυνάμεων αυτών στις τομές δεν είναι γνωστή, αλλά δίνουν μία συνισταμένη δύναμη \mathbf{R} η οποία αναλύεται σε μία οριζόντια συνιστώσα $\mathbf{N(x)}$ και μία κατακόρυφη συνιστώσα $\mathbf{V(x)}$.

Η δύναμη αυτή δεν διέρχεται από το κέντρο βάρους της διατομής της δοκού, αλλά από τυχαίο σημείο της διατομής. Μπορεί όμως να μεταφερθεί στο κέντρο βάρους της δοκού αρκεί να συνοδεύεται από τη ροπή μεταφοράς της $\mathbf{M(x)}$.

Άρα στο κέντρο βάρους της διατομής της δοκού ασκούνται η αξονική δύναμη $\mathbf{N(x)}$, η τέμνουσα δύναμη $\mathbf{V(x)}$ και η καμπτική ροπή ή ροπή κάμψης $\mathbf{M(x)}$.



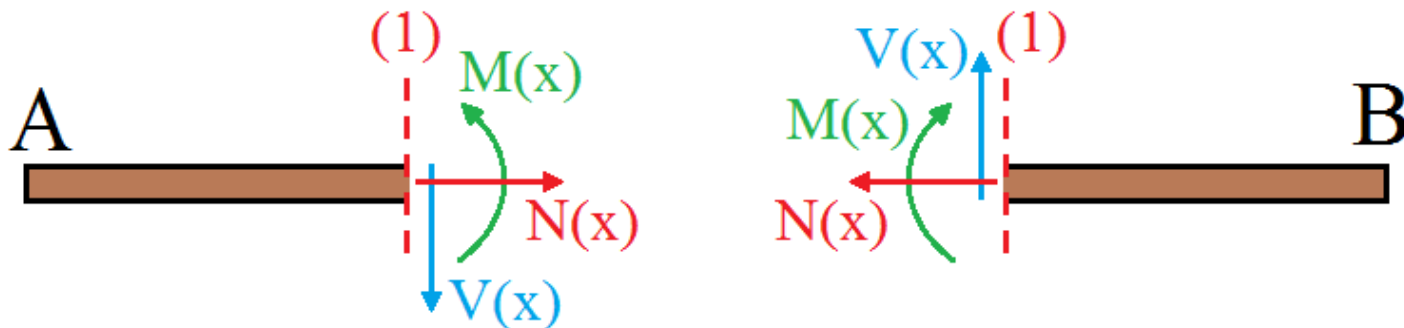
Εντατικά Μεγέθη Διατομής $N(x)$, $V(x)$, $M(x)$

Η αξονική δύναμη $N(x)$ θεωρείται **θετική** όταν προκαλεί εφελκυσμό της δοκού, δηλαδή όταν κατευθύνεται εκτός της δοκού και **αρνητική** όταν κατευθύνεται εντός της δοκού.

Η τέμνουσα δύναμη $V(x)$ θεωρείται **θετική** όταν τείνει να περιστρέψει το σώμα ωρολογιακά, δηλαδή δεξιόστροφα και **αρνητική** στην αντίθετη περίπτωση. Άρα:

- Στα αριστερά τμήματα είναι θετική προς τα κάτω.
- Στα δεξιά τμήματα είναι θετική προς τα πάνω.

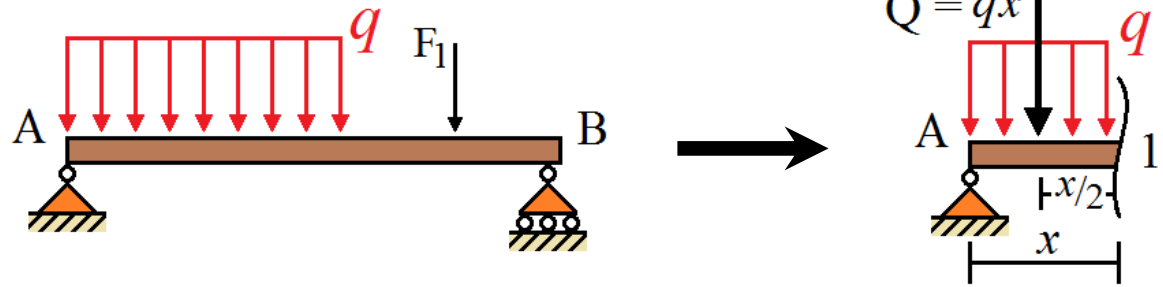
Η καμπτική ροπή $M(x)$ θεωρείται **θετική** όταν τείνει να προκαλέσει εφελκυσμό στην «ίνα αναφοράς», δηλαδή την κάτω πλευρά της δοκού ή αλλιώς όταν στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω. Στην αντίθετη περίπτωση θεωρείται **αρνητική**.



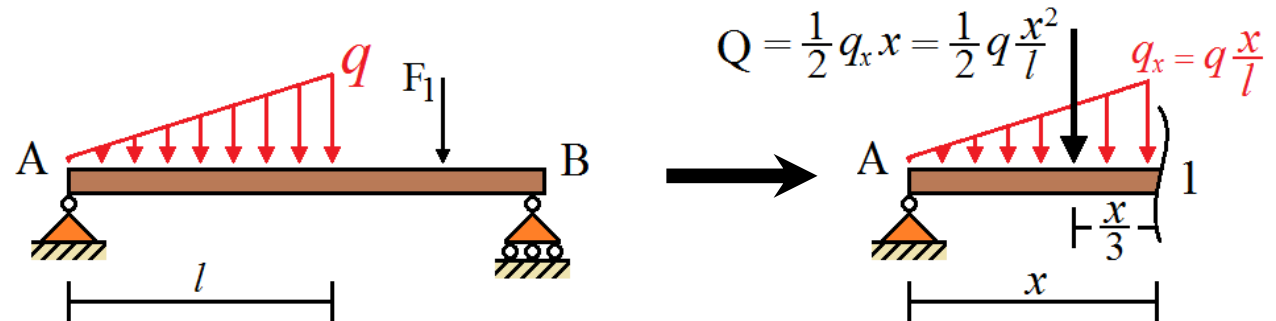
Εντατικά Μεγέθη Διατομής $N(x)$, $V(x)$, $M(x)$

Εάν μία τομή τέμνει ένα καταναμημένο φορτίο $q(x)$, τότε το αντικαθιστούμε με τη συνισταμένη του Q ως εξής:

Ορθογωνική φόρτιση:



Τριγωνική φόρτιση:



Εντατικά Μεγέθη Διατομής $N(x)$, $V(x)$, $M(x)$

Κανόνες για τη σχεδίαση των Διαγραμμάτων των Τεμνουσών Δυνάμεων $V(x)$ και των Καμπτικών Ροπών $M(x)$.

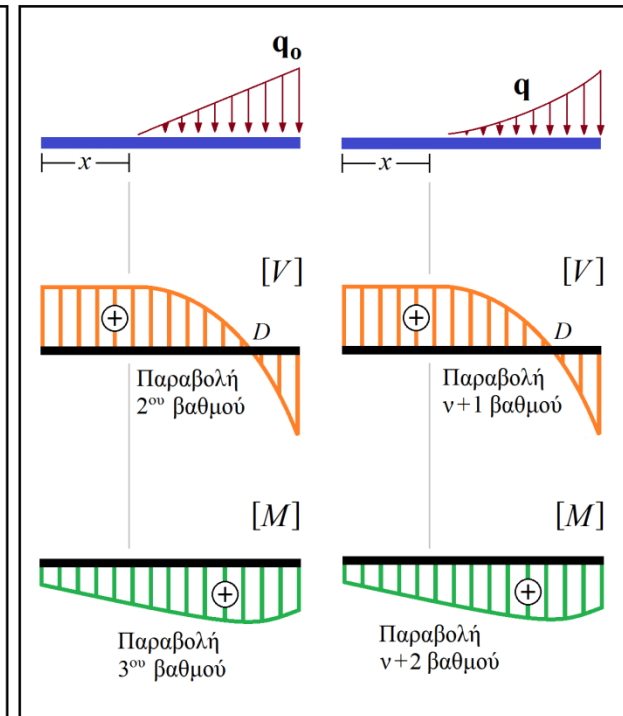
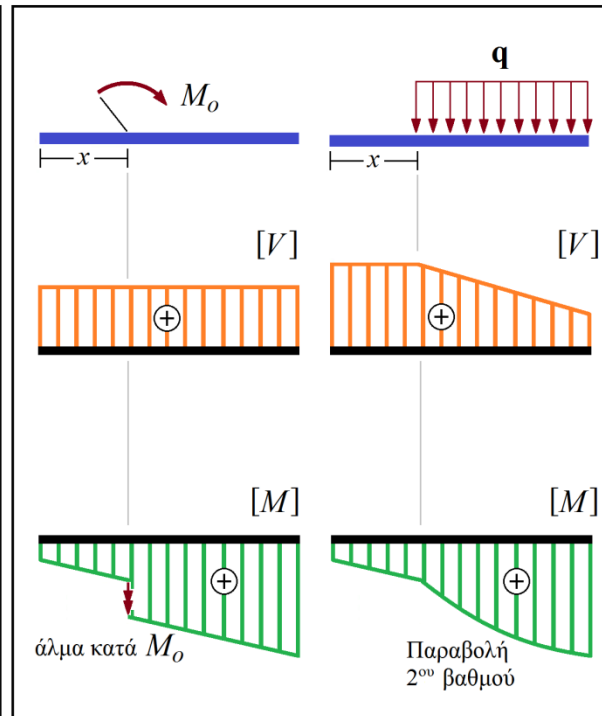
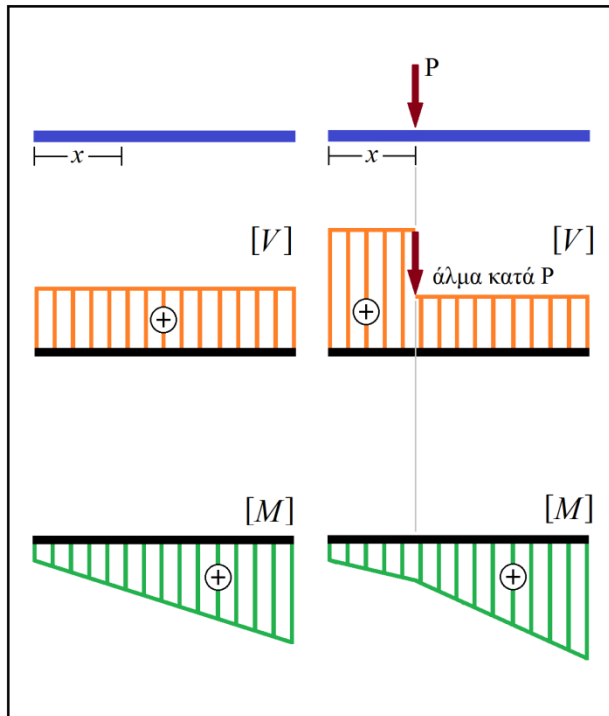
1. Σε αφόρτιστη περιοχή της δοκού:
 - Η $V(x)$ έχει σταθερή τιμή και παριστάνεται από ευθεία παράλληλη με τον άξονα x .
 - Η $M(x)$ μεταβάλλεται γραμμικά και παριστάνεται από ευθεία με κλίση.
2. Σε περιοχή με ομοιόμορφα κατανεμημένη φόρτιση (ορθογωνική):
 - Η $V(x)$ μεταβάλλεται γραμμικά και παριστάνεται από ευθεία με κλίση.
 - Η $M(x)$ μεταβάλλεται παραβολικά (καμπύλη 2^{ου} βαθμού).
3. Σε περιοχή με γραμμική φόρτιση (τριγωνική ή τραπεζοειδή):
 - Η $V(x)$ μεταβάλλεται παραβολικά .
 - Η $M(x)$ μεταβάλλεται παραβολικά (καμπύλη 3^{ου} βαθμού).
4. Η $M(x)$ παίρνει ακρότατες τιμές (μέγιστο ή ελάχιστο) εκεί όπου $V(x) = 0$.

Εντατικά Μεγέθη Διατομής $N(x)$, $V(x)$, $M(x)$

Αφόρτιστη περιοχή της δοκού ή περιοχή με σημειακή φόρτιση

Σημειακή ροπή σε δοκό ή ομοιόμορφα κατανεμημένη φόρτιση (ορθογωνική)

Γραμμική φόρτιση (τριγωνική) σε δοκό ή παραβολική φόρτιση

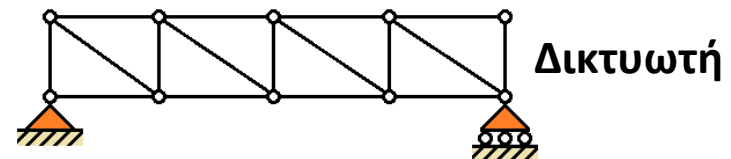
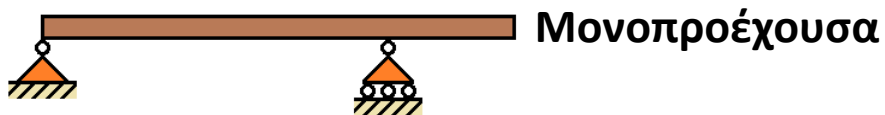
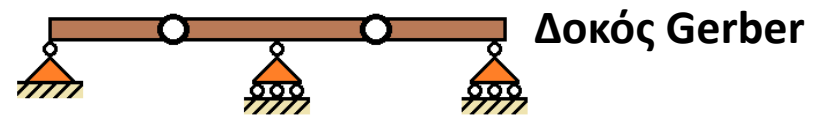
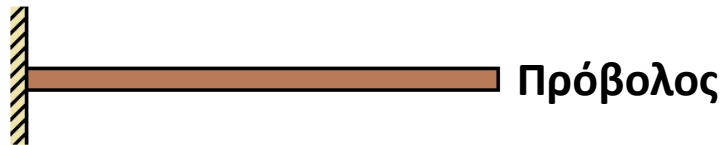


Είδη δοκών

Δοκός είναι ένας γραμμικός φορέας στον οποίο μπορούν να ασκηθούν εξωτερικά φορτία οποιουδήποτε είδους, δηλαδή αξονικά, εγκάρσια, καταναμημένα κτλ.

Πρισματική καλείται η δοκός η οποία διατηρεί σταθερό το εμβαδόν της διατομής της σε όλο το μήκος της.

Οι δοκοί ανάλογα με τον τρόπο στήριξης τους διακρίνονται σε:



Είδη δοκών

Οι περισσότερες από τις δοκούς που παρουσιάστηκαν είναι ισοστατικές, δηλαδή έχουν τρεις (3) άγνωστες αντιδράσεις (αμφιέριστη, πρόβολος, μονοπροέχουσα, αμφιπροέχουσα).

Εάν υπάρχουν περισσότεροι άγνωστοι, τότε οι μέθοδοι της στατικής δεν αρκούν για τον προσδιορισμό των αντιδράσεων.

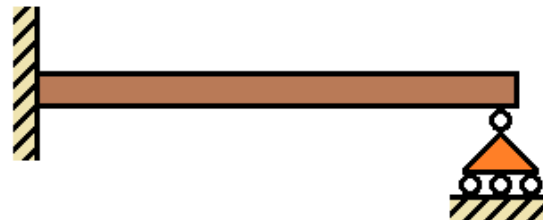
Σε αυτές τις περιπτώσεις, οι δοκοί ονομάζονται **υπερστατικές** και λαμβάνονται υπόψη οι ιδιότητες της δοκού, όπως η αντίσταση στην κάμψη.

Υπερστατικές Δοκοί

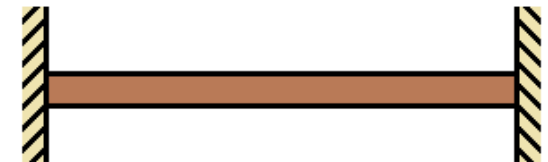
Συνεχής δοκός



Πάκτωση και κύλιση



Αμφίπακτη δοκός

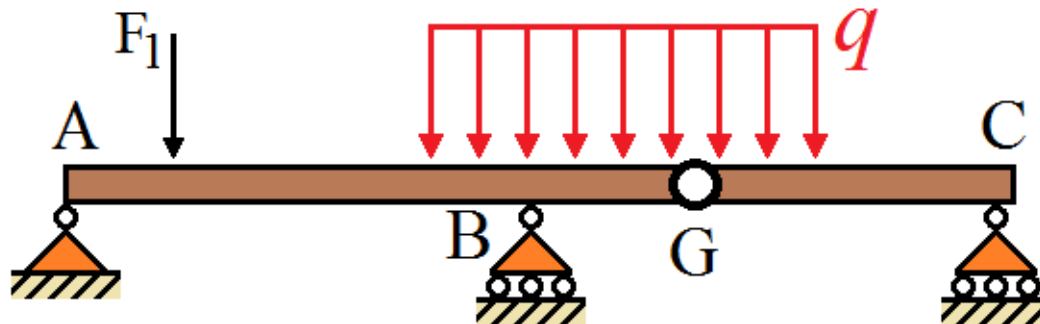


Δοκός με ενδιάμεσες αρθρώσεις (Gerber)

Η αμφιέριστη ισοστατική δοκός έχει το πλεονέκτημα ότι δεν είναι ευαίσθητη σε θερμοκρασιακές μεταβολές και μικρές υποχωρήσεις των στηρίξεων, αλλά είναι αντιοικονομική λόγω περισσότερου υλικού.

Η συνεχής υπερστατική δοκός δέχεται μικρότερες καμπτικές ροπές, άρα είναι πιο οικονομική αφού απαιτούνται μικρότερες διατομές, δηλαδή λιγότερο υλικό. Έχει όμως ευαίσθησιες στις θερμοκρασιακές μεταβολές και στις υποχωρήσεις των στηρίξεων.

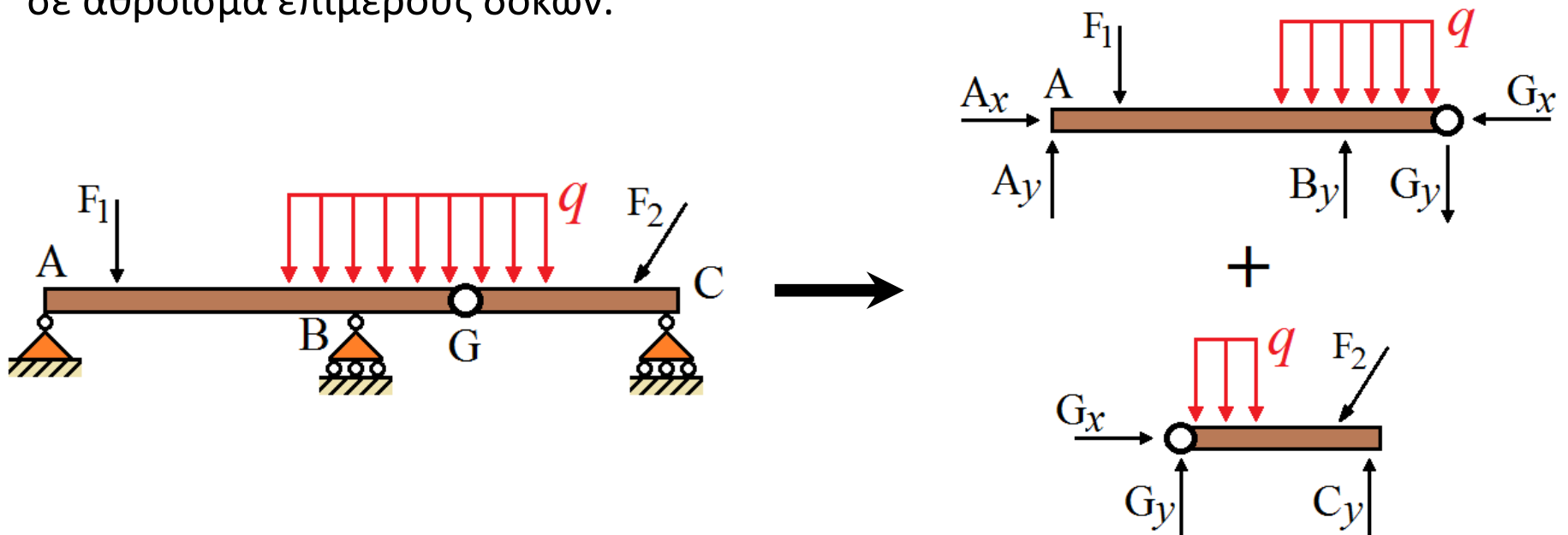
Μία ενδιάμεση λύση είναι η δοκός Gerber, η οποία διατηρεί το πλεονέκτημα της μείωσης των ροπών, και μπορεί να μετατραπεί σε ισοστατικό σύστημα με την τοποθέτηση ενδιάμεσων αρθρώσεων.



Δοκός με ενδιάμεσες αρθρώσεις (Gerber)

Η άρθρωση είναι ένας μηχανισμός ο οποίος επιτρέπει την περιστροφή, άρα σε αυτήν αναπτύσσεται μία τέμνουσα και μία αξονική δύναμη, ενώ η ροπή στην άρθρωση είναι μηδενική. Έτσι, για κάθε άρθρωση που προσθέτουμε προκύπτει μία πρόσθετη συνθήκη ισορροπίας, πέρα των τριών Σ.Ε.Ι.

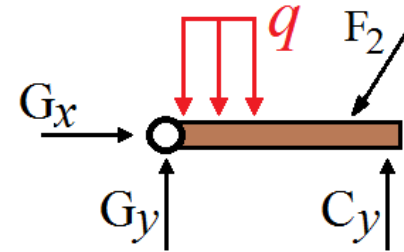
Ο υπολογισμός των αντιδράσεων στη δοκό Gerber γίνεται με ανάλυση της δοκού σε άθροισμα επιμέρους δοκών.



Δοκός με ενδιάμεσες αρθρώσεις (Gerber)

Αμφιέρειστη δοκός GC

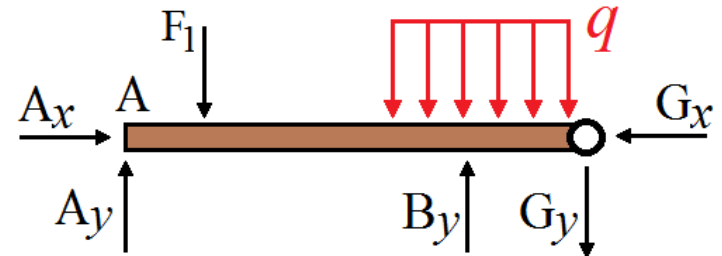
Αντικαθιστούμε την άρθρωση στο σημείο **G** με τις G_x , G_y και την κύλιση στο σημείο **C** με την C_y και υπολογίζουμε τους 3 αγνώστους G_x , G_y , C_y από τις στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας.



Μονοπροέχουσα δοκός AG

Αντικαθιστούμε την άρθρωση στο σημείο **G** με τις γνωστές πλέον G_x , G_y ίσου μέτρου αλλά αντίθετης φοράς (σε σχέση με τη δοκό **GC**).

Αντικαθιστούμε την άρθρωση στο σημείο **A** με τις A_x , A_y και την κύλιση στο σημείο **B** με την B_y και υπολογίζουμε τους 3 αγνώστους A_x , A_y , B_y από τις στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας.



Διαγράμματα [N], [V], [M] σε δοκούς Gerber

Τα διαγράμματα [N], [V], [M] στις δοκούς Gerber μπορούν να σχεδιαστούν με δύο τρόπους:

1) Θεωρώντας ολόκληρη τη δοκό, π.χ. **AGC**.

- Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα κανονικά πάνω στη δοκό.
- Η παρουσία της ενδιάμεσης άρθρωσης στο σημείο **G** δεν επηρεάζει τον αριθμό των τομών.
- Η τιμή της ροπής κάμψης στο σημείο **G** είναι μηδέν.

2) Θεωρώντας ξεχωριστές τις δοκούς **AG** και **GC**.

- Σχεδιάζουμε τα διαγράμματα της κάθε μίας δοκού ξεχωριστά.
- Τα παραθέτουμε κάτω από την ενιαία δοκό **AGC**.

Τεχνική Μηχανική

Βιβλιογραφία

- Τεχνική Μηχανική - Στατική, Beer F, Johnston R, Mazurek D, 11^η έκδοση, Εκδόσεις Τζιόλα, 2018.
- Στατική - Μηχανική του Απαραμόρφωτου Στερεού, Π. Βουθούνης, 6^η έκδοση, Εκδόσεις Α. Βουθούνη, 2017.
- Στατική και Αντοχή Υλικών, Α. Πολυζάκης, 2017.