



UNIVERSITY OF
PATRAS
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

Σημειώσεις διαλέξεων «Εφαρμοσμένη Υδραυλική»

Διάλεξη 6
24/11/2022

Λευθεριώτης Γεώργιος
Τμήμα Μηχανικών Περιβάλλοντος
Πανεπιστήμιο Πατρών

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

Ειδική Ενέργεια

Σε δεδομένη διατομή ανοικτού αγωγού το συνολικό υδραυλικό φορτίο για οποιοδήποτε σημείο της διατομής, δηλαδή η ενέργεια ανά μονάδα βάρους του υγρού είναι:

$$H = \frac{p_a}{\gamma} + z_a + \frac{V^2}{2g} \quad (1)$$

όπου z_a το υψόμετρο του σημείου σε σχέση με τυχαίο επίπεδο αναφοράς.

Στη ροή σε ανοικτούς αγωγούς με μικρή κλίση πυθμένα, η ελεύθερη επιφάνεια ταυτίζεται με την πιεζομετρική γραμμή. Άρα ισχύει ότι:

$$\frac{p}{\gamma} + z = y + z \quad (2)$$

Με βάση την εξ.(2) η εξ.(1) γίνεται:

$$H = y + z + \frac{V^2}{2g}$$

όπου y = βάθος ροής και z το υψόμετρο του πυθμένα σε σχέση με τυχαίο επίπεδο αναφοράς.

Ειδική Ενέργεια

Ορίζουμε ως **Ειδική Ενέργεια** το συνολικό ύψος ενέργειας, δηλαδή το συνολικό υδραυλικό φορτίο, όταν ο πυθμένας του αγωγού λαμβάνεται ως επίπεδο αναφοράς

$$E = y + \frac{V^2}{2g}$$

Για δεδομένη παροχή Q , η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη μορφή:

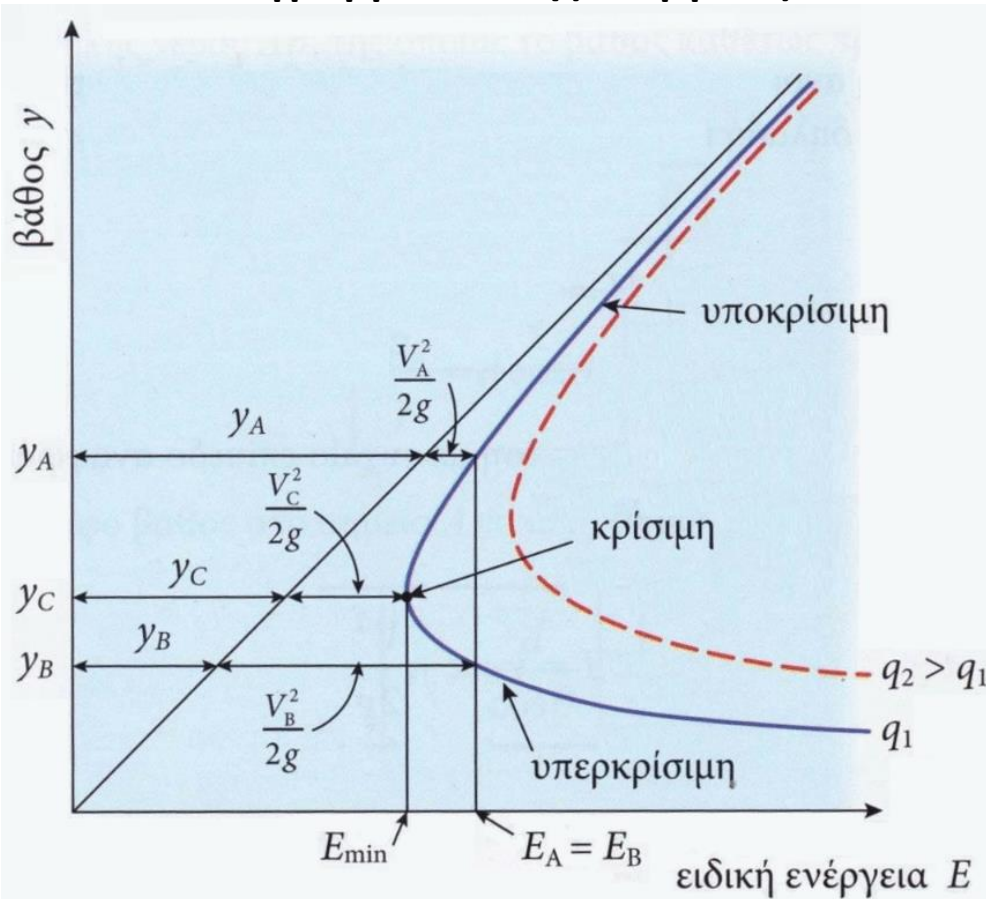
$$E = y + \frac{Q^2}{2g \cdot A^2}$$

$$A = f(y)$$

Δεδομένου ότι η διατομή A είναι συνάρτηση μόνο του βάθους ροής y , η ειδική ενέργεια σε αγωγό δεδομένης διατομής είναι συνάρτηση **μόνο** του βάθους.

Ειδική Ενέργεια

Διάγραμμα Ειδικής Ενέργειας



Δημητρακόπουλος Α. 2018.

Για δεδομένη τιμή της ειδικής ενέργειας υπάρχουν 2 δυνατά βάθη ροής, τα οποία καλούνται: **Εναλλακτικά Βάθη**

Το ένα αντιπροσωπεύει χαμηλή στάθμη και μεγάλη ταχύτητα, ενώ το άλλο υψηλή στάθμη και χαμηλή ταχύτητα.

Εξαίρεση αποτελεί η ελάχιστη τιμή της ειδικής ενέργειας στην οποία αντιστοιχεί ένα μόνο βάθος, το **κρίσιμο βάθος**.

Το τμήμα πάνω από το κρίσιμο βάθος αντιστοιχεί σε **υποκρίσιμη ροή** (μεγάλο βάθος, μικρή ταχύτητα). Το τμήμα κάτω από το κρίσιμο βάθος αντιστοιχεί σε **υπερκρίσιμη ροή** (μικρό βάθος, μεγάλη ταχύτητα). Αν το υγρό ρέει με το κρίσιμο βάθος, έχουμε **κρίσιμη ροή**.

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

5/13

Ειδική Ενέργεια

Παραγωγίζοντας ως προς y για σταθερό Q τη σχέση $E = y + \frac{Q^2}{2g \cdot A(y)^2}$ έχουμε

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{Q^2}{g \cdot A^3} \frac{dA}{dy} \quad (3)$$

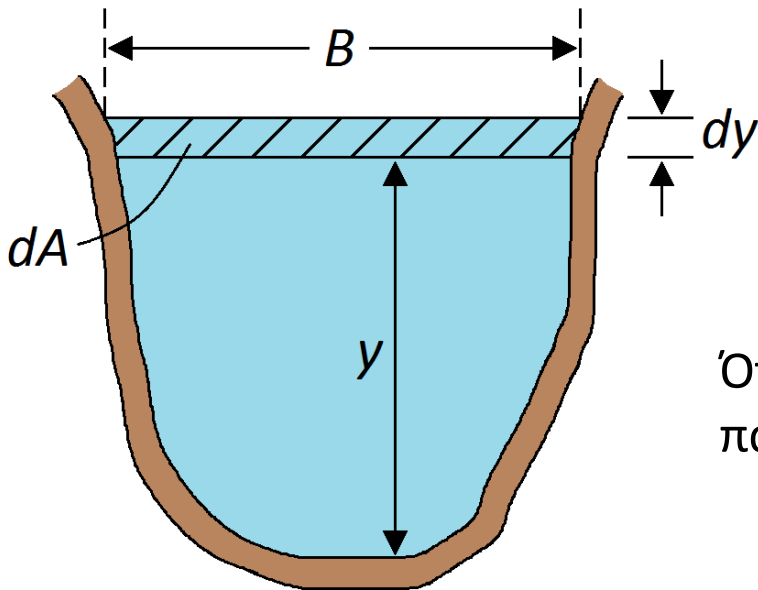
Για τυχαία διατομή ισχύει: $dA = B dy \Rightarrow \frac{dA}{dy} = B$

Μετά από αντικατάσταση στην (3) έχουμε:

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{Q^2}{g \cdot A^3} B \quad (4)$$

Όταν η ροή είναι κρίσιμη ($y = y_c$) η ειδική ενέργεια παίρνει την ελάχιστη τιμή της

$$\frac{dE}{dy} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{Q^2}{g \cdot A^3} B = 0 \Rightarrow \frac{Q^2 B}{g \cdot A^3} = 1$$



Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

Ειδική Ενέργεια

Η επίλυση της $\frac{Q^2 B}{g \cdot A^3} = 1$ θα δώσει το κρίσιμο βάθος y_c

Με εξαίρεση την ορθογωνική διατομή, η παραπάνω εξίσωση δεν επιλύεται αναλυτικά. Μπορεί να επιλυθεί με **δοκιμές** ή με **αριθμητικές μεθόδους**.

Επίσης ισχύει ότι:

$$\left. \begin{aligned} Fr &= \frac{V}{\sqrt{gD_h}} \Rightarrow Fr^2 = \frac{V^2}{gD_h} \\ D_h &= \frac{A}{B} \end{aligned} \right\} Fr^2 = \frac{V^2 B}{gA} \Rightarrow Fr^2 = \frac{Q^2 B}{gA^3}$$

Μετά από αντικατάσταση στην (4) ισχύει ότι:

$$\frac{dE}{dy} = 1 - Fr^2$$

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

7/13

Ειδική Ενέργεια

Με χρήση του διαγράμματος ειδικής ενέργειας και της εξίσωσης ορίζουμε εκ νέου τους τύπους της ροής:

$$\frac{dE}{dy} = 1 - Fr^2$$

- Κρίσιμη Ροή

$$\frac{dE}{dy} = 0 \Rightarrow 1 - Fr^2 = 0 \Rightarrow Fr = 1$$

- Υποκρίσιμη Ροή

$$\frac{dE}{dy} > 0 \Rightarrow 1 - Fr^2 > 0 \Rightarrow Fr < 1$$

- Υπερκρίσιμη Ροή

$$\frac{dE}{dy} < 0 \Rightarrow 1 - Fr^2 < 0 \Rightarrow Fr > 1$$

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

8/13

Ειδική Ενέργεια

Σε ορθογωνικούς αγωγούς πλάτους b , η εξίσωση $\frac{Q^2 B}{g \cdot A^3} = 1$ παίρνει τη μορφή:

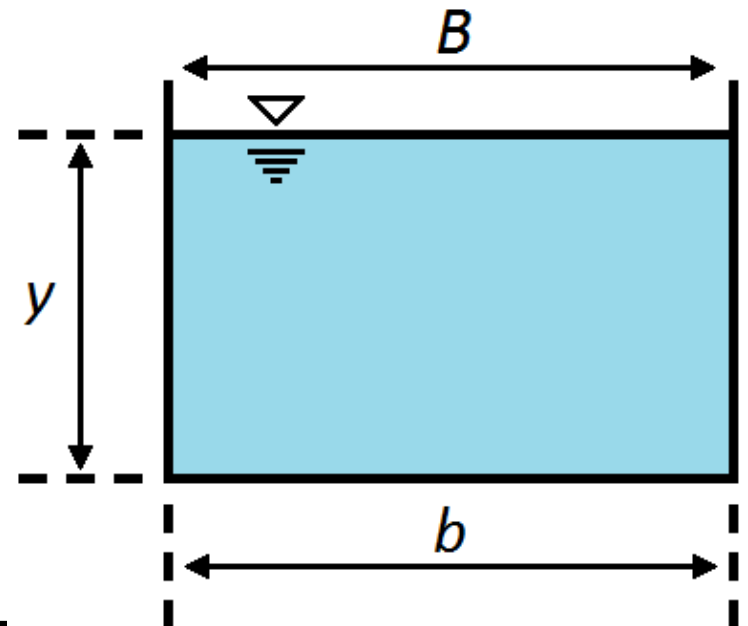
$$\frac{Q^2 b}{g \cdot b^3 y_c^3} = 1$$

Άρα το κρίσιμο βάθος υπολογίζεται από την

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g b^2}}$$

Ορίζοντας ως $q = Q/b$ την παροχή ανά μονάδα πλάτους (ειδική παροχή) έχουμε:

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$



Ειδική Ενέργεια

Για ορθογωνικές διατομές ή διατομές όπου το πλάτος είναι πολύ μεγαλύτερο του βάθους ροής ισχύει ότι $D_{h,c} = y_c$ και η εξίσωση ειδικής ενέργειας παίρνει τη μορφή:

$$E_{\min} = y_c + \frac{V_c^2}{2g} = y_c + \frac{\sqrt{gD_{h,c}}^2}{2g} = y_c + \frac{D_{h,c}}{2} = y_c + \frac{y_c}{2} \Rightarrow E_{\min} = \frac{3}{2} y_c$$

Γραμμική σχέση μεταξύ E_{\min} και y_c . Άρα για διαφορετικές τιμές παροχής, τα ελάχιστα των καμπυλών ειδικής ενέργειας θα βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία.

Επίσης για δεδομένη ειδική ενέργεια έστω E_o μετά από πράξεις έχουμε:

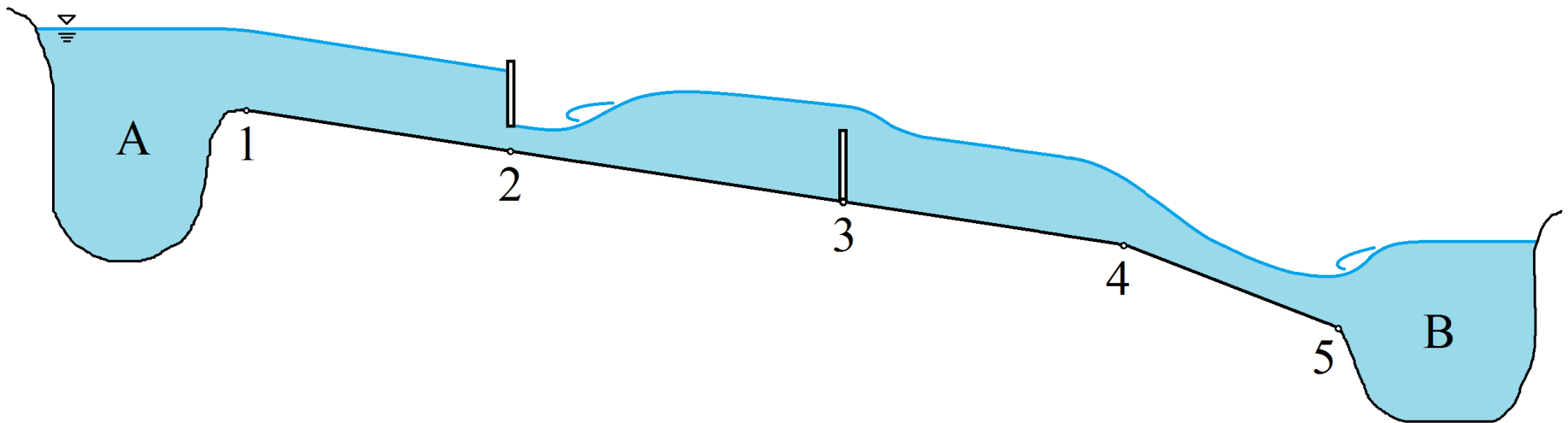
$$\frac{Q_{\max}^2 B}{g \cdot A^3} = 1$$

Όμως η συγκεκριμένη σχέση ικανοποιείται μόνο όταν $y = y_c$. Άρα για δεδομένη ειδική ενέργεια, η παροχή λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της όταν η ροή είναι κρίσιμη.

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

10/13

Παράδειγμα ροής με ελεύθερη επιφάνεια

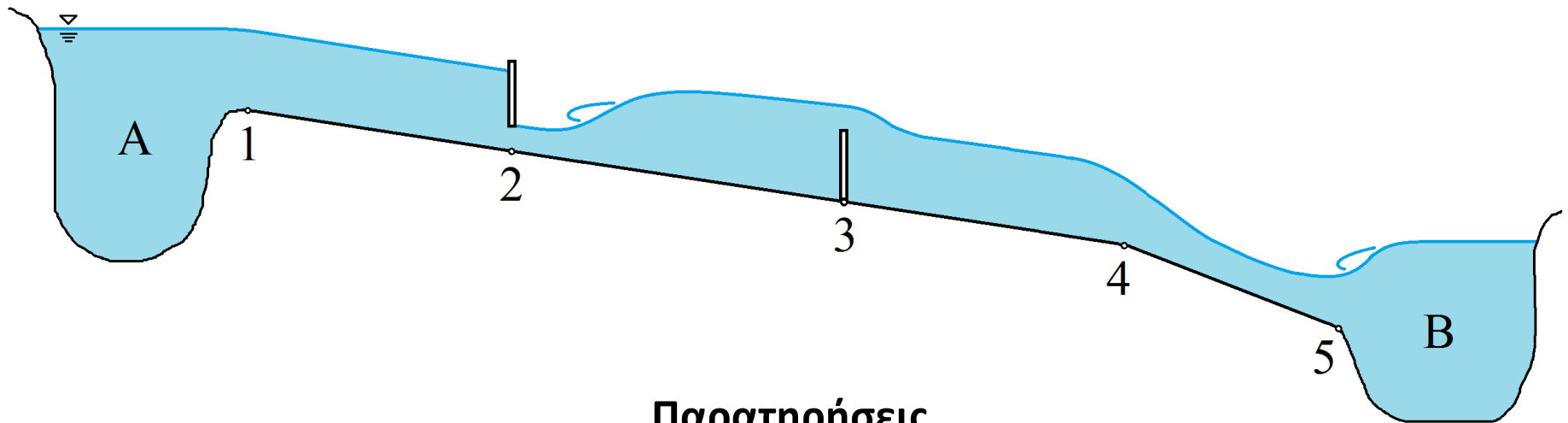


- Θεωρούμε μόνιμη ροή σε αγωγό σταθερής ορθογωνικής διατομής μεταξύ δύο ταμιευτήρων A και B.
- Ο αγωγός αποτελείται από 4 τμήματα μεγάλου μήκους.
- Τα πρώτα 1-2, 2-3, 3-4 έχουν ίδια κλίση πυθμένα, ενώ το 4-5 έχει μεγαλύτερη.
- Στη θέση 2 υπάρχει θυρόφραγμα και στη θέση 3 υπερχειλιστής.

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

11/13

Παράδειγμα ροής με ελεύθερη επιφάνεια



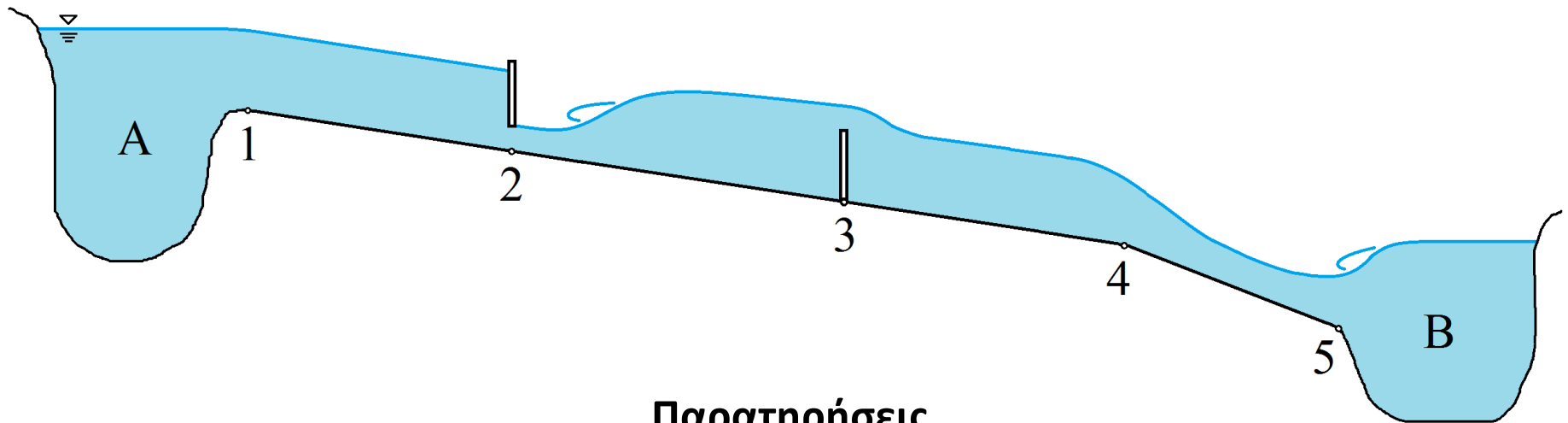
Παρατηρήσεις

- Στη μεγαλύτερη έκταση των τμημάτων η ροή είναι ομοιόμορφη, εκτός από τις θέσεις αλλαγής ροής.
- Στα 3 πρώτα τμήματα που έχουν μικρή κλίση πυθμένα, η ροή είναι υποκρίσιμη, το βάθος ροής μεγάλο και η ταχύτητα ροής μικρή.
- Στο 4^ο τμήμα που έχει μεγάλη κλίση πυθμένα, η ροή είναι υπερκρίσιμη, το βάθος ροής μικρό και η ταχύτητα ροής μεγάλη.

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

12/13

Παράδειγμα ροής με ελεύθερη επιφάνεια



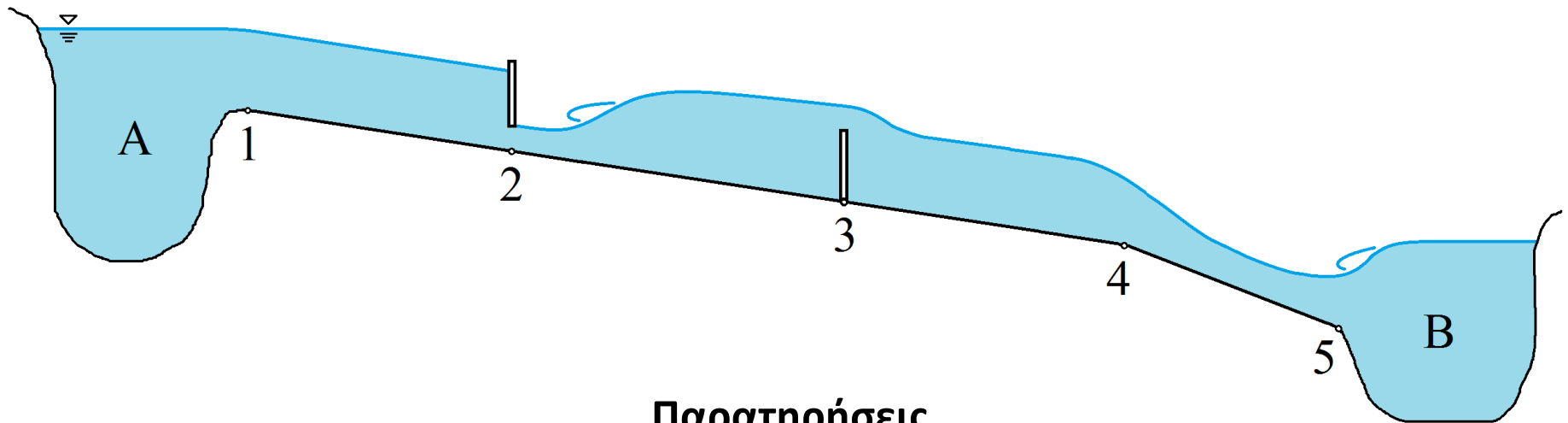
Παρατηρήσεις

- Κατάντη της θέσης 2, η ροή αναγκάζεται να αποκτήσει πολύ μικρό βάθος και γίνεται τοπικά υπερκρίσιμη. Έπειτα έχουμε μετάβαση ξανά σε υποκρίσιμη ροή μέσω υδραυλικού άλματος.
- Πλησιάζοντας τη θέση 3, η ροή αυξάνει το βάθος της για να περάσει πάνω από τον υπερχειλιστή. Έπειτα έχει μικρή «πτώση» και ξαναγίνεται ομοιόμορφη με το ίδιο βάθος ροής που είχε στα τμήματα 1-2 και 2-3.

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

13/13

Παράδειγμα ροής με ελεύθερη επιφάνεια



Παρατηρήσεις

- Στη θέση 4, λόγω της αύξησης της κλίσης του πυθμένα στο τμήμα 4-5, η ροή μεταβαίνει από υποκρίσιμη (3-4) σε υπερκρίσιμη (4-5), με βαθμιαία μείωση του βάθους ροής.
- Στη θέση 5, η ροή αναγκάζεται να ανέλθει για να συναντήσει την ελεύθερη επιφάνεια του ταμιευτήρα Β. Αυτό γίνεται με τη μορφή άλματος και τη μετάβαση από υπερκρίσιμη σε υποκρίσιμη ροή.

Ροή σε ανοικτούς αγωγούς

Βιβλιογραφία

- Δημητρακόπουλος Α. **Στοιχεία υδραυλικής κλειστών και ανοικτών αγωγών**, Εκδόσεις Gotsis, 2018.
- Λιακόπουλος Α. **Υδραυλική**, 3^η έκδοση, Εκδόσεις Τζιόλα, 2020,
- Στάμου Α. **Εφαρμοσμένη Υδραυλική**, 3^η έκδοση, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα, 2016.