

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ II

Φραγκίσκος Κουτελιέρης
Αναπληρωτής Καθηγητής Παν/μίου Πατρών



Επικοινωνία: fcoutelieris@upatras.gr

Διαφορικές εξισώσεις

Έστω μια συνάρτηση $F : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, όπου I ένα διάστημα του \mathbb{R} και $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Έστω ακόμη η συνάρτηση $y(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $y^{(k)}(x) = \frac{d^{(k)}y(x)}{dx^k}$, όπου $k = 1, 2, \dots, n$.

Ονομάζεται **συνήθης διαφορική εξίσωση (ΣΔΕ)** κάθε έκφραση της μορφής

$$F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = 0$$

Παραδείγματα ...

... φαινομένων τα οποία περιγράφονται από διαφορετικές εξισώσεις:

- η κίνηση ενός σώματος σε καμπύλη τροχιά (φυσική)
- οι χημικές αντιδράσεις που λαμβάνουν χώρα σε μια ρευστή φάση (χημεία)
- η εξέλιξη πληθυσμών σε κλειστά συστήματα (βιολογία)
- η διασπορά ρύπων στην ατμόσφαιρα (περιβάλλον)
- η διακύμανση ενός κεφαλαίου σε δεδομένες συνθήκες (οικονομία)
- το ηλεκτρικό κύκλωμα πυκνωτή-πηνίου (ηλεκτρομαγνητισμός)
- ... και πάρα πολλά άλλα.

Βασική παρατήρηση

Σε μια **συνήθη** διαφορική εξίσωση η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται μόνο από **μία** ανεξάρτητη μεταβλητή.

Αν η άγνωστη συνάρτηση είναι πολλών μεταβλητών, δηλ. αν εξαρτάται από **δύο ή περισσότερες** ανεξάρτητες μεταβλητές, τότε η διαφορική εξίσωση ονομάζεται διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους ή αλλιώς **μερική** διαφορική εξίσωση (ΜΔΕ).

Τάξη μιας ΣΔΕ ...

... ονομάζεται η μεγαλύτερη τάξη παραγώγου που εμφανίζεται σε αυτήν.

Λύση μιας ΣΔΕ ...

... είναι κάθε συνάρτηση που την επαληθεύει.

Στην πραγματικότητα, η λύση μιας ΣΔΕ είναι μια **οικογένεια συναρτήσεων** της μορφής $y=y(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$. Τα μέλη της οικογένειας αυτής συνδέονται μεταξύ τους μέσω n -το-πλήθος πραγματικών σταθερών c_1, c_2, \dots, c_n , οι οποίες προκύπτουν επειδή για την εύρεση της λύσης χρειάζονται n -το-πλήθος ολοκληρώσεις.

Βασικό ...

Η συνάρτηση $y=y(x,c_1,c_2,\dots,c_n)$ ονομάζεται **γενική λύση** της ΣΔΕ αν την ικανοποιεί για οποιοδήποτε σύνολο τιμών των σταθερών c_1,c_2,\dots,c_n .

Είναι δυνατόν να υπάρχουν συναρτήσεις οι οποίες είναι λύσεις της ΣΔΕ, αλλά **δεν προκύπτουν** από την $y=y(x,c_1,c_2,\dots,c_n)$. Αυτές είναι οι **ιδιάζουσες** λύσεις.

Ονομάζεται **πλήρης λύση** της ΣΔΕ το **άθροισμα** της **γενικής** λύσης της και όλων των **διαζουσών** λύσεών της.

ΠΑΤ

Το πρόβλημα στο οποίο αναζητείται εκείνη η λύση της ΣΔΕ

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες

$$y(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = y_1$$

...

$$y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

όπου $y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ και $x_0 \in I$

ονομάζεται **πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ)**.

ΠΣΤ

Το πρόβλημα στο οποίο αναζητείται εκείνη η λύση της ΣΔΕ

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

η οποία ικανοποιεί μαζί με τις μέχρι n τάξης παραγώγους κάποιες συνθήκες στα άκρα ενός διαστήματος $[\alpha, \beta] \subseteq I$

ονομάζεται **πρόβλημα συνοριακών τιμών (ΠΣΤ)**.

Ασκήσεις.

