«Εφαρμοσμένη Υδραυλική»

Χρήση του διαγράμματος Moody

Κλειστοί Αγωγοί

Λευθεριώτης Γεώργιος
Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος
Πανεπιστήμιο Πατρών

Το διάγραμμα Moody χρησιμοποιείται ευρέως για τον γραφικό προσδιορισμό του συντελεστή τριβών *f* όταν είναι γνωστή η τραχύτητα *ε* και η διάμετρος *D* ενός αγωγού, όπως επίσης και ο αριθμός Reynolds.

Η χρήση του διαγράμματος Moody περιγράφεται σύντομα ως εξής:

- Από γνωστή τιμή του αριθμού Re κινούμαστε κατακόρυφα προς τα πάνω μέχρι να συναντήσουμε την καμπύλη που αντιστοιχεί σε δεδομένη τιμή του λόγου ε/D.
- Από το σημείο τομής, κινούμαστε ευθεία προς τα αριστερά μέχρι τον άξονα του συντελεστή *f* όπου διαβάζουμε την τιμή του.

Σημείωση: Όταν η τιμή του ε/D δεν ταυτίζεται με τις γραμμές του διαγράμματος κάνουμε γραμμική παρεμβολή ή υπολογίζουμε με το μάτι τη θέση της καμπύλης.

Στις επόμενες διαφάνειες δίδονται παραδείγματα για τον γραφικό προσδιορισμό του συντελεστή τριβών *f* με χρήση του διαγράμματος Moody.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί με χρήση του διαγράμματος Moody ο συντελεστή τριβών f και οι γραμμικές απώλειες στον αγωγό για τα εξής δεδομένα:

- Ταχύτητα ροής : V = 3 m/s
- Διάμετρος αγωγού : D = 20 cm
- Μήκος αγωγού : L = 30 m
- Τραχύτητα αγωγού : ε = 0,2 mm
- Κινηματικό ιξώδες : $\nu = 1{,}02 \times 10^{-6}$ m^2/s

Για να κάνουμε χρήση του διαγράμματος Moody χρειαζόμαστε τις τιμές του αριθμού Reynolds και του λόγου ε/D.

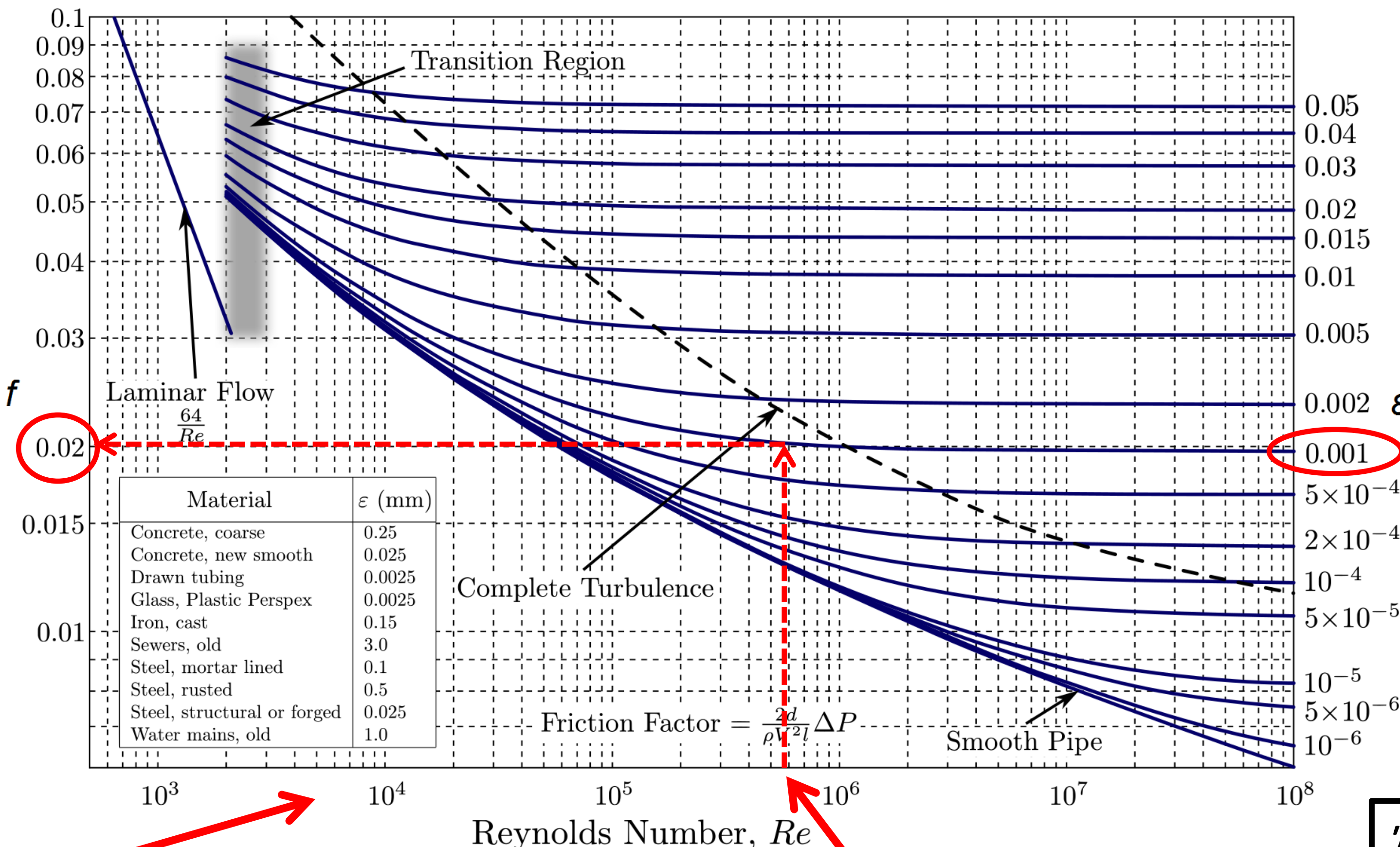
$$\mathrm{Re} = \frac{V \cdot D}{\nu} = \frac{3\,m/s \cdot 0{,}2m}{1{,}02\times10^{-6}\,m^2/s} \Rightarrow \mathrm{Re} = 588235$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0{,}2\times10^{-3}m}{0{,}2m} = 0{,}001$$

Προσοχή οι μονάδες να είναι ίδιες

Εφαρμοσμένη Υδραυλική

Βρίσκουμε την τιμή του αριθμού **Re = 588235** και κινούμαστε κατακόρυφα προς τα πάνω μέχρι να συναντήσουμε την καμπύλη ***ε/D* = 0,001**. Μετά κινούμαστε ευθεία προς τα αριστερά μέχρι τον άξονα του συντελεστή *f*.



***ε/D* = 0,001**

Re = 588235

Λογαριθμικός άξονας, βλέπε τελευταία σελίδα

Άρα *f* = 0.02

Η συγκεκριμένη διαδικασία εύρεσης του συντελεστή τριβών *f* θα ακολουθείται στα **προβλήματα τύπου I**, δηλαδή όταν είναι γνωστή η **παροχή *Q*** ή η **ταχύτητα *V*** και ζητούνται οι γραμμικές απώλειες h_f στον αγωγό.

Αν για παράδειγμα αντί για την ταχύτητα μας δινόταν η **παροχή *Q* = 0,0942 m³/s**, τότε θα έπρεπε να υπολογίσουμε αρχικά την ταχύτητα από την εξίσωση της συνέχειας:

$$Q = V \cdot A \Rightarrow V = \frac{Q}{A} \Rightarrow V = \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}} \Rightarrow V = \frac{4Q}{\pi D^2} \Rightarrow V = \frac{4 \cdot 0,0942}{\pi \cdot 0,2^2} \Rightarrow \boxed{V = 3\ m/s}$$

Αφού έχουμε βρει την ταχύτητα, υπολογίζουμε τον αριθμό Re και να συνεχίσουμε όπως στις διαφάνειες 3-4 για τον υπολογισμό του συντελεστή τριβών *f* μέσω του διαγράμματος Moody.

Αφού έχει βρεθεί το *f* μπορούμε να υπολογίσουμε τις γραμμικές απώλειες από την εξίσωση Darcy-Weisbach:

$$h_f = f\,\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = 0,02\,\frac{30}{0,2}\,\frac{3^2}{2 \cdot 9,81} \Rightarrow \boxed{h_f = 1,37\ m}$$

Παράδειγμα 2

Στο παράδειγμα αυτό περιγράφεται η διαδικασία που χρησιμοποιείται στα **προβλήματα τύπου II**, δηλαδή όταν είναι γνωστές οι γραμμικές απώλειες h_f και ζητείται η ταχύτητα V ή η παροχή Q.

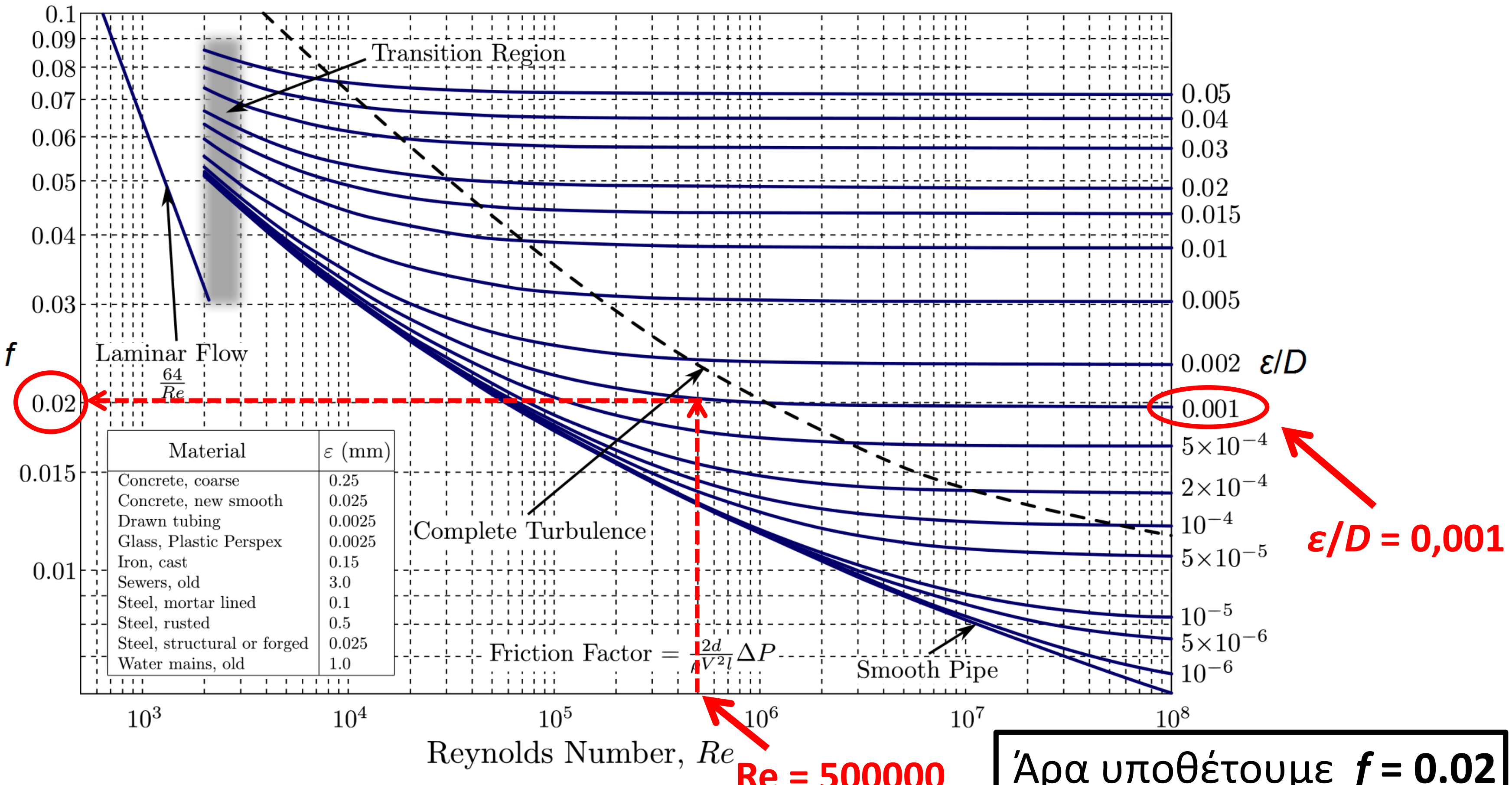
Να βρεθεί με χρήση του διαγράμματος Moody **η ταχύτητα *V*** και **η παροχή *Q*** στον αγωγό για τα εξής δεδομένα:

- Διάμετρος αγωγού : D = 20 cm
- Μήκος αγωγού : L = 30 m
- Γραμμικές απώλειες : h_f = 1,37 m
- Τραχύτητα αγωγού : ε = 0,2 mm
- Κινηματικό ιξώδες : $\nu = 1{,}02 \times 10^{-6}$ m²/s

Τα ίδια δεδομένα με πριν, απλά αντί για την παροχή Q ή την ταχύτητα V, δίνονται οι γραμμικές απώλειες $\underline{h_f}$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν έχουμε ταχύτητα για να υπολογίσουμε τον αριθμό Re, άρα θα πρέπει να **εκτιμήσουμε** μία τιμή του συντελεστή τριβών f και μετά να **ελέγξουμε** αν η τιμή αυτή είναι σωστή ή αν θέλει διόρθωση.

Βρίσκουμε το λόγο *ε/D* = 0,001 και επιλέγουμε μία μεγάλη τιμή του αριθμού Re, για τυρβώδη ροή (**δηλαδή εκεί που η καμπύλη γίνεται ευθεία**). Μία καλή εκτίμηση για τις περισσότερες καμπύλες *ε/D* είναι Re = 500000 - 1000000.



Material	ε (mm)
Concrete, coarse	0.25
Concrete, new smooth	0.025
Drawn tubing	0.0025
Glass, Plastic Perspex	0.0025
Iron, cast	0.15
Sewers, old	3.0
Steel, mortar lined	0.1
Steel, rusted	0.5
Steel, structural or forged	0.025
Water mains, old	1.0

Άρα υποθέτουμε ***f*** **= 0.02**

Αφού εκτιμήσαμε την τιμή του συντελεστή τριβών *f* πρέπει να ελέγξουμε αν αυτή είναι σωστή.

Άρα με βάση την τιμή του *f* μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα από την εξίσωση Darcy-Weisbach:

$$h_f = f\,\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \Rightarrow V^2 = \frac{h_f\cdot D\cdot 2g}{f\cdot L} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{h_f\cdot D\cdot 2g}{f\cdot L}} = \sqrt{\frac{1{,}37\cdot 0{,}2\cdot 2\cdot 9{,}81}{0{,}02\cdot 30}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V = 3\ \mathrm{m/s}}$$

Από την ταχύτητα υπολογίζουμε Re: $\mathrm{Re} = \frac{V\cdot D}{\nu} = \frac{3\cdot 0{,}2}{1{,}02\times 10^{-6}} \Rightarrow \mathrm{Re} = 588235$

Πάμε ξανά στο Moody και για **Re = 588235** και ***ε/D* = 0,001** βρίσκουμε νέο *f.*

Στη συγκεκριμένη περίπτωση το νέο *f* μας βγαίνει ίδιο με αυτό που εκτιμήσαμε, άρα η τιμή που υποθέσαμε είναι σωστή. Άρα η τιμή της ταχύτητας είναι ***V* = 3 m/s** και υπολογίζουμε την παροχή από την εξίσωση της συνέχειας:

$$Q = V\cdot A = V\,\frac{\pi D^2}{4} = 3\cdot\frac{\pi\cdot 0{,}2^2}{4} \Rightarrow \boxed{Q = 0{,}0942\ m^3/s}$$

Εφαρμοσμένη Υδραυλική

Αν η τιμή του *f* μας έβγαινε διαφορετική τότε θα έπρεπε να ξανακάνουμε τις πράξεις. Έστω λοιπόν ότι στην αρχή είχαμε υποθέσει ***f* = 0.025**

Με βάση το *f* που εκτιμήσαμε μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα από την εξίσωση Darcy-Weisbach:

$$h_f = f\,\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \Rightarrow V^2 = \frac{h_f \cdot D \cdot 2g}{f \cdot L} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{h_f \cdot D \cdot 2g}{f \cdot L}} = \sqrt{\frac{1,37 \cdot 0,2 \cdot 2 \cdot 9,81}{0,025 \cdot 30}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V = 2,68 \text{ m/s}}$$

Ενώ με βάση την προηγούμενη εκτίμηση η ταχύτητα είχε υπολογιστεί 3 m/s.

Από την ταχύτητα υπολογίζουμε Re: $\mathrm{Re} = \dfrac{V \cdot D}{\nu} = \dfrac{2,68 \cdot 0,2}{1,02 \times 10^{-6}} \Rightarrow \mathrm{Re} = 525490$

Πάμε ξανά στο Moody και για **Re = 525490** και ***ε/D* = 0,001** βρίσκουμε νέο *f*.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση το νέο *f* που βρίσκουμε από το διάγραμμα Moody είναι $\boldsymbol{f_2}$ **= 0,02**. Η τιμή αυτή διαφέρει αρκετά από την τιμή που εκτιμήσαμε:

$$\frac{f - f_2}{f} \cdot 100\% = \frac{0,025 - 0,02}{0,025} \cdot 100\% = 0,2 \cdot 100\% = 20\%$$

Εφαρμοσμένη Υδραυλική

Αφού η τιμή διαφέρει πάνω από **5%**, πρέπει να ξανακάνουμε τις πράξεις με τη νέα τιμή του συντελεστή τριβών f_2 μέχρι να έχουμε διαφορά μικρότερη από 5%.

Με βάση το $\boldsymbol{f_2}$ **= 0,02** υπολογίζουμε τη νέα τιμή της ταχύτητας από την εξίσωση Darcy-Weisbach:

$$h_f = f_2 \frac{L}{D}\frac{V_2^{\,2}}{2g} \Rightarrow V_2^2 = \frac{h_f \cdot D \cdot 2g}{f_2 \cdot L} \Rightarrow V_2 = \sqrt{\frac{h_f \cdot D \cdot 2g}{f_2 \cdot L}} = \sqrt{\frac{1,37 \cdot 0,2 \cdot 2 \cdot 9,81}{0,02 \cdot 30}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{V_2 = 3 \text{ m/s}}$$

Το ίδιο με την πρώτη εκτίμηση

Από την ταχύτητα υπολογίζουμε νέο Re: $\mathrm{Re}_2 = \dfrac{V_2 \cdot D}{\nu} = \dfrac{3 \cdot 0,2}{1,02 \times 10^{-6}} \Rightarrow \mathrm{Re}_2 = 588235$

Πάμε ξανά στο Moody και για $\mathbf{Re_2}$ **= 588235** και $\boldsymbol{\varepsilon/D}$ **= 0,001** βρίσκουμε νέο *f*.

Το νέο *f* ($\boldsymbol{f_3}$ **= 0,02**) βγαίνει ίδιο με αυτό που υπολογίσαμε στο προηγούμενη βήμα, δηλαδή η τιμή $\boldsymbol{f_2 = f_3}$ **= 0,02** είναι σωστή. Άρα η τιμή της ταχύτητας $\boldsymbol{V = V_2}$ **= 3 m/s** είναι σωστή και υπολογίζουμε την παροχή από την εξίσωση της συνέχειας:

$$Q = V \cdot A = V \frac{\pi D^2}{4} = 3 \cdot \frac{\pi \cdot 0,2^2}{4} \Rightarrow \boxed{Q = 0,0942 \; m^3 / s}$$

Προσοχή: Ο άξονας του αριθμού Re είναι λογαριθμικός.