- Γραμμικές Δ.Ε. 1ης τάξης.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} + A_L(x)\cdot y(x) = B_L(x)} \rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} + A_L(x)\, y(x) = 0} \rightarrow$$ ομογενής δ. εξίσωση γρ. 1ης τάξης.

$y(x) \rightarrow$ εξαρτημένη

$x \rightarrow$ ανεξάρτητη

$\rightarrow y(x) = \ldots\ldots$

→ Η γενική λύση μιας γραμμικής 1ης τάξης δίνεται:

$$y(x) = e^{-\int A_L(x)\,dx}\left[C + \int B_L(x)\cdot e^{\int A_L(x)\,dx}\,dx\right] \Leftarrow$$

(*) παρατήρηση

$$y(x) = \underbrace{C\cdot e^{-\int A_L(x)\,dx}}_{\Downarrow} + \underbrace{e^{-\int A_L(x)\,dx}\cdot\int B_L(x)\cdot e^{\int A_L(x)\,dx}\,dx}_{\Downarrow}$$

Λύση της ομογενούς γραμ. δ. εξίσωσης

παράγεται από το μη ομογενές κομμάτι της γραμμ. δ. εξίσωσης.

$$y(x) = y_{ομογ.}(x) + y_{ειδ.}(x)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθεί η εξίσωση : $\boxed{y' = 2y + e^x} \rightarrow$ 1ης τάξης

$$y\ dy = x\ dx \rightarrow \text{χωρίζ. μεταβλ.}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 2y + e^x} \Rightarrow \cancel{dy = (2y + e^x)\,dx.} \qquad \cancel{dy = 2y\,dx + e^x\,dx}$$

όχι χωριζόμενων μεταβλητών.

$$\rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} - 2y = e^x} \begin{array}{l} \rightarrow A_L(x) = -2 \\ \rightarrow B_L(x) = e^x \end{array} \Bigg\} \Rightarrow$$

ΓΕΝ. ΜΟΡΦΗ ΛΥΣΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ 1ης τάξης

$$y(x) = e^{-\int A_L(x)\,dx}\left[C + \int B_L(x)\cdot e^{\int A_L(x)\,dx}\,dx\right]$$

$$y(x) = e^{-\int(-2)\,dx}\left[c + \int e^{x}\cdot e^{\int -2\,dx}\,dx\right] =$$

$$= e^{\int 2\,dx}\left[c + \int e^{x}\cdot e^{-\int 2\,dx}\,dx\right] =$$

- $\int 2\,dx = 2x$

- $\int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$

$$= e^{2x}\left[c + \int e^{x}\cdot e^{-2x}\,dx\right]$$

$$= e^{2x}\left[c + \int e^{-x}\,dx\right] =$$

$$= e^{2x}\left[c - e^{-x}\right] =$$

$$= c\cdot e^{2x} - e^{2x}\cdot e^{-x} =$$

$$= \boxed{c\cdot e^{2x} - e^{x}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ : Να λυθεί η Δ.Ε $y' - y = y\cdot\ln x$.

- $\frac{dy}{dx} - y - y\ln x = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} - y(1+\ln x) = 0}$

  $\hookrightarrow A_L(x) = -(1+\ln x)$

  $\hookrightarrow B_L(x) = 0$.

- $\frac{dy}{dx} - y = y\cdot\ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y + y\cdot\ln x \Rightarrow$

  ΧΩΡ. ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ.

  $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y(1+\ln x) \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{y} = (1+\ln x)\,dx}$

• $\frac{dy}{y} = (1+\ln x)\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int (1+\ln x)\,dx \Rightarrow$

Για $x>0$ και $y \neq 0$

$\Rightarrow \ln|y| = \int dx + \int \ln x\, dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln|y| = x + \int x' \cdot \ln x\, dx. \Rightarrow$

ΟΛΟΚΛ. ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

$\int f \cdot g'\, dx = f \cdot g - \int f' g\, dx$

$\Rightarrow \ln|y| = x + \left[x \ln x - \int x \cdot (\ln x)'\, dx \right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln|y| = x + \left[x \ln x - \int \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\, dx \right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln|y| = x + (x \ln x - x) + c \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln|y| = \cancel{x} + x \ln x \cancel{- x} + c \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln|y| = x \ln x + c \Rightarrow$

$\ln x^a = a \cdot \ln x$

$b = \ln e^b$

$\ln e^b = b \cdot \ln e$

$\ln e^b = b$

$\Rightarrow \ln|y| = \ln x^x + c$

$\Rightarrow \ln|y| = \ln x^x + \ln e^c \Rightarrow$

$\ln A + \ln B = \ln(AB)$

$\Rightarrow \ln|y| = \ln(x^x \cdot e^c) \Rightarrow$

$e^c = c_1$

$\Rightarrow \ln|y| = \ln(x^x \cdot c_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{|y| = c_1 x^x}$

$$y(x) = e^{-\int A_L(x)\,dx}\left[C + \int B_L(x)\cdot e^{\int A_L(x)\,dx}\,dx\right]$$

$\hookrightarrow$ $y(x) = Ce^{-\int A_L(x)\,dx}$ (*)

$$\left.\begin{aligned} A_L(x) &= -(1+\ln x) \\ B_L(x) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$\boxed{y_{GiS}(x) = 0}$

$$\int A_L(x)\,dx = -\int 1+\ln x\,dx = -\left[\int dx + \int \ln x\,dx\right] =$$

$$= -\left(x + (x\ln x - x)\right) = -\left(\cancel{x} + x\ln x - \cancel{x}\right) = -x\ln x$$

(*) $y(x) = c_1 e^{-(-x\ln x)} = c_1 e^{x\ln x}$ → Λύση με προσέγγιση ως 1ης τάξης γραμμική (ομογενή)

$\boxed{|y| = c_1 x^x}$ → Λύση που βρήκαμε από προσέγγιση χωριζομένων μεταβλητών.

$$y(x) = c_1 e^{x\ln x} = c_1\cdot e^{\ln x^x} =$$

$\boxed{a\cdot\ln x = \ln x^a}$

$e^{\ln a} = a.$

$$\boxed{y(x) = c_1\cdot x^x}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθεί η δ. εξίσωση $y' + 2xy = 2x\cdot e^{-x^2}$ ⇐

$\boxed{\dfrac{dy}{dx} + A_L(x)\cdot y(x) = B_L(x)}$ → ΓΕΝ. ΜΟΡΦΗ ΓΡ. 1ης τάξης

$$\left\{\begin{aligned} A_L(x) &= 2x \\ B_L(x) &= 2xe^{-x^2} \end{aligned}\right\}$$

$$y(x) = e^{-\int A_L(x)\,dx}\left[C + \int B_L(x)\cdot e^{\int A_L(x)\,dx}\,dx\right]$$

$$\left\{\begin{aligned} A_L(x) &= 2x \\ B_L(x) &= 2xe^{-x^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

- $\int A_L(x)\,dx = \int 2x\,dx = \cancel{2}\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}} = x^2.$

- $\int 2x\cdot e^{-x^2}\cdot e^{x^2}\,dx = \int 2x\,\cancel{e}^{\cancel{(-x^2+x^2)}\,1}\,dx = \int 2x\,dx = \cancel{2}\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}} = \boxed{x^2}.$

$$y(x) = e^{-x^2}\left[C + x^2\right] = \underbrace{C\cdot e^{-x^2}}_{y_{o\mu o\gamma}(x)} + \underbrace{x^2\cdot e^{-x^2}}_{y_{\mu.\varsigma.}(x)}$$

$$y(x) = y_{o\mu}(x) + y_{\mu\varsigma}(x) = Ce^{-x^2} + x^2\cdot e^{-x^2}$$