# Σημειώσεις διαλέξεων «Τεχνική Μηχανική»

Διάλεξη 4
21/03/2023

Λευθεριώτης Γεώργιος
Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος
Πανεπιστήμιο Πατρών

## Κέντρο Βάρους

Κάθε σώμα αποτελείται από ένα άθροισμα πολλών μικρών σωματιδίων, τα οποία ονομάζουμε υλικά σημεία.

Όταν ένα τέτοιο σώμα βρίσκεται εντός του πεδίου βαρύτητας της Γης, τότε οι διαστάσεις του είναι πολύ μικρότερες από τις διαστάσεις της Γης.

Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι οι ελκτικές δυνάμεις που ασκούνται από τη Γη στα υλικά σημεία είναι πρακτικά **παράλληλες** μεταξύ τους.

Η συνισταμένη των δυνάμεων αυτών αποτελεί το **Βάρος** του σώματος, και ο φορέας της έχει τη διεύθυνση της βαρύτητας.

$$\boxed{W = m \cdot g}$$

όπου:

***m***: η μάζα του σώματος

***g***: η επιτάχυνση της βαρύτητας = 9,81 m/s$^2$

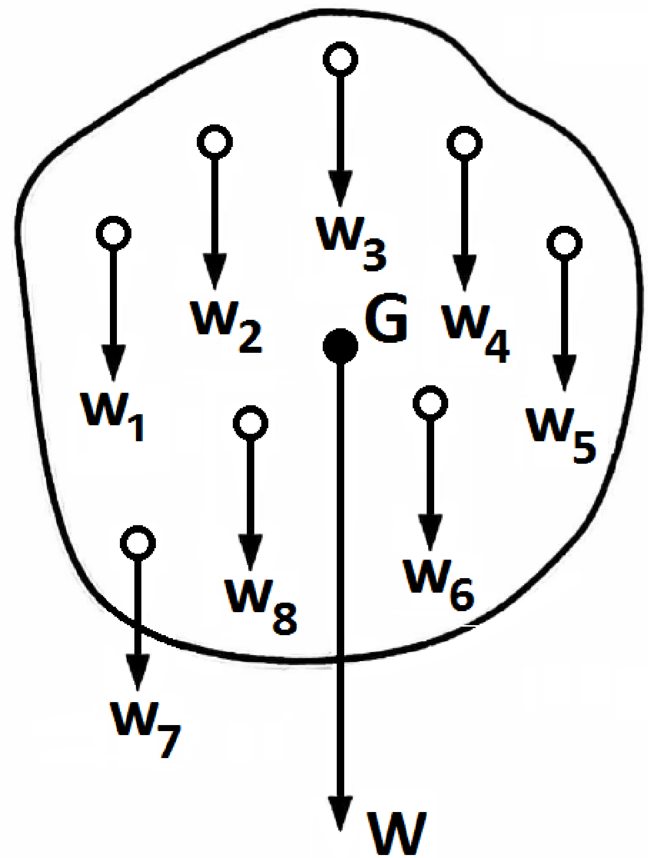
## Κέντρο Βάρους

**Κέντρο βάρους (Κ.Β.)** είναι το σταθερό σημείο στο οποίο εφαρμόζεται το βάρος του σώματος.

Αν το σώμα είναι **ομοιογενές** (δηλαδή έχει σταθερή πυκνότητα), τότε οι βαρυτικές του δυνάμεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στον όγκο του.

Τότε η θέση του κέντρου βάρους εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία του σώματος και το κέντρο βάρους συμπίπτει με το γεωμετρικό του κέντρο (**κεντροειδές**).

Αντιθέτως, ο προσδιορισμός της θέσης του κέντρου βάρους σε μη ομοιογενή σώματα (ανομοιογενή) είναι ιδιαίτερα δύσκολος.

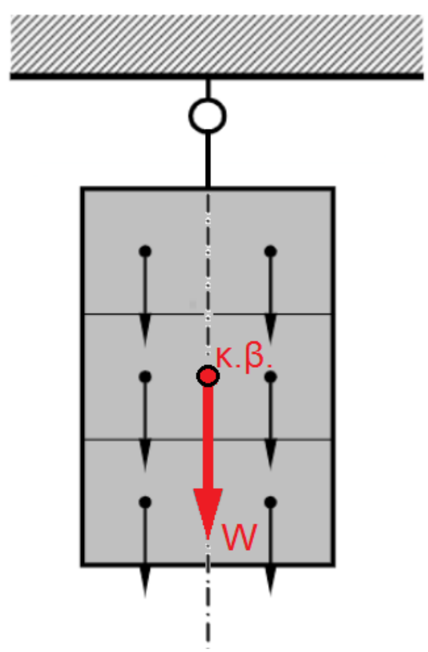


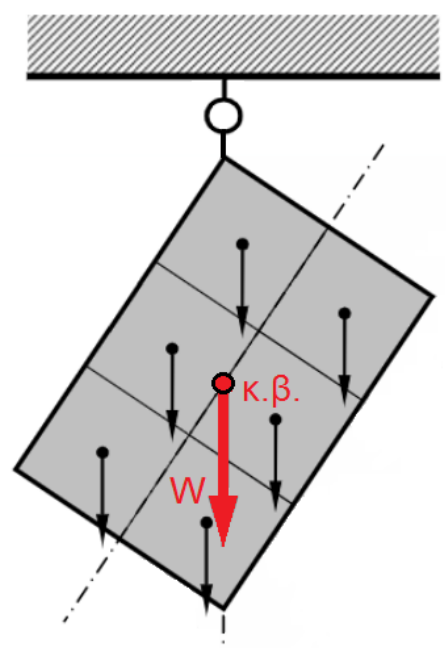
## Κέντρο Βάρους

Κέντρο βάρους ενός σώματος, λοιπόν, ονομάζεται το σημείο εφαρμογής της δύναμης, με την οποία η γη έλκει το σώμα αυτό.

Το **σημείο αυτό παραμένει σταθερό**, όποια θέση κι αν πάρει το σώμα στο χώρο.

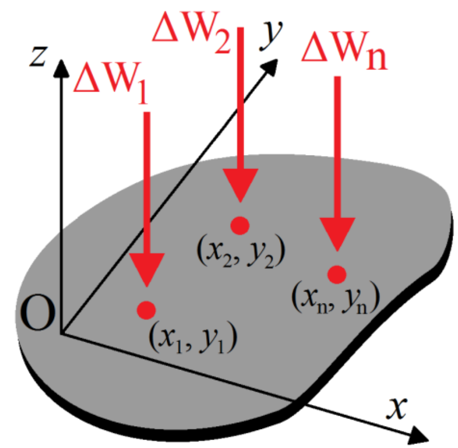
Αν στραφεί το σώμα, οι δυνάμεις στα υλικά σημεία παραμένουν κατακόρυφες, άρα παράλληλες μεταξύ τους, και θα έχουν την ίδια συνισταμένη W.



## Κέντρο βάρους δισδιάστατου σώματος

Έστω οριζόντια επίπεδη πλάκα ομοιόμορφου πάχους ***t*** (Σχήμα) που αποτελείται από ***n*** στοιχεία με συντεταγμένες ($x_1$, $y_1$), ($x_2$, $y_2$) κτλ. Οι δυνάμεις που ασκούνται από τη γη στα στοιχεία αυτά είναι $\Delta W_1$, $\Delta W_2$, …, $\Delta W_n$.




Θεωρούμε για πρακτικούς λόγους ότι οι δυνάμεις αυτές είναι περίπου παράλληλες, άρα η συνισταμένη τους είναι:

$$\boxed{W = \Delta W_1 + \Delta W_n + \ldots + \Delta W_n}$$

**Varignon :**

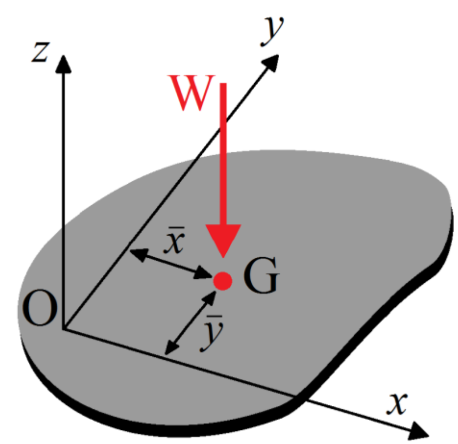
$$\Sigma M_y = 0 \Rightarrow W\bar{x} = x_1 \Delta W_1 + x_2 \Delta W_2 + \ldots + x_n \Delta W_n$$

$$\Sigma M_x = 0 \Rightarrow W\bar{y} = y_1 \Delta W_1 + y_2 \Delta W_2 + \ldots + y_n \Delta W_n$$

Άρα οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους G είναι:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_1 \Delta W_1 + x_2 \Delta W_2 + \ldots + x_n \Delta W_n}{W}}$$

$$\boxed{\bar{y} = \frac{y_1 \Delta W_1 + y_2 \Delta W_2 + \ldots + y_n \Delta W_n}{W}}$$



## Κεντροειδές Επιφάνειας

Αν αυξήσουμε τον αριθμό των στοιχείων στα οποία διαιρείται το σώμα και μειώσουμε το μέγεθος κάθε στοιχείου, τότε προκύπτουν ανάλογες εκφράσεις με μορφή ολοκληρωμάτων:

$$\boxed{W = \int dW} \quad \boxed{\bar{x} = \frac{\int x\, dW}{W}} \quad \boxed{\bar{y} = \frac{\int y\, dW}{W}}$$

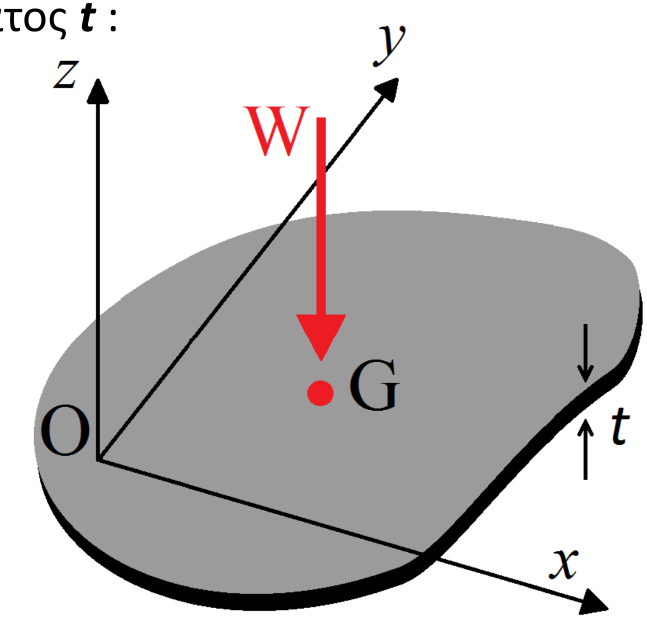
Σε περίπτωση επίπεδης ομογενούς πλάκας με σταθερό πλάτος ***t*** :

$$\boxed{\Delta W = \gamma t \Delta A} \quad \boxed{W = \gamma t A}$$

όπου: ***γ*** είναι το ειδικό βάρος του υλικού (N/m$^3$)

***ΔA*** είναι το εμβαδόν του στοιχείου

***A*** είναι το ολικό εμβαδόν της πλάκας




Μετά από αντικατάσταση στις εξισώσεις ροπών έχουμε:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\int x\, dA}{A}} \quad \boxed{\bar{y} = \frac{\int y\, dA}{A}}$$

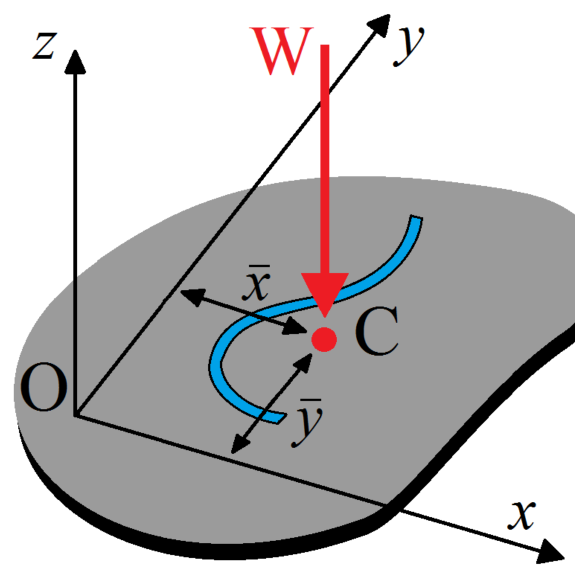
## Κεντροειδές Επιφάνειας

Οι συντεταγμένες αυτές $(\bar{x}, \bar{y})$ αναφέρονται στο **κεντροειδές *C*** ή **γεωμετρικό κέντρο** της επιφάνειας.

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dA}{A} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dA}{A}$$

Αν το υλικό δεν είναι ομοιογενές, τότε οι παραπάνω εξισώσεις δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον προσδιορισμό του κεντροειδούς, αλλά εξακολουθούν να προσδιορίζουν το γεωμετρικό κέντρο.

Οι ίδιες εξισώσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για ένα συρματόσχοινο που βρίσκεται στο επίπεδο *xy*, το κέντρο βάρους του οποίου συμπίπτει με το κεντροειδές της γραμμής ***L*** και συνήθως δεν βρίσκεται πάνω στο σώμα.




$$\bar{x} = \frac{\int x\, dL}{L} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dL}{L}$$

## Πρωτοβάθμια Ροπή Επιφάνειας

Στις εξισώσεις του κεντροειδούς επιφάνειας, τα ολοκληρώματα $\int xdA$ και $\int ydA$ είναι γνωστά ως **πρωτοβάθμιες ροπές της επιφάνειας** ως προς τους άξονες *y* και *x* αντίστοιχα.

$$\boxed{Q_x = \int y\ dA} \quad \boxed{Q_y = \int x\ dA}$$

Άρα οι πρωτοβάθμιες ροπές μπορούν να εκφραστούν ως τα γινόμενα του εμβαδού της επιφάνειας με τις συντεταγμένες του κεντροειδούς:

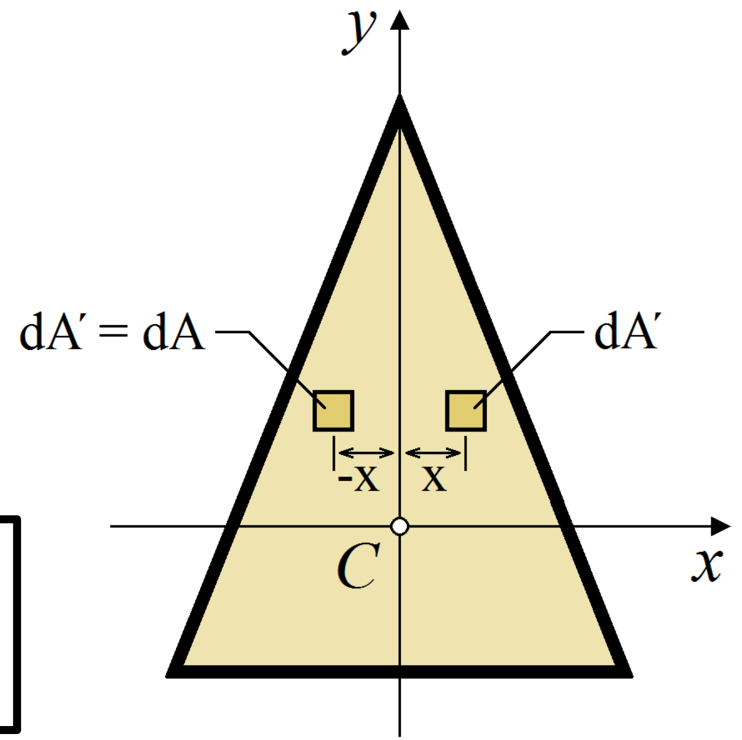
$$\bar{x} = \frac{\int x\ dA}{A} \Rightarrow \bar{x} = \frac{Q_y}{A} \Rightarrow \boxed{Q_y = \bar{x}A} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\ dA}{A} \Rightarrow \bar{y} = \frac{Q_x}{A} \Rightarrow \boxed{Q_x = \bar{y}A}$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις είναι προφανές ότι μπορούμε να βρούμε τις συντεταγμένες του κεντροειδούς μιας επιφάνειας διαιρώντας τις πρωτοβάθμιες ροπές της επιφάνειας με την ίδια την επιφάνεια.

## Πρωτοβάθμια Ροπή Συμμετρικών Επιφανειών

**Επιφάνειες με έναν άξονα συμμετρίας (ισοσκελές τρίγωνο, ισοσκελές τραπέζιο, κτλ).**

- Αν *y* είναι ο άξονας συμμετρίας (βλέπε σχήμα), τότε αυτός διαχωρίζει την επιφάνεια σε δύο ίσες υποεπιφάνειες.
- Για κάθε στοιχείο *dA* στη μία επιφάνεια θα υπάρχει το συμμετρικό του με ίσο εμβαδόν.
- Αθροίζοντας σε όλη την επιφάνεια τα *dA*·*x* και *dA*·(-*x*) προκύπτει μηδενικό αποτέλεσμα.




| | | | |
|---|---|---|---|
| *x* - άξονας συμμετρίας | $\rightarrow$ | $Q_x = 0$ , | $Q_y \neq 0$ |
| *y* - άξονας συμμετρίας | $\rightarrow$ | $Q_y = 0$ , | $Q_x \neq 0$ |

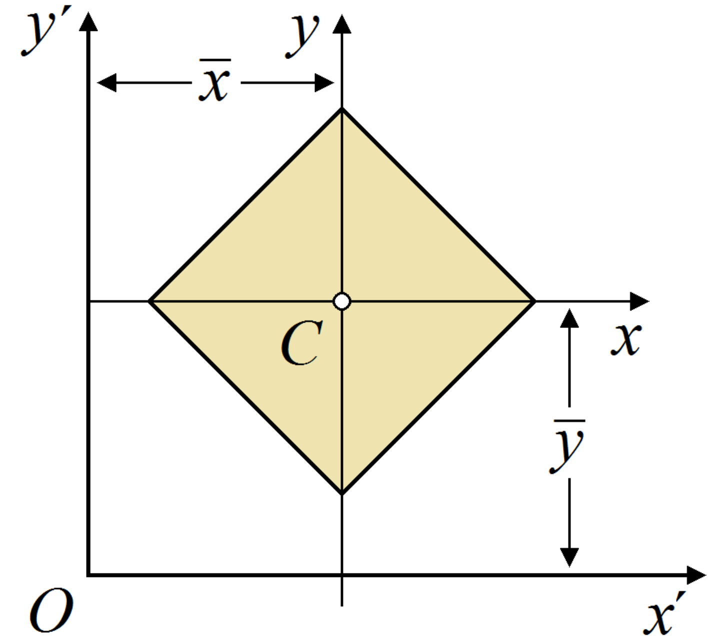
**Κάθε επιφάνεια με έναν άξονα συμμετρίας, έχει μηδενική πρωτοβάθμια ροπή ως προς τον άξονα αυτό.**

## Πρωτοβάθμια Ροπή Συμμετρικών Επιφανειών

**Επιφάνειες με δύο άξονες συμμετρίας (κύκλος, έλλειψη, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ισόπλευρο τρίγωνο κτλ).**

$x$ - άξονας συμμετρίας $\rightarrow$ $Q_x = 0$ , $Q_y = 0$

$y$ - άξονας συμμετρίας $\rightarrow$ $Q_y = 0$ , $Q_x = 0$




**Κάθε επιφάνεια με δύο άξονες συμμετρίας, έχει μηδενικές πρωτοβάθμιες ροπές ως προς τους δύο αυτούς άξονες.**

**Επιφάνειες με κανένα άξονα συμμετρίας.**

Όταν ένας άξονας διαχωρίζει μία επιφάνεια σε δύο άνισες υποεπιφάνειες, τότε οι πρωτοβάθμιες ροπές είναι ετερόσημες.

$A = A_1 + A_2$ $\quad$ $Q_x = Q_x^1 + Q_x^2$

$A_1 \neq A_2$ $\quad$ $Q_x^1 > 0$ , $Q_x^2 < 0$

## Σύνθετες Πλάκες

Σε κάποιες περιπτώσεις, μία πλάκα μπορεί να διαιρεθεί σε απλά γεωμετρικά σχήματα (τρίγωνα, ορθογώνια κλπ).

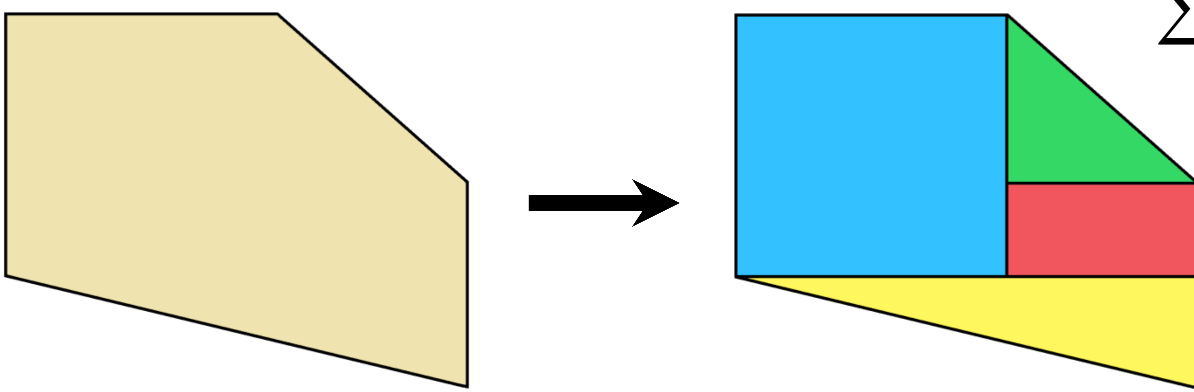
Μπορούμε να προσδιορίσουμε τις συντεταγμένες $(\bar{x}, \bar{y})$ του κέντρου βάρους της πλάκας, εξισώνοντας τη ροπή του βάρους ολόκληρης της πλάκας με το άθροισμα των ροπών των επιμέρους στοιχείων.

$$\sum M_y : \bar{x}\left(W_1 + W_2 + \ldots + W_n\right) = \bar{x}_1 W_1 + \bar{x}_2 W_2 + \ldots + \bar{x}_n W_n$$

$$\sum M_x : \bar{y}\left(W_1 + W_2 + \ldots + W_n\right) = \bar{y}_1 W_1 + \bar{y}_2 W_2 + \ldots + \bar{y}_n W_n$$

$$\rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i W_i}{W}} \quad \boxed{\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i W_i}{W}}$$

$$\sum W_i = W$$



## Σύνθετες Πλάκες

Αν η πλάκα είναι ομοιογενής και ομοιόμορφου πάχους, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις πρωτοβάθμιες ροπές $\boldsymbol{Q_x}$ και $\boldsymbol{Q_y}$ της επιφάνειας.

$$Q_x = \bar{y}\left(A_1 + A_2 + \ldots + A_n\right) = \bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 + \ldots + \bar{y}_n A_n$$

$$Q_y = \bar{x}\left(A_1 + A_2 + \ldots + A_n\right) = \bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \ldots + \bar{x}_n A_n$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} Q_x &= \bar{y}\sum A_i = \sum \bar{y}_i A_i \\ Q_y &= \bar{x}\sum A_i = \sum \bar{x}_i A_i \end{aligned}}$$

Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό των συντεταγμένων $(\bar{x}, \bar{y})$ του κεντροειδούς της επιφάνειας.

$$\bar{x}\sum A_i = \sum \bar{x}_i A_i \Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i A_i}{\sum A_i}$$

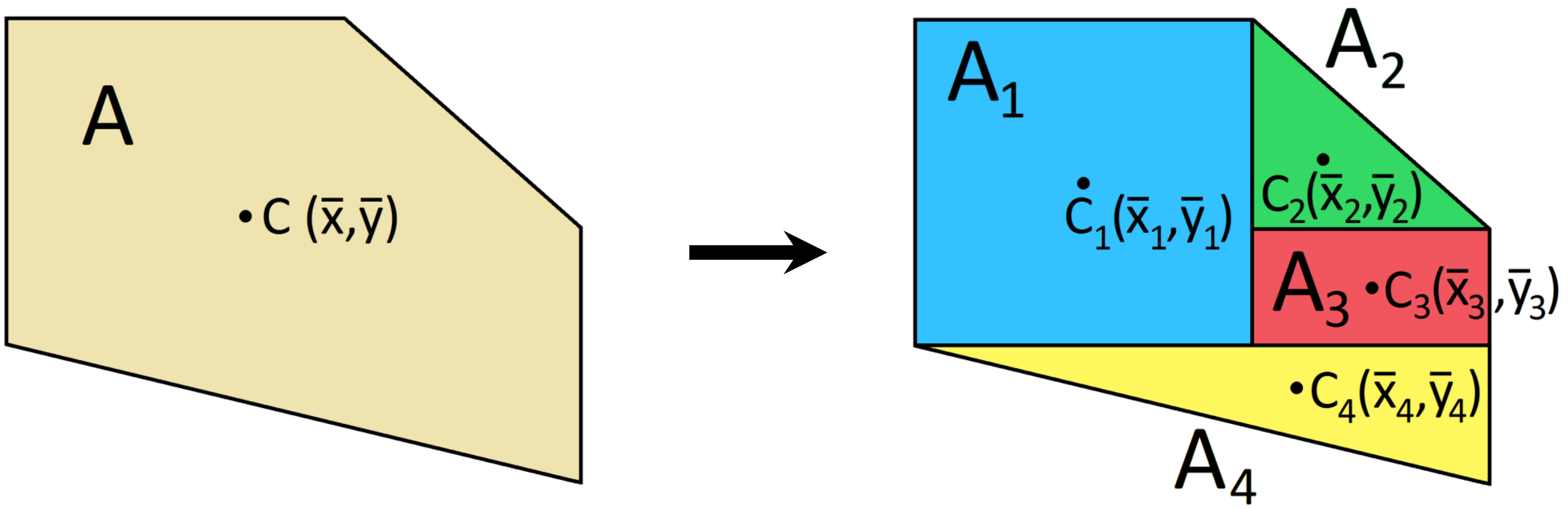
$$\bar{y}\sum A_i = \sum \bar{y}_i A_i \Rightarrow \bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i}$$

$$\xrightarrow{\sum A_i = A} \boxed{\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i A_i}{A} \qquad \bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{A}}$$

## Σύνθετες Πλάκες

**Παράδειγμα**

Οι συντεταγμένες $(\bar{x}, \bar{y})$ του κέντρου βάρους της πλάκας επιφάνειας A μπορούν να προσδιοριστούν αν χωρίσουμε την πλάκα σε επιμέρους τμήματα ως εξής:

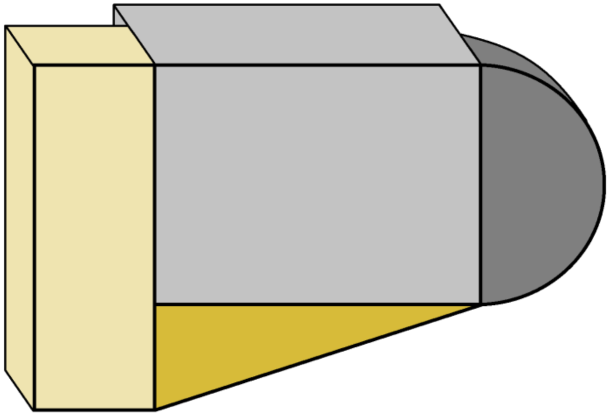



$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i A_i}{A} = \frac{\bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \bar{x}_3 A_3 + \bar{x}_4 A_4}{A} \qquad \bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{A} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 + \bar{y}_3 A_3 + \bar{y}_4 A_4}{A}$$

## Σύνθετες Πλάκες

Αν η πλάκα δεν είναι ομοιογενής αλλά αποτελείται από διαφορετικές επιμέρους πλάκες με εμβαδόν $\boldsymbol{A_i}$ και έχουν ειδικά βάρη $\boldsymbol{\gamma_i}$ (ή πυκνότητες $\boldsymbol{\rho_i}$) και διαφορετικά πάχη $\boldsymbol{t_i}$ (ομοιόμορφα ανά επιμέρους πλάκα), τότε το βάρος της καθεμίας από τις επιμέρους πλάκες είναι:

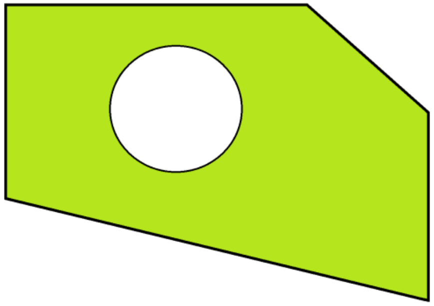
$$\boxed{W_i = \gamma_i A_i t_i}$$



Οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους όλης της σύνθετης πλάκας είναι:

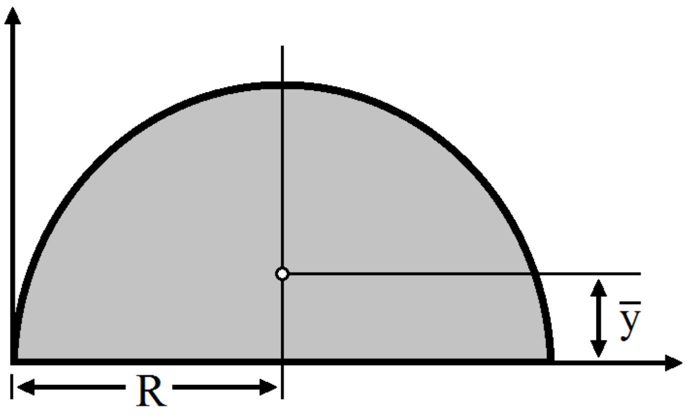
$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i \gamma_i A_i t_i}{\sum \gamma_i A_i t_i} \quad \bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i \gamma_i A_i t_i}{\sum \gamma_i A_i t_i}}$$

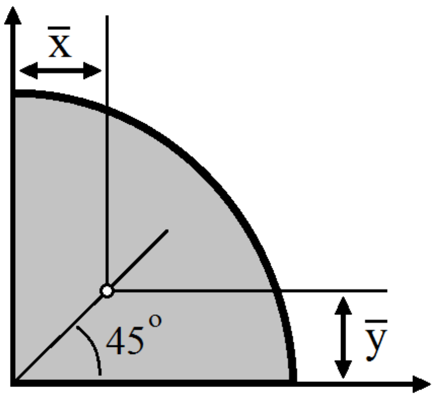
Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στο πρόσημο μίας επιφάνειας που έχει αφαιρεθεί, η οποία πρέπει να υπολογιστεί με (-) στο εμβαδόν της και στα γινόμενα που αυτό εμπλέκεται.



# Κέντρο βάρους κλασσικών γεωμετρικών στοιχείων

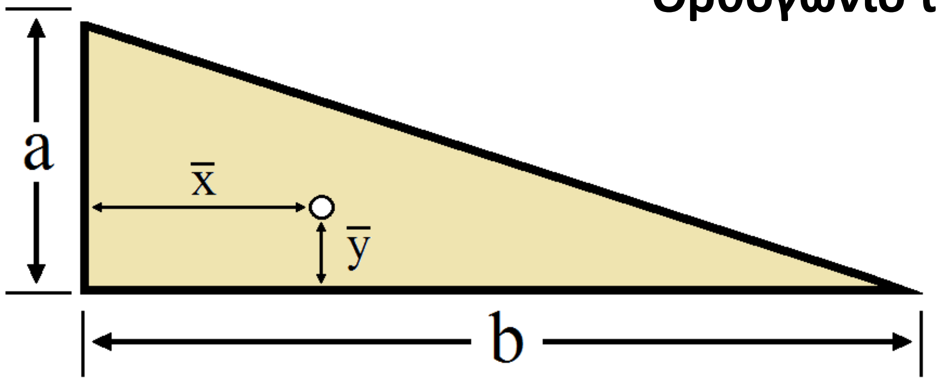
## Ημικύκλιο - Τεταρτοκύκλιο




$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$$

## Ορθογώνιο τρίγωνο




$$\bar{x} = \frac{b}{3}$$

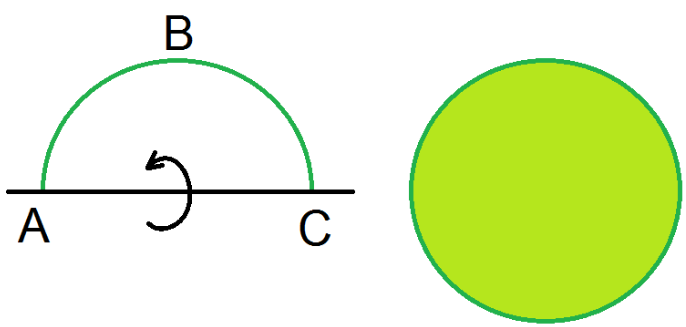
$$\bar{y} = \frac{a}{3}$$

## Θεωρήματα Πάππου

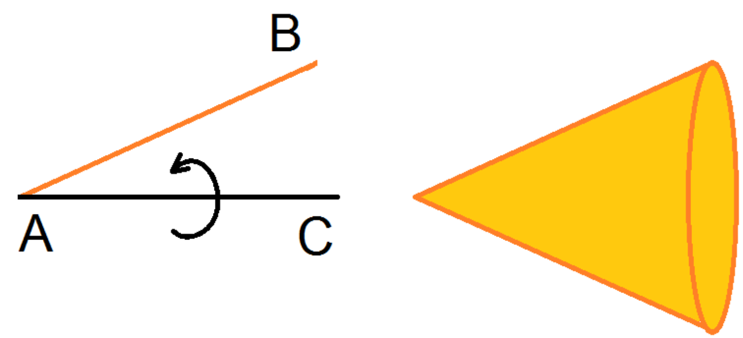
Τα θεωρήματα αυτά διατυπώθηκαν από τον Έλληνα Μαθηματικό Πάππο τον $3^{ο}$ αιώνα μ. Χ., και αφορούν **επιφάνειες** οι οποίες παράγονται από **περιστροφή μίας γραμμής** ως προς κάποιον κατάλληλο άξονα.

Επίσης αφορούν **όγκους** που προέρχονται από την **περιστροφή μίας επιφάνειας**.

Μία **επιφάνεια εκ περιστροφής** είναι μία επιφάνεια η οποία προέρχεται από την **περιστροφή μίας ευθείας ή μίας καμπύλης γύρω από ένα σταθερό άξονα**.



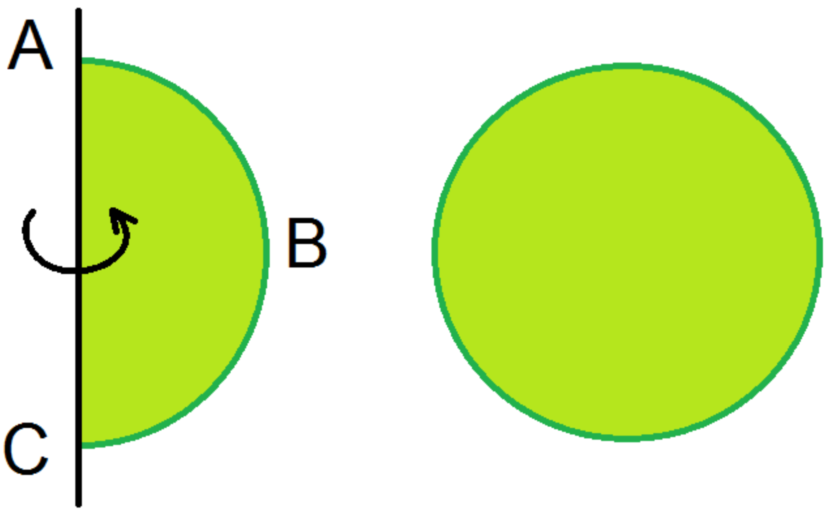

**Παράπλευρη επιφάνεια σφαίρας:** Προκύπτει από περιστροφή της επίπεδης καμπύλης **ABC** γύρω από τη διάμετρο **AC**.

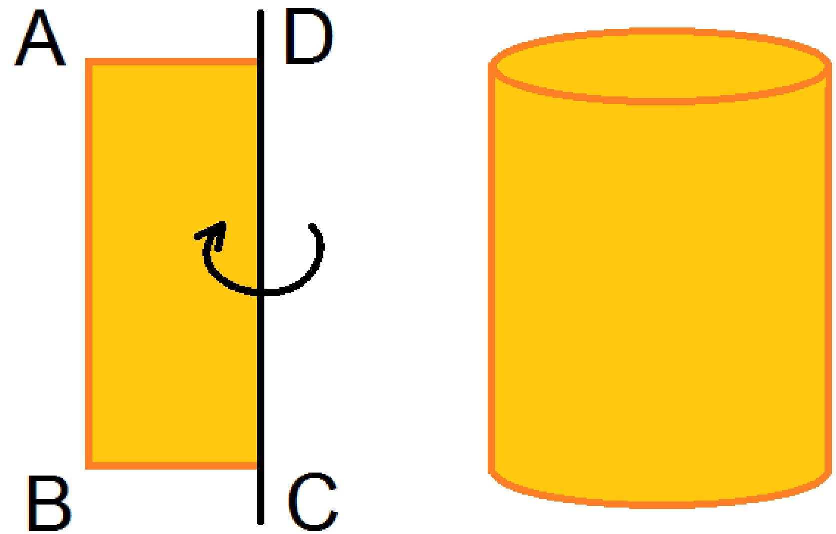



**Παράπλευρη επιφάνεια κώνου:** Προκύπτει από την περιστροφή της ευθείας **AB** γύρω από τον άξονα **AC**.

## Θεωρήματα Πάππου

Ένας **όγκος εκ περιστροφής** μπορεί να προκύψει από την κατάλληλη **περιστροφή μίας επιφάνειας**.




**Όγκος σφαίρας:**
Προκύπτει από την περιστροφή του ημικυκλίου **ABC** γύρω από τον άξονα **AC**.

**Όγκος κυλίνδρου:**
Προκύπτει από την περιστροφή του ορθογωνίου **ABCD** γύρω από τον άξονα **CD**.

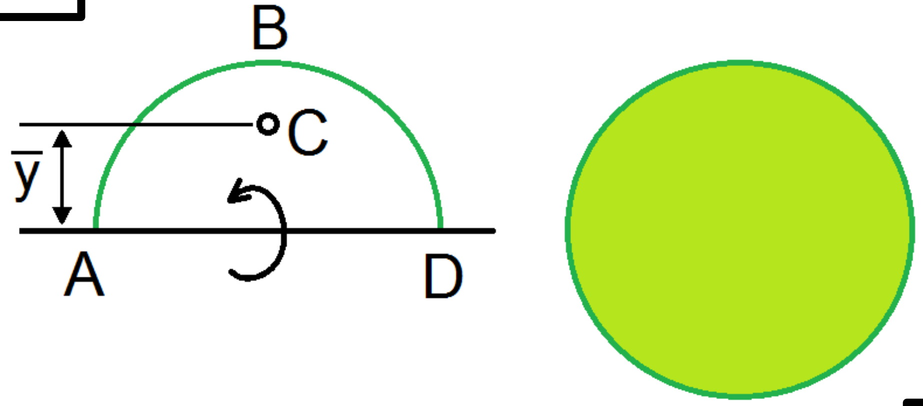
## Θεωρήματα Πάππου

**1ο Θεώρημα Πάππου:**

Το εμβαδόν της επιφάνειας εκ περιστροφής ισούται με το **γινόμενο του μήκους της γενέτειρας καμπύλης επί την περίμετρο που διαγράφει το κεντροειδές της καμπύλης** αυτής καθώς παράγεται η επιφάνεια.

Αν η περιστροφή γίνεται ως προς τον άξονα x:

$$\boxed{A_x = \left(2\pi \bar{y}\right) \cdot L}$$ = περίμετρος κεντροειδούς επί το μήκος της καμπύλης




Αντίθετα, αν η περιστροφή γίνεται ως προς τον άξονα y: $\boxed{A_y = \left(2\pi \bar{x}\right) \cdot L}$

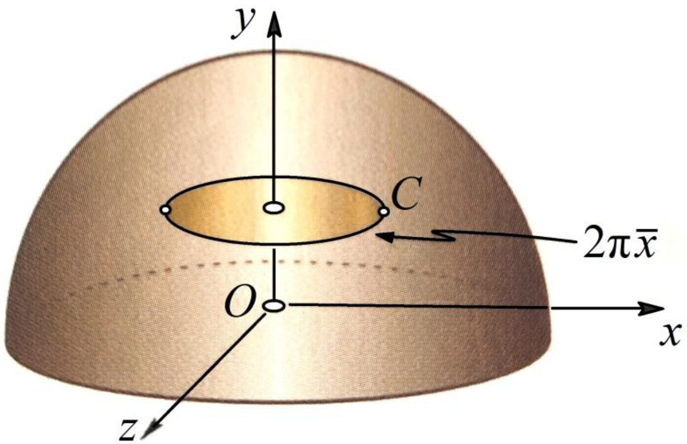
## Θεωρήματα Πάππου

**2ο Θεώρημα Πάππου:**

Ο παραγόμενος όγκος από την περιστροφή μίας γενέτειρας επίπεδης επιφάνειας ισούται με το **γινόμενο του εμβαδού της επί την περίμετρο που διαγράφει κατά την περιστροφή το κεντροειδές της επιφάνειας** αυτής.

Αν η περιστροφή γίνεται ως προς τον άξονα x:

$$\boxed{V_x = \left(2\pi \bar{y}\right) \cdot A}$$ = περίμετρος κεντροειδούς επί το εμβαδό της επιφάνειας




Αντίθετα, αν η περιστροφή γίνεται ως προς τον άξονα y: $$\boxed{V_y = \left(2\pi \bar{x}\right) \cdot A}$$

## Θεωρήματα Πάππου

**Σημείωση:** Τα θεωρήματα Πάππου δεν έχουν εφαρμογή αν ο άξονας περιστροφής τέμνει τη γενέτειρα καμπύλη ή τη γενέτειρα επιφάνεια.

Τα θεωρήματα Πάππου είναι ιδιαίτερα εύχρηστα στις εξής περιπτώσεις:

1. Για τον **υπολογισμό παράπλευρων επιφανειών** εκ περιστροφής, καθώς και τον **υπολογισμό των όγκων σωμάτων** που προέρχονται από την περιστροφή επιφάνειας.
2. Για τον **προσδιορισμό του κεντροειδούς μίας επίπεδης καμπύλης**, όταν είναι γνωστό μέσω τύπων Γεωμετρίας το εμβαδό της παραγόμενης παράπλευρης επιφάνειας.
3. Για τον **προσδιορισμό του κεντροειδούς μίας** επιφάνειας, όταν είναι γνωστός μέσω τύπων Γεωμετρίας ο παραγόμενος από την περιστροφή όγκος.

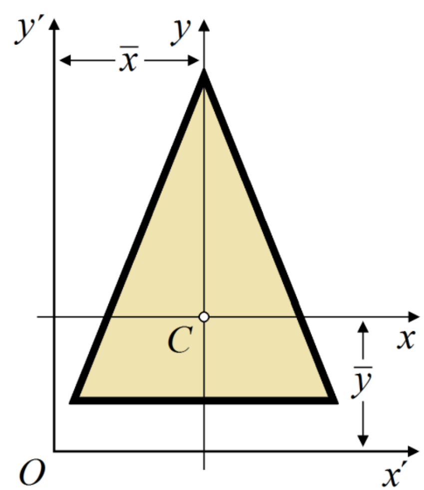
## Ροπές Αδράνειας Επιφάνειας

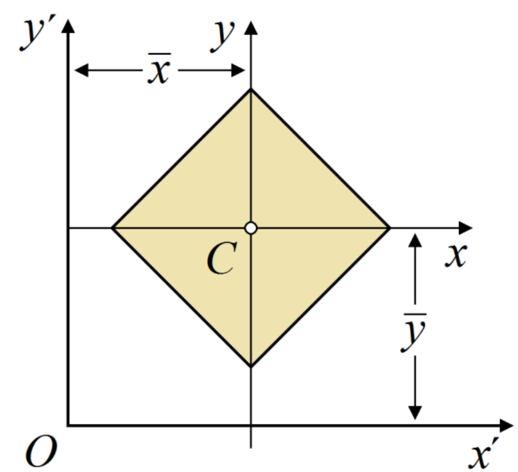
Οι **ροπές αδράνειας μιας επιφάνειας** εντάσσονται στα **γεωμετρικά στοιχεία** της επιφάνειας. Αναφέρονται ως προς οποιοδήποτε άξονα, κυρίως όμως ενδιαφέρουν οι ροπές αδράνειας ως προς τους κεντροβαρικούς άξονες.

**Κεντροβαρικοί άξονες** είναι αυτοί ως προς τους οποίους η πρωτοβάθμια ροπή επιφάνειας μηδενίζεται, δηλαδή οι άξονες που περνούν από το κέντρο βάρους της επιφάνειας.

Όταν μία επίπεδη επιφάνεια έχει **έναν άξονα συμμετρίας**, το κέντρο βάρους της βρίσκεται πάνω σε αυτό τον άξονα.

Όταν μία επίπεδη επιφάνεια έχει **περισσότερους από έναν άξονες συμμετρίας**, το κέντρο βάρους της βρίσκεται στην τομή των αξόνων αυτών.



## Ροπές Αδράνειας Επιφάνειας

**Πρωτοβάθμια ροπή επιφάνειας** είναι το γινόμενο του εμβαδού της επιφάνειας επί την απόσταση του κέντρου βάρους της από τον άξονα αυτό.

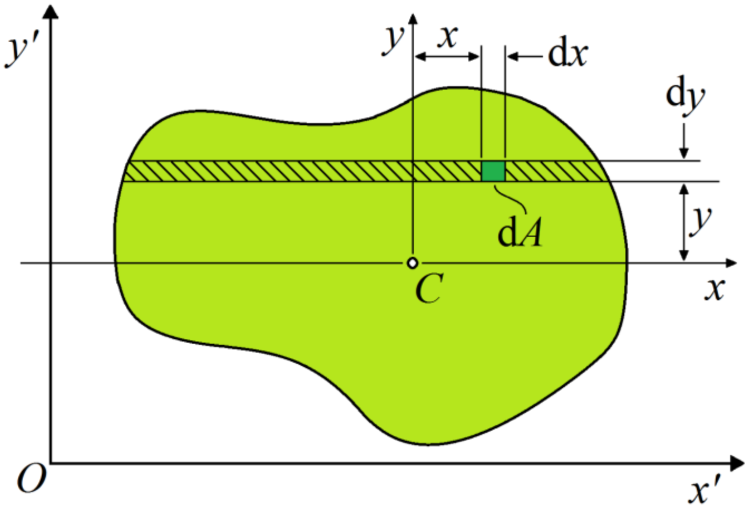
$$Q_x = \int_A y \, dA \qquad Q_y = \int_A x \, dA$$

**Δευτεροβάθμια ροπή** ή **Ροπή Αδράνειας Επιφάνειας** ονομάζεται το όριο της ροπής αδράνειας ενός λεπτού σώματος που το πάχος του τείνει στο μηδέν και έχει ομοιόμορφη μάζα.

Η **ροπή αδράνειας (Moment of Inertia)** μίας στοιχειώδους επιφάνειας **d*A*** ως προς άξονα ***x*** του επιπέδου της, ορίζεται ως:

$$dI_x = y^2 dA$$

όπου ***y*** είναι η απόσταση της στοιχειώδους επιφάνειας από τον άξονα ***x***.



## Ροπές Αδράνειας Επιφάνειας

Η **Ροπή Αδράνειας επίπεδης επιφάνειας** ως προς άξονα εκφράζει την αντίσταση της επιφάνειας στην περιστροφική κίνηση γύρω από τον άξονα αυτό.

Οι **ροπές αδράνειας** $\boldsymbol{I_x}$ και $\boldsymbol{I_y}$ μίας επιφάνειας ***A***, η οποία αποτελείται από πολλές μικρότερες στοιχειώδεις επιφάνειες **d*A***, προκύπτουν από τα επιφανειακά ολοκληρώματα:

$$\boxed{I_x = \int_A y^2 \; dA} \qquad \boxed{I_y = \int_A x^2 \; dA}$$

- Άρα η **ροπή αδράνειας** μίας επιφάνειας ως προς άξονα ονομάζεται το άθροισμα των γινομένων των επιμέρους στοιχειωδών επιφανειών επί τα τετράγωνα των αποστάσεων τους από τον άξονα περιστροφής.
- Οι $\boldsymbol{I_x}$ και $\boldsymbol{I_y}$ είναι πάντα θετικές, αφού τα γινόμενα $\boldsymbol{x^2 dA}$ και $\boldsymbol{y^2 dA}$ είναι πάντα θετικά (ανεξάρτητα από το πρόσημο των ***x***, ***y***) ή μηδενικά αν οι αποστάσεις είναι ίσες με μηδέν.
- Έχουν μονάδες $\mathbf{m^4}$, $\mathbf{cm^4}$, $\mathbf{mm^4}$ κλπ.

## Ροπές Αδράνειας Επιφάνειας

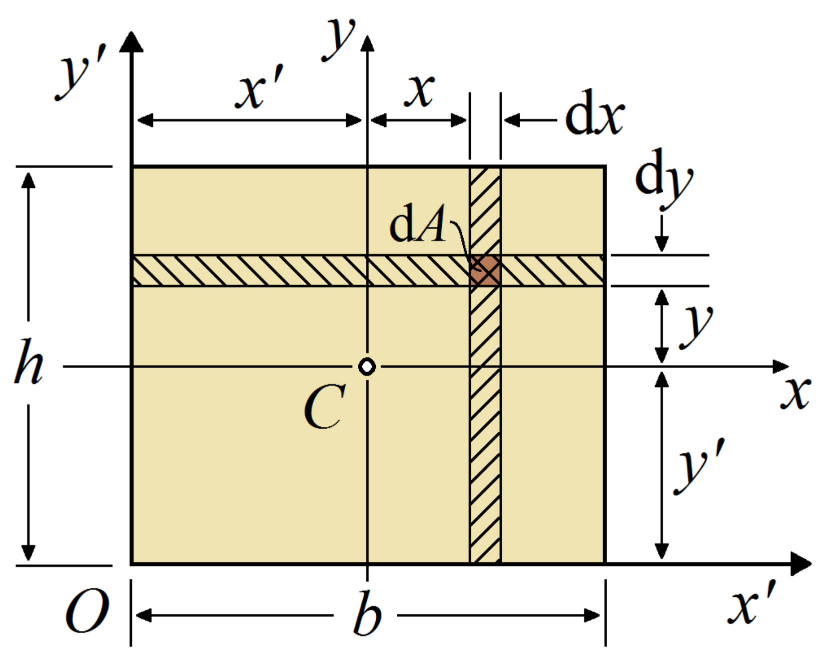
Σε στοιχειώδη επιφάνεια **d*A* = d*x*·d*y*** η ροπή αδράνειας **d*Ix*** ως προς τον άξονα ***x*** του ορθογωνίου ***b*×*h*** είναι:

$$\boxed{dI_x = y^2 dA}$$

Η ροπή αδράνειας ολόκληρου του ορθογωνίου βρίσκεται έπειτα από ολοκλήρωση στους άξονες ***x*** και ***y***:

$$I_x = \iint y^2 dx \cdot dy = \int_{-b/2}^{b/2} \left[ \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy \right] dx \Rightarrow$$

$$I_x = \int_{-b/2}^{b/2} \left[ \frac{y^3}{3} \Bigg|_{-h/2}^{h/2} \right] dx \Rightarrow \boxed{I_x = \frac{bh^3}{12}}$$




Για να αποφύγουμε τη διπλή ολοκλήρωση μπορούμε να θεωρήσουμε λωρίδα πάχους **d*y*** παράλληλη του άξονα ***x***.

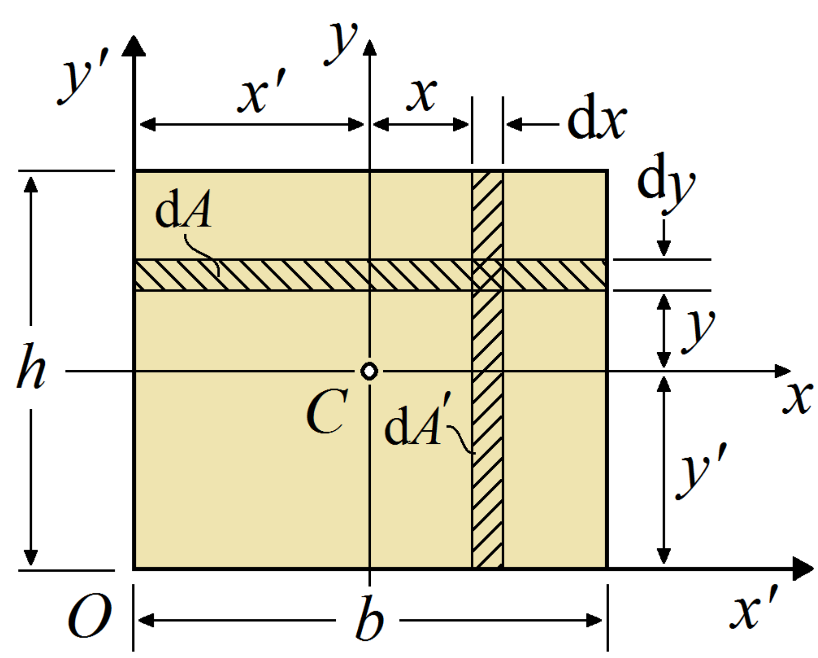
## Ροπές Αδράνειας Επιφάνειας

Αν η λωρίδα έχει σταθερό πλάτος όπως στο ορθογώνιο, τότε **d*A* = *b*·dy** , άρα με ολοκλήρωση από –*h*/2 έως *h*/2 έχουμε:

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b\, dy = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2\, dy = b \left.\frac{y^3}{3}\right|_{-h/2}^{h/2} \Rightarrow \boxed{I_x = \frac{bh^3}{12}}$$

Αντίστοιχα για τη ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα ***y*** όπου **d*A'* = *h*·d*x*** έχουμε:

$$\boxed{I_y = \frac{b^3 h}{12}}$$




Ομοίως μπορούν να υπολογιστούν οι ροπές αδράνειας $I_x$ και $I_y$ πολλών επιφανειών.

# Τεχνική Μηχανική

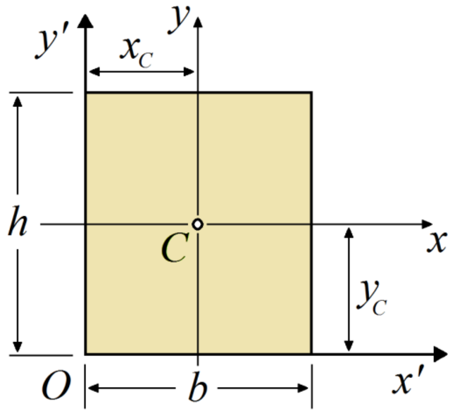


## Ροπές Αδράνειας Επιφανειών

### Ορθογώνιο:

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

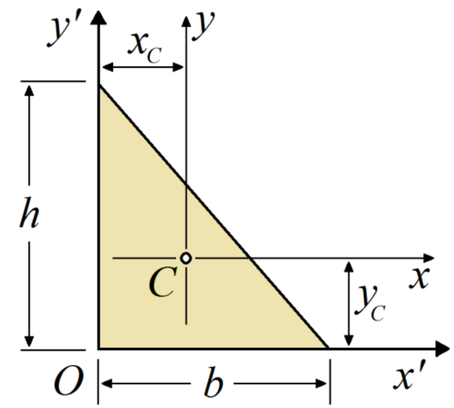
$$I_y = \frac{b^3h}{12}$$




### Ορθογώνιο τρίγωνο:

$$I_x = \frac{bh^3}{36}$$

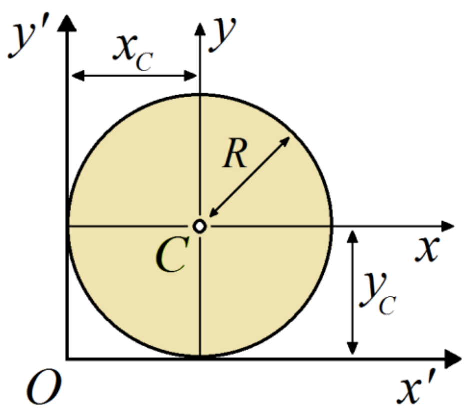
$$I_y = \frac{b^3h}{36}$$




### Κύκλος:

$$I_x = \frac{\pi R^4}{4}$$

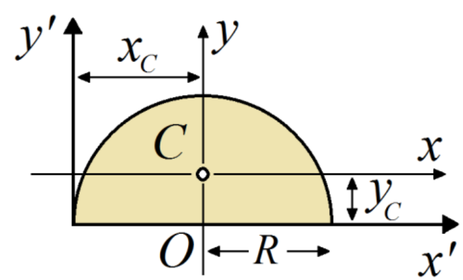
$$I_y = \frac{\pi R^4}{4}$$




### Ημικύκλιο:

$$I_x = 0{,}11R^4$$

$$I_y = \frac{\pi R^4}{8}$$



## Βιβλιογραφία


- Τεχνική Μηχανική - Στατική, Beer F, Johnston R, Mazurek D, $11^{η}$ έκδοση, Εκδόσεις Τζιόλα, 2018.
- Στατική - Μηχανική του Απαραμόρφωτου Στερεού, Π. Βουθούνης, $6^{η}$ έκδοση, Εκδόσεις Α. Βουθούνη, 2017.
- Στατική και Αντοχή Υλικών, Α. Πολυζάκης, 2017.