Σημειώσεις διαλέξεων «Εφαρμοσμένη Υδραυλική»

Διάλεξη 7
01/12/2022

Λευθεριώτης Γεώργιος
Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος
Πανεπιστήμιο Πατρών

Διατομές Ελέγχου

Διατομή ελέγχου είναι κάθε διατομή ροής στην οποία η σχέση στάθμης και παροχής είναι καθορισμένη.

Διατομή ελέγχου είναι και η διατομή στην οποία η ροή είναι κρίσιμη, οπότε η παροχή είναι συνάρτηση μόνο του βάθους.

$$\boxed{\frac{Q^2 B}{g \cdot A^3} = 1}$$

όπου **B**, **A** είναι συναρτήσεις του κρίσιμου βάθους y_c

Οι διατομές ελέγχου χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση της παροχής στους ανοικτούς αγωγούς.

Όταν δεν υπάρχει φυσική διατομή ελέγχου, δημιουργούμε συνθήκες κρίσιμης ροής με μεταβολή της διατομής με ανύψωση του πυθμένα ή/και με ελάττωση του πλάτους.

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

Διατομές Ελέγχου

Έστω ροή σε ανοικτό αγωγό ορθογωνικής διατομής. Θεωρούμε σχετικά μικρό μήκος αγωγού, άρα δεν έχουμε τοπικές απώλειες, το συνολικό φορτίο παραμένει σταθερό.

$$H = y + \frac{V^2}{2g} + z = y + \frac{Q^2}{2gA^2} + z = y + \frac{Q^2}{2gb^2y^2} + z = E\left(y\right) + z = const$$

Αν παραγωγίσουμε την παραπάνω σχέση ως προς τη διαμήκη απόσταση ***x***, τότε έχουμε:

$$\frac{dE}{dx} + \frac{dz}{dx} = \frac{dE}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = 0$$

Στη θεωρία της ειδικής ενέργειας είχαμε βρει ότι ισχύει το εξής: $\frac{dE}{dy} = 1 - Fr^2$

Άρα η παραπάνω σχέση γίνεται: $\left(1 - Fr^2\right)\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} = 0$

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

Διατομές Ελέγχου

Ας προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε την εξίσωση : $\boxed{\left(1-Fr^2\right)\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=0}$

Όταν το υψόμετρο του πυθμένα **αυξάνει** στην κατεύθυνση της ροής, τότε το βάθος της ροής **ελαττώνεται** σε περίπτωση **υποκρίσιμης ροής** και **αυξάνει** σε περίπτωση **υπερκρίσιμης ροής**.

$$\frac{dz}{dx}>0 \rightarrow \left(1-Fr^2\right)\frac{dy}{dx}<0 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}<0 & \text{εάν} \quad Fr<1 \\ \dfrac{dy}{dx}>0 & \text{εάν} \quad Fr>1 \end{cases}$$

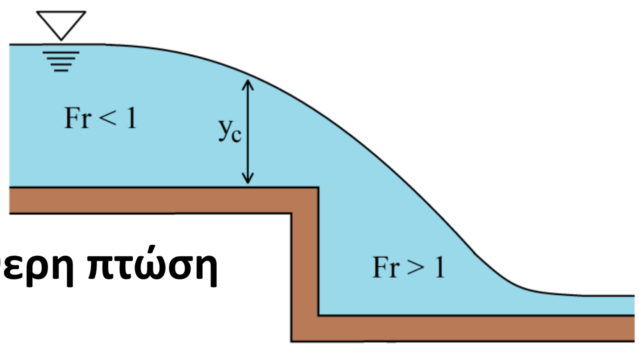
Όταν το υψόμετρο του πυθμένα **ελαττώνεται** στην κατεύθυνση της ροής, τότε το βάθος της ροής **αυξάνει** σε περίπτωση **υποκρίσιμης ροής** και **ελαττώνεται** σε περίπτωση **υπερκρίσιμης ροής**.

$$\frac{dz}{dx}<0 \rightarrow \left(1-Fr^2\right)\frac{dy}{dx}>0 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}>0 & \text{εάν} \quad Fr<1 \\ \dfrac{dy}{dx}<0 & \text{εάν} \quad Fr>1 \end{cases}$$

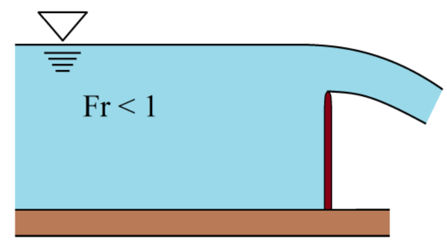
Διατομές Ελέγχου

Η κρίσιμη ροή δημιουργείται κατά τη μετάβαση από υποκρίσιμη σε υπερκρίσιμη ροή, φαινόμενο το οποίο γίνεται **σταδιακά**. Εξαίρεση στο παραπάνω αποτελεί η **υδραυλική πτώση** η οποία είναι τοπικό φαινόμενο και γίνεται απότομα.

Μετάβαση από υποκρίσιμη σε υπερκρίσιμη ροή έχουμε σε υδροληψία από λίμνη ή ταμιευτήρα με αγωγό μεγάλης κλίσης, σε ροή πάνω από υπερχειλιστές ή εκχειλιστές ή σε ελεύθερη πτώση.



Ελεύθερη πτώση



Εκχειλιστής

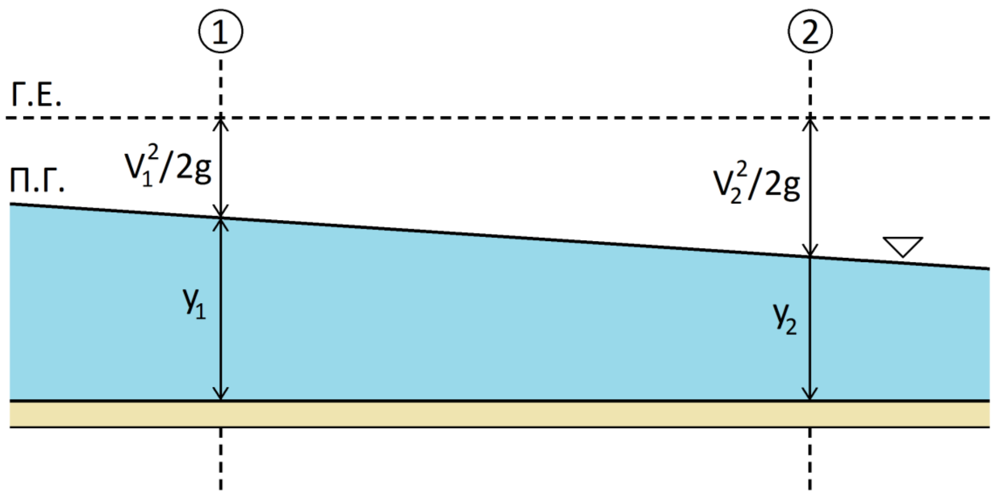
Στην αντίθετη περίπτωση, η μετάβαση από υπερκρίσιμη σε υποκρίσιμη ροή είναι τοπικό φαινόμενο και γίνεται απότομα σε σχετικά μικρό μήκος αγωγού.

Το φαινόμενο μετάβασης από υπερκρίσιμη σε υποκρίσιμη ροή ονομάζεται **υδραυλικό άλμα** και θα εξεταστεί στη συνέχεια.

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

Ειδική Ορμή ή Ειδική Δύναμη

Έστω ο όγκος ελέγχου του παρακάτω σχήματος για ορθογωνικό αγωγό



Τότε η εξίσωση ορμής γίνεται:

$$\frac{1}{2}\gamma\left(b_1y_1^2 - b_2y_2^2\right) = \rho Q\left(V_2 - V_1\right) \Rightarrow \frac{b_1y_1^2}{2} - \frac{b_2y_2^2}{2} = \frac{\rho}{\gamma}QV_2 - \frac{\rho}{\gamma}QV_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b_1y_1^2}{2} - \frac{b_2y_2^2}{2} = \frac{QV_2}{g} - \frac{QV_1}{g} \Rightarrow \boxed{\frac{QV_1}{g} + \frac{b_1y_1^2}{2} = \frac{QV_2}{g} + \frac{b_2y_2^2}{2}} \quad (1)$$

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

Ειδική Ορμή ή Ειδική Δύναμη

Ως ειδική ορμή ορίζεται η ποσότητα $\boxed{M = \frac{QV}{g} + \frac{by^2}{2}} \Rightarrow \boxed{M = \frac{Q^2}{gA} + yA}$

$\frac{QV}{g} = \frac{Q^2}{gA}$ Ορμή ανά μονάδα χρόνου και μονάδα βάρους του ύδατος που διασχίζει τη διατομή ροής

$\frac{by^2}{2} = yA$ Υδροστατική δύναμη ανά μονάδα βάρους του ύδατος που ασκείται επί της διατομής

Άρα η εξίσωση (1) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{QV_1}{g} + \frac{b_1 y_1^2}{2} = \frac{QV_2}{g} + \frac{b_2 y_2^2}{2} \Rightarrow \boxed{M_1 = M_2}$$

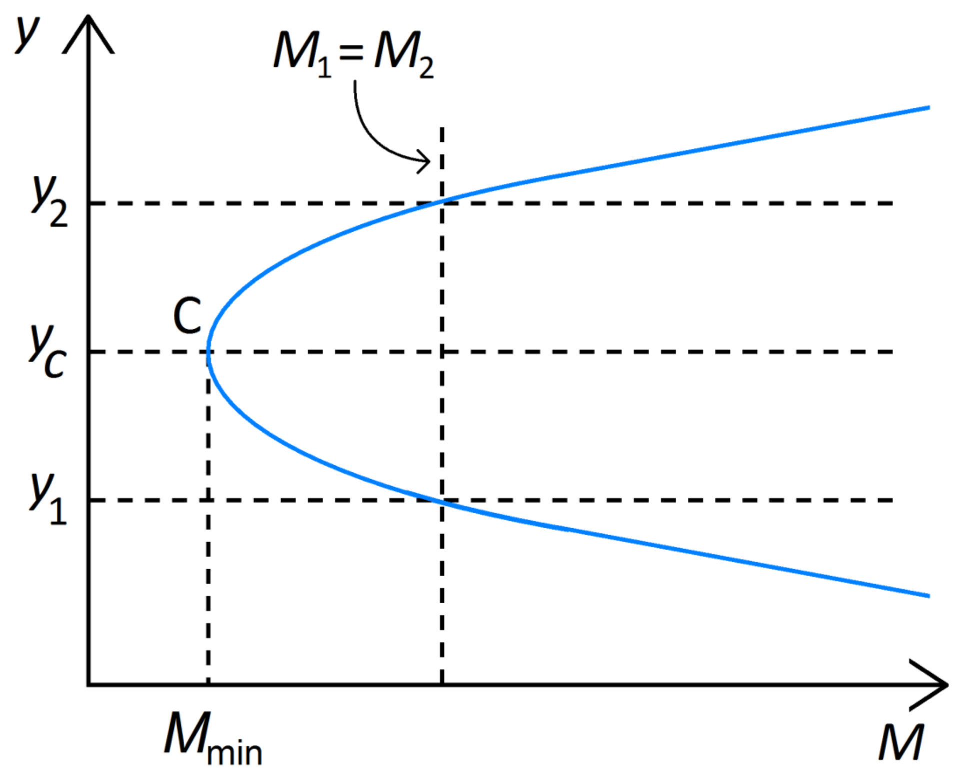
Εξίσωση ειδικής ορμής ή ειδικής δύναμης

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

Διάγραμμα Ειδικής Ορμής

Για δεδομένη τιμή της παροχής και δεδομένη γεωμετρία της διατομής η ειδική ορμή M είναι συνάρτηση μόνο του βάθους ροής. Η γραφική απεικόνιση της ειδικής ορμής παρουσιάζεται στο **Διάγραμμα Ειδικής Ορμής.**

- Η συνάρτηση $M = M(y)$ παρουσιάζει μία ελάχιστη τιμή $M_{\min}$ στο σημείο C όπου το βάθος ροής είναι το κρίσιμο βάθος.
- Στο πάνω τμήμα της καμπύλης η ροή είναι υποκρίσιμη ενώ στο κάτω τμήμα η ροή είναι υπερκρίσιμη.
- Σε κάθε τιμή της ειδικής ορμής M μεγαλύτερης της $M_{\min}$ αντιστοιχούν δύο βάθη ροής. Τα βάθη αυτά καλούνται **συζυγή βάθη (*conjugate depths*)**.



Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

Υδραυλικό Άλμα

Το υδραυλικό άλμα σχηματίζεται κατά την απότομη μετάβαση από υπερκρίσιμη σε υποκρίσιμη ροή.

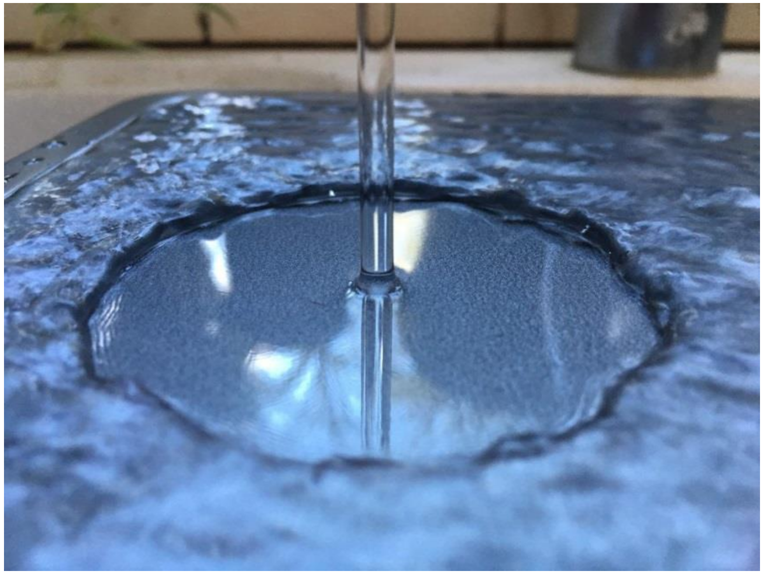
Το φαινόμενο συνοδεύεται από μεγάλες απώλειες ενέργειας, και για το λόγο αυτό δεν μπορεί να αναλυθεί με χρήση της εξίσωσης ενέργειας.

Χρησιμοποιείται η εξίσωση ορμής η οποία μεταξύ διατομών 1 (πριν το άλμα) και 2 (μετά το άλμα) δίνει:

$$\frac{Q^2}{gA_1} + y_1 A_1 = \frac{Q^2}{gA_2} + y_2 A_2$$

όπου y_1, y_2 είναι τα **συζυγή βάθη**.

Αν γνωρίζουμε το ένα από τα δύο βάθη, μπορούμε να υπολογίσουμε το άλλο για δεδομένη διατομή.



https://protonsforbreakfast.wordpress.com/2018/09/01/hydraulic-jumps-in-the-kitchen/

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

Υδραυλικό Άλμα

Στην περίπτωση **αγωγού ορθογωνικής διατομής** έχουμε:

$$A = by \quad \rightarrow \quad M = \frac{Q^2}{gA} + yA \Rightarrow M = \frac{Q^2}{gby} + \frac{1}{2}by^2 \quad (2)$$

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gy}} \Rightarrow Fr^2 = \frac{V^2}{gy} \Rightarrow Fr^2 = \frac{Q^2}{gyA^2} \Rightarrow Fr^2 = \frac{Q^2}{gb^2y^3} \quad \rightarrow \quad \frac{Q^2}{gby} = by^2 Fr^2$$

Άρα η εξίσωση (2) γράφεται: $M = by^2 Fr^2 + \frac{1}{2}by^2$

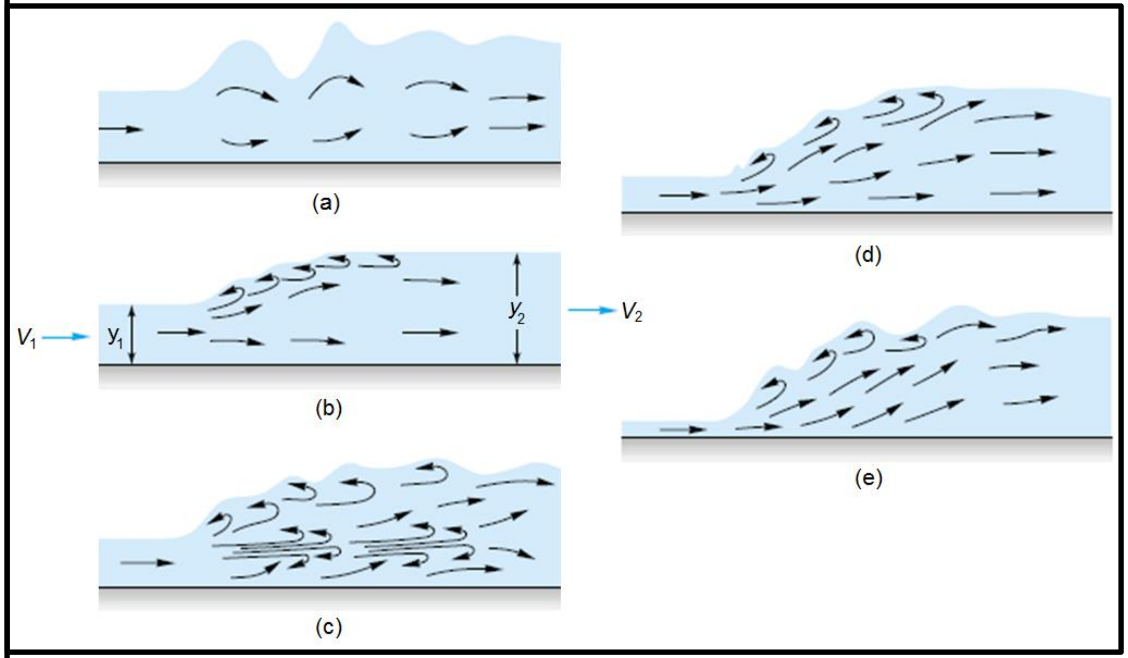
Εξίσωση ειδικής ορμής: $M_1 = M_2 \Rightarrow by_1{}^2 Fr_1^2 + \frac{1}{2}by_1{}^2 = by_2{}^2 Fr_2^2 + \frac{1}{2}by_2{}^2$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης δίνει: $\boxed{\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8Fr_1^2} - 1\right)}$ ή $\boxed{\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8Fr_2^2} - 1\right)}$

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

Υδραυλικό Άλμα

Τύποι Υδραυλικών αλμάτων (Bradley & Peterka, 1957)



a) Κυματοειδές άλμα (*undular jump*)

$1 < Fr_1 < 1,7$

b) Ασθενές άλμα (*weak jump*)

$1,7 < Fr_1 < 2,5$

c) Ταλαντούμενο άλμα (*oscillating jump*)

$2,5 < Fr_1 < 4,5$

d) Σταθερό άλμα (*steady jump*)

$4,5 < Fr_1 < 9$

e) Ισχυρό άλμα (*strong jump*)

$9 < Fr_1$

http://optimist4u.blogspot.com/2011/04/hydraulic-jump-and-its-practical.html

Από πειραματικά αποτελέσματα (Jain, 2001)

Μήκος Άλματος: $L_j = 6y_2$ για $4,5 < Fr_1 < 13$ όπου y_2 είναι το βάθος μετά το άλμα

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

Βιβλιογραφία

- Δημητρακόπουλος Α. **Στοιχεία υδραυλικής κλειστών και ανοικτών αγωγών**, Εκδόσεις Gotsis, 2018.
- Λιακόπουλος Α. **Υδραυλική**, 3^{η} έκδοση, Εκδόσεις Τζιόλα, 2020,
- Στάμου Α. **Εφαρμοσμένη Υδραυλική**, 3^{η} έκδοση, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα, 2016.