ΑΣΚΗΣΗ 1

Στις εξετάσεις στο μάθημα της Στατιστικής τον Ιούνιο 2019 οι βαθμοί των φοιτητών ακολουθούν την κανονική κατανομή $N(7.5, 0.6^2)$ ενώ οι βαθμοί εξετάσεων Ιουνίου 2020 την $N(5.5, 1.1^2)$. Ένας φοιτητής Α έγραψε 8 τον Ιούνιο του 2019 ενώ ένας άλλος φοιτητής Β έγραψε 7 τον Ιουνιο του 2020. Ποιος είναι καλύτερος;

ΛΥΣΗ

Φοιτητής Α: $\frac{8-7.5}{0.6} = \frac{0.5}{0.6} = 0{,}8$

Φοιτητής Α: $\frac{7-5.5}{1.1} = \frac{1.5}{1.1} = 1.4$

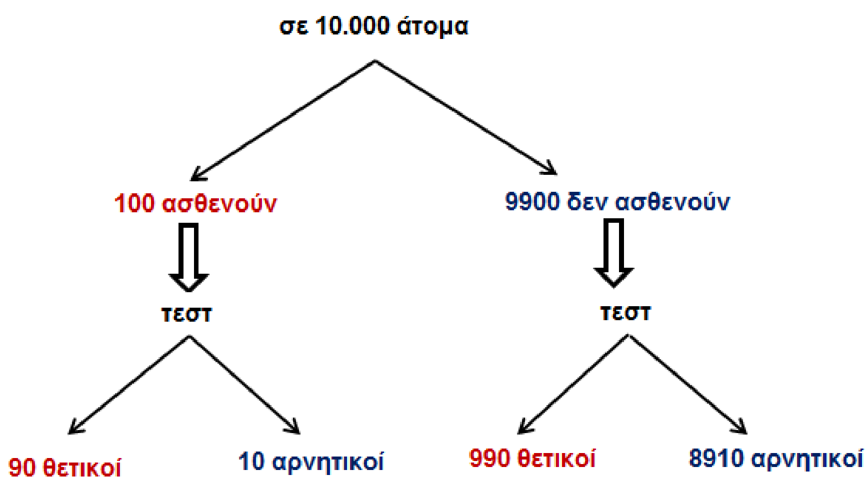
Επειδή ο βαθμός Β=7 είναι 1.4 φορές καλύτερος από τον μ.ο.=5.5 ενώ ο βαθμός Α=8 είναι 0.8 φορές καλύτερος από τον μ.ο.=7.5, συμπεραίνουμε ότι ο φοιτητής Β είναι καλύτερος.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Για μια ασθένεια Α γνωρίζουμε ότι προσβάλλεται το 1% του πληθυσμού. Για την ασθένεια αυτή υπάρχει ένα διαγνωστικό τεστ, το οποίο έχει ακρίβεια 90%. Αν κάνω το τέστ και βγει θετικό, ποιά η πιθανότητα να είμαι ασθενής;

ΛΥΣΗ

Έστω ότι κάνουμε το τεστ σε 10000 άτομα. Η πιθανότητα να είναι κάποιος ασθενής δεδομένου ότι έχει θετικό τεστ, μπορεί να υπολογιστεί με βάση το επόμενο σχήμα:



οπότε P=90/(90+990)=90/1080 = 8,3333%

ΑΣΚΗΣΗ 3

Σε ένα παιχνίδι μπάσκετ κάποιος παίκτης έχει ποσοστό ευστοχίας 80% στις ελεύθερες βολές. Αν X είναι ο αριθμός των επιτυχημένων βολών σε δυο προσπάθειες, να βρεθεί η κατανομή του X. Ποια βασική παραδοχή πρέπει να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό; Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός πετυχημένων βολών; Να απαντηθούν τα παραπάνω ερωτήματα αν η πιθανότητα επιτυχίας στην πρώτη βολή είναι 70% και στην δεύτερη 90%. Τι παρατηρείτε; Αλλάζει κάτι στην περίπτωση που η πιθανότητα επιτυχίας στην πρώτη βολή είναι 50% και στην δεύτερη 100%.

ΛΥΣΗ

Στην αρχή υπολογίζουμε τις πιθανότητες καμίας, μίας και δύο εύστοχων βολών δηλαδή (X=0,1,2αντίστοιχα) με $p = 0,8$ και $q = 1-p = 0,2$:
Είναι
$P(X=0) = (1-p)\cdot(1- p) = 0,2\cdot 0,2 = 0,04$
$P(X=1) = (1- p)\cdot p + (1-p)\cdot p = 0,2\ 0,80 + 0,200,80=0,16 + 0,16 = 0,32$
$P(X=2) = p\cdot p = 0,8\cdot 0,8 = 0,64$
Οι παραπάνω υπολογισμοί στηρίχτηκαν στην βασική παραδοχή ότι τα αποτελέσματα των δυο προσπαθειών είναι ανεξάρτητα, δηλαδή ότι το αποτέλεσμα της πρώτης δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα της δεύτερης.
Σε αυτή την περίπτωση ο αναμενόμενος αριθμός πετυχημένων βολών είναι:

$E(X) = 0 \cdot 0{,}04 + 1 \cdot 0{,}32 + 2 \cdot 0{,}64 = 1{,}6$

Στην περίπτωση που τα ποσοστά ευστοχίας είναι διαφορετικά για την κάθε βολή, και μάλιστα $p_1=0{,}7$ και $p_2 = 0{,}9$, η κατανομή του Χ διαμορφώνεται ως εξής:
$P(X=0) = (1-p_1)\cdot(1-p_2) = 0{,}3\cdot 0{,}1 = 0{,}03$
$P(X=1) = (1-p_1)\cdot p_2 + p_1\cdot(1-p_2) = 0{,}3\cdot 0{,}9+0{,}1\cdot 0{,}7 = 0{,}34$
$P(X=2) = p_1\cdot p_2 = 0{,}7\cdot 0{,}9 = 0{,}63$
Τώρα ο αναμενόμενος αριθμός πετυχημένων βολών είναι:
$E(X) = 0\cdot 0{,}03 + 1\cdot 0{,}34 + 2\cdot 0{,}63 = 1{,}6$.

Στην τελευταία περίπτωση που τα ποσοστά ευστοχίας είναι διαφορετικά για την κάθε βολή, και μάλιστα $p_1=0{,}5$ και $p_2 = 1{,}0$, η κατανομή του Χ διαμορφώνεται ως εξής:
$P(X=0) = (1-p_1)\cdot(1-p_2) = 0{,}5\cdot 0 = 0$
$P(X=1) = (1-p_1)\cdot p_2 + p_1\cdot(1-p_2) = 0{,}5\cdot 1+0{,}5\cdot 0 = 0{,}50$
$P(X=2) = p_1\cdot p_2 = 0{,}5\cdot 1 = 0{,}5$
Τώρα ο αναμενόμενος αριθμός πετυχημένων βολών είναι:
$E(X) = 0\cdot 0 + 1\cdot 0{,}5 + 2\cdot 0{,}5 = 1{,}5$.

Παρατηρούμε ότι το τελικό αποτέλεσμα στις δυο πρώτες περιπτώσεις παραμένει το ίδιο, επειδή δεν έχει αλλάξει ο μέσος όρος επιτυχίας στις δυο βολές (p=. $\frac{p_1+p_2}{2} = \frac{0{,}7+0{,}9}{2} = 0{,}8$ ενώ στην τρίτη περίπτωση (p=. $\frac{p_1+p_2}{2} = \frac{0{,}5+1{,}0}{2} = 0{,}75$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Οι πιθανότητες ότι μια περιοχή θα χτυπηθεί από ένα ή δύο τυφώνες μέσα σ’ ένα χρόνο είναι 0.3 και 0.05 αντίστοιχα. Η πιθανότητα 3 ή παραπάνω τυφώνων είναι μηδαμινή.

Η ίδια περιοχή ενδέχεται να υποστεί πλημμύρες στη διάρκεια ενός χρόνου. Οι πλημμύρες μπορεί να οφείλονται στο λιώσιμο του χιονιού στα γύρω βουνά (πιθανότητα 100%) ή να οφείλονται σε καταιγίδα που συνοδεύει τον τυφώνα (πιθανότητα 25%). Υποθέτουμε ότι πλημμύρες από χιόνια και πλημμύρες από τυφώνες είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Ποια είναι η πιθανότητα πλημμύρας μέσα σ’ ένα χρόνο;

ΛΥΣΗ

Έστω,

F_S and F_H αντιπροσωπεύουν το ότι η περιοχή θα πλημμυρίσει μέσα σε ένα χρόνο από το λιώσιμο του χιονιού και από τυφώνες αντίστοιχα.

H_0, H_1 και H_2 αντιπροσωπεύουν το ότι η περιοχή θα χτυπηθεί από κανένα, ένα, και δύο τυφώνες αντίστοιχα μέσα σε ένα χρόνο.

$P(F_S) = 0.10$

$P(H_1) - 0.3$, $P(H_2) = 0.05$, $P(H_0) = 0.65$ $P(F_H|H_0) = 0.0$

$P(F_H|H_1) = 0.25$, $P(\bar{F}_H|H_1) = 0.75$

$P(F_H|H_2) = 1\text{-}0.75^2 = 1\text{-}0.5625 = 0.4375$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα της Ολικής Πιθανότητας,

$$P(F_H) = P(F_H|H_0)P(H_0) + P(F_H|H_1)P(H_1) + P(F_H|H_2)P(H_2)$$
$$= 0 + 0.25x0.30 + 0.4375x0.05 = 0.096875$$

P(Πλημμύρα της κομητείας μέσα σε ένα χρόνο)

$=P(F_S \cup F_H) = P(F_S) + P(F_H) - P(F_S F_H)$

$= 0.10 + 0.096875 - P(F_S)\text{-}P(F_H)$

$= 0.196875 - 0.10 \times 0.096875$

$= 0.187$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Ένα ηλεκτροδοτικό σύστημα έχει δύο γεννήτριες, 1 και 2. Λόγω συντήρησης και περιοδικών βλαβών, οι πιθανότητες ότι, σε μια συγκεκριμένη εβδομάδα, οι γεννήτριες 1 και 2 δεν θα λειτουργούν είναι 0.01 και 0.02, αντίστοιχα. (Το ενδεχόμενο μη λειτουργίας της γεννήτριας και συμβολίζεται με $E_κ$). Κατά τη διάρκεια μιας εβδομάδας το καλοκαίρι, υπάρχει μια πιθανότητα 10% ότι η ζέστη θα είναι πολύ μεγάλη (το ενδεχόμενο αυτό συμβολίζεται με H και θεωρούμε ότι αναφέρεται σε μέση θερμοκρασία >30^o C) σε μια τέτοια περίπτωση, η ζήτηση ηλεκτρικής ενέργειας θα είναι εξαιρετικά υψηλή. Η συμπεριφορά του ηλεκτροδοτικού συστήματος, αναφορικά με την ικανότητα να παρέχει την απαιτούμενη ενέργεια σε μια συγκεκριμένη εβδομάδα, μπορεί να χαρακτηριστεί σαν (i) ικανοποιητική, S, αν αμφότερες οι γεννήτριες λειτουργούν και η μέση θερμοκρασία είναι κάτω από 30^{o}C. (ii) μη ικανοποιητική, P, αν μόνο μια γεννήτρια λειτουργεί και η μέση θερμοκρασία είναι πάνω από 30^{o}C. (iii) οριακή, M, σ' οποιαδήποτε άλλη περίπτωση. Υποθέστε ότι H, E_1 και E_2 είναι ανεξάρτητα.

(α) Να οριστούν τα ενδεχόμενα S,P,M σαν συνθέσεις των E_1, E_2 και H.

(β) Ποια η πιθανότητα ότι ακριβώς μια γεννήτρια δεν θα λειτουργεί σε μια συγκεκριμένη εβδομάδα;

(γ) Να υπολογιστούν οι P (S), P (P) και P (M).

ΛΥΣΗ

P(E) = 0.01

P(E) = 0.02

P(E) = 0.10

α) $S = E_1E_2H$

$P = E_1E_2H \cup E_1E_2H$

$M = E_1E_2H \cup E_1E_2H \cup E_1E_2H \cup E_1E_2H \cup E_1E_2H$

ή

$E_1E_2H \cup E_1E_2H \cup E_1E_2H$.

β) P (ακριβώς μια μονάδα θα είναι εκτός υπηρεσίας)

$= P(E_1E_2) + P(E_1E_2)$

$= P(E_1)\ [1-P(E_2)] + [1-P(E_1)]\ P(E_2)$

$= 0.01 \times 0.98 \times 0.99 \times 0.02 = 0.0296$

γ) $P(S) = P(E_1E_2H) = P(E_1)\ P(E_2)\ P(H)$

$= 0.99 \times 0.98 \times 0.9 = 0.87318$

$P(P) = P(E_1E_2H) + P(E_1E_2H)$

$= P(E_1)\ P(E_2)\ P(H) + P(E_1)\ P(E_2)\ P(H)$

$= 0.01 \times 0.98 \times 0.01 + 0.99 \times 0.01 = 0.00296$

$P(M) = 1 - 0.87318 - 0.0296 = 0.12386$.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Ένας οδηγός που ξεκινάει από την Ομόνοια και ανεβαίνει την οδό Σταδίου, με προορισμό το Σύνταγμα, συναντά 4 φανάρια. Αν η πιθανότητα το κάθε φανάρι που συναντά να είναι πράσινο είναι 0,5 (ανεξάρτητη από τα προηγούμενα), να βρεθεί η κατανομή του αριθμού των πράσινων φαναριών που θα περάσει ο οδηγός μέχρι να σταματήσει σε κάποιο κόκκινο φανάρι ή να φτάσει στον προορισμό του. Ποιον αριθμό πράσινων φαναριών αναμένεται να συναντήσει ο οδηγός μέχρι να σταματήσει;

ΛΥΣΗ

Έστω Χ ο αριθμός των πράσινων φαναριών που περνά ο οδηγός μέχρι να σταματήσει σε κάποιο κόκκινο ή να φτάσει στον προορισμό του. Η τυχαία μεταβλητή Χ παίρνει τιμές στο σύνολο {0,1,2,3,4}. Έτσι αν το πρώτο φανάρι που θα συναντήσει είναι κόκκινο, ενδεχόμενο που έχει πιθανότητα 1-0,5 = 0,5 το Χ θα έχει την τιμή 0.

Αν το πρώτο φανάρι είναι πράσινο και το δεύτερο κόκκινο τότε η τυχαία μεταβλητή έχει την τιμή 1, ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα είναι P(X=1) = 0,5·(1 -0,5) = 0,25.

•Συνεχίζοντας υπολογίζουμε με τον ίδιο τρόπο τις πιθανότητες το Χ να παίρνει τιμές 2,3,4 κατασκευάζοντας την κατανομή της τ.μ. Χ όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Χ	0	1	2	3	4
P_X	1/2	1/4	1/8	1/16	1/16

Χ=4 σημαίνει ότι ο οδηγός θα φτάσει στο Σύνταγμα χωρίς να σταματήσει σε κανένα από τα τέσσερα φανάρια (όλα πράσινα).

Ο αναμενόμενος αριθμός πράσινων φαναριών είναι η μέση τιμή του Χ, η οποία υπολογίζεται ως εξής:

E(X) = 0·(1/2) + 1·(1/4) + 2·(1/8) + 3·(1/16) + 4·(1/16) = 15/16 = 0.9375 ~1.0

•Επειδή η μέση τιμή είναι κοντά στην μονάδα, αναμένεται να συναντήσει ένα πράσινο φανάρι.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Σ’ ένα παιχνίδι που παίζεται με ένα ζάρι, ο παίκτης κερδίζει 20 ευρώ εάν έρθει 2, 40 ευρώ εάν έρθει 4, χάνει 30 ευρώ εάν έρθει 6, ενώ αν έρθει άλλος αριθμός ούτε κερδίζει ούτε χάνει.

Πόσα ευρώ αναμένεται να κερδίσει αν ρίξει το ζάρι μία φορά; Αλλάζει το αποτέλεσμα αν ο παίκτης ρίχνει το ζάρι ωσότου είτε να κερδίσει, είτε να χάσει;

ΛΥΣΗ

Έστω X, η τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει το κέρδος του παίκτη σε μια ρίψη του ζαριού. Τα δυνατά αποτελέσματα μιας ρίψης είναι Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6} με αντίστοιχα κέρδη: {0, 20, 0, 40, 0, -30} και πιθανότητες $p_1 = p_2 = \ldots = p_6 = 1/6$. Η μέση (αναμενόμενη) τιμή του X είναι:

$$E(X) = (0)(\tfrac{1}{6}) + (20)(\tfrac{1}{6}) + (0)(\tfrac{1}{6}) + (40)(\tfrac{1}{6}) + (0)(\tfrac{1}{6}) + (-30)(\tfrac{1}{6}) = 5$$

Συνεπώς, ο παίκτης αναμένεται να κερδίσει 5 ευρώ σε μία ρίψη.

Αν το παιχνίδι συνεχίζεται ώσπου ο παίκτης είτε να κερδίσει είτε να χάσει (δηλαδή να έρθει ζυγό αποτέλεσμα), οι πιθανότητες διαμορφώνονται ως εξής:

$$P(X=2) = (\tfrac{1}{6}) + (\tfrac{1}{2}) \cdot (\tfrac{1}{6}) + (\tfrac{1}{2}) \cdot (\tfrac{1}{2}) \cdot (\tfrac{1}{6}) + \ldots = \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Όπου 1/2 είναι η πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι περιττός αριθμός και ο παίκτης να ξαναρίξει. Εδώ έχουμε πάλι γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο 1/6 και βήμα 1/2. Ομοίως υπολογίζεται ότι $P(X = 4) = P(X = 6) = \frac{1}{3}$

και τελικά: $E(X) = (20)\cdot(\tfrac{1}{3}) + (40)\cdot(\tfrac{1}{3}) + (-30)\cdot(\tfrac{1}{3}) = 10$

Άρα το αναμενόμενο κέρδος σε αυτή την περίπτωση διπλασιάζεται

ΑΣΚΗΣΗ 8.

Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X παίρνει μόνο μη αρνητικές ακέραιες τιμές και ισχύει

$$\mathrm{E}[X] = 1, \qquad \mathrm{E}[X^2] = 2, \qquad \mathrm{E}[X^3] = 5.$$

Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της πιθανότητας $P[X = 0]$.

ΛΥΣΗ

Έστω $p_n = P[X = n]$

Από την υπόθεση έχουμε $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} np_n = 1$και $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 p_n = 2$και $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 p_n = 5$.

Επομένως $\frac{11}{6}\sum_{n=0}^{\infty} np_n - \sum_{n=0}^{\infty} n^2 p_n + \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty} n^3 p_n = \frac{2}{3}$

Το αριστερό μέλος της τελευταίας ισότητας είναι ίσο με

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{11n}{6} - n^2 + \frac{n^3}{6}\right)p_n = p_1 + p_2 + p_3 + \sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{11n}{6} - n^2 + \frac{n^3}{6}\right)p_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} p_n$$

Επειδή $\frac{11n}{6} - n^2 + \frac{n^3}{6} > 1$ για $n \geq 4$.Επομένως $\sum_{n=1}^{\infty} p_n \leq \frac{2}{3}$και αφού$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, θα έχουμε $p_0 \geq \frac{1}{3}$.

Ηισότητα επιτυγχάνεται όταν $P[X = 1] = \frac{1}{2}$, $P[X = 3] = \frac{1}{6}$και $P[X = x] = 0$ για όλες τις άλλες τιμές του θετικού ακεραίου x.