→ Μορφή Συνάρτησης και όχι τιμή μεταβλητής.

1η ΤΑΞΗΣ ΔΙΑΦ. ΕΞΙΣΩΣΗΣ

- → Σ.Δ.Ε χωριζόμενων μεταβλητών.
- → Σ.Δ.Ε γραμμικές.
- → Σ.Δ.Ε Bernoulli.

ΑΡΧΙΚΑ 1ης ΤΑΞΗΣ ΧΩΡΙΣ. ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

ΓΕΝ. ΜΟΡΦΗ : $\boxed{F(x, y, y') = 0}$ ή $\boxed{y' = f(x,y)}$

Ανεξάρτητη : x Εξαρτημένη: $y(x)$ → Λύση μας

Μέθοδος λύσης μιας 1ης τάξης:

Αρχικά να καταφέρουμε να γράψουμε την διαφ. εξίσωση στη

μορφή : $\boxed{g(y)\, dy = f(x)\, dx}$ ←

Στην συνέχεια ολοκληρώνω και τα 2 μέλη και βρίσκω την

$y(x) = \ldots\ldots$

Παράδειγμα

Να λυθεί η $\boxed{y' = y^2 \cdot \cos x}$

$\boxed{g(y) \cdot dy = f(x)\, dx}$

$\boxed{y' = \frac{dy}{dx}}$

$\frac{dy}{dx} = y^2 \cdot \cos x \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = \cos x\, dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \frac{1}{y^2} dy = \int \cos x\, dx \Rightarrow$

$\left(\frac{y^{-3}}{3}\right)' = \frac{\cancel{3} \cdot y^{-4}}{\cancel{3}}$

$\Rightarrow -\frac{1}{y} = \sin x + c \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = -\frac{1}{\sin x + c}}$

$(\sin x)' = \cos x$.

$(\cos x)' = -\sin x$

Να λυθεί: $\boxed{y' = \frac{y}{x}} \Rightarrow$

$\ln A - \ln B = \ln A/B$

$\ln A + \ln B = \ln(AB)$

$\ln A = \ln B \Rightarrow A = B$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + c \Rightarrow \ln|y| - \ln|x| = c \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln\left|\frac{y}{x}\right| = c \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{x}\right| = \ln e^{c} \Rightarrow \left|\frac{y}{x}\right| = e^{c} \Rightarrow$

$\Rightarrow |y| = |x| \cdot e^{c}$ εάν θέσω και $e^{c} = c_1$

$\Rightarrow \boxed{|y| = c_1 |x|}$

Έστω $x = \arctan y'$ να λυθεί η δ. εξίσωση

$$x = \tan^{-1}(y')$$

$$x = \tan^{-1}(y') \Rightarrow y' = \tan x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \tan x$$

ΣΚΕΨΗ

$(\cos x)' = -\sin x$

$(-\cos x)' = \sin x$

$$\Rightarrow \int dy = \int \tan x \, dx \Rightarrow y = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$\Rightarrow y = \int -\frac{(\cos x)'}{\cos x} dx \Rightarrow y = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\ln|\cos x| + c_1} \Leftarrow$$

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{με} \quad y(x = x_0) = y_0$$

→ ΓΕΝ. ΜΟΡΦΗ ΕΝΟΣ (Π. Α. Τ.)

π.χ. για Π. Α. Τ.

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$x = \arctan y'$ με $y(x = 0) = 5$ → ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΘΗΚΗ

ΑΚΡΙΒΩΣ ΟΤΙ ΚΑΝΑΜΕ ΠΙΟ ΠΡΙΝ. όμως για την $y = -\ln|\cos x| + c_1$ θα εφαρμόσω την ΑΡΧ. ΣΥΝΘ.

$$y(x=0) = -\ln|\cancel{\cos 0}^{\,1}| + c_1 = 5 \Rightarrow \longrightarrow$$

$\Rightarrow -\cancel{\ln 1}^{\,0} + c_1 = 5. \Rightarrow \boxed{c_1 = 5}$

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

Άρα η ζητούμενη λύση του Π.Α.Τ είναι

$$\boxed{y(x) = -\ln|\cos x| + 5.}$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να λυθεί το πρόβλημα $(1+e^x)\,y\cdot y' = e^x$ και να βρεθεί η λύση που διέρχεται από το $M(1,1)$

$x \quad y$

$$yy' = \frac{e^x}{1+e^x} \Rightarrow y\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{1+e^x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int y\,dy = \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \ln(1+e^x) + c_1 \Rightarrow$$

$$[\ln(1+e^x)]' = \frac{1}{1+e^x}\cdot e^x$$

$$\Rightarrow y^2 = 2\ln(1+e^x) + 2c_1$$

έστω $2c_1 = C_1$

$$\Rightarrow y^2 = 2\ln(1+e^x) + C_1 \Rightarrow y(x) = \pm\sqrt{(\ \cdot\ \ldots)}$$

$$\boxed{y^2(x) = 2\ln(1+e^x) + C_1}$$ άρα

$$1^2 = 2\cdot\ln(1+e) + C_1 \Rightarrow 1 = 2\cdot\ln(1+e) + C_1$$

$$\Rightarrow \boxed{C_1 = 1 - 2\cdot\ln(1+e)}$$

ΤΕΛΙΚΑ Η ΕΙΔΙΚΗ ΛΥΣΗ ΠΟΥ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ ΤΟ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΕΙΝΑΙ: $y^2(x) = 2\cdot\ln(1+e^x) + 1 - 2\ln(1+e)$

$$\Rightarrow y^2(x) = 2\,[\ln(1+e^x) - \ln(1+e)] + 1 \Rightarrow$$

$$y^2(x) = 2\left[\ln(1+e^x) - \ln(1+e)\right] + 1 \implies$$

$$\implies \boxed{y^2(x) = 2 \cdot \ln \frac{(1+e^x)}{1+e} + 1}$$