Παράγωγος Σύνθετης Συνάρτησης

$z = f(y)$ και $y = g(x)$ τότε για την παράγωγό της

γράφουμε

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}}$$

$\Rightarrow$ ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί η παράγωγος ως προς x της σύνθετης συνάρτησης $\boxed{z = y^3}$ με $\boxed{y = x^2 + 1}$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy}\left(y^3\right) = 3y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^2+1\right) = \frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \cancel{\frac{d}{dx}(1)} \xrightarrow{} 0 = 2x$$

$$\boxed{\frac{dz}{dx}} = 3y^2 \cdot 2x = 3\cdot\underbrace{\left(x^2+1\right)}_{y}{}^{2}\cdot 2x = 6x\left(x^2+1\right)^2$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ $\Rightarrow$ ΑΝΤΙΘΕΤΟΣ ΔΡΟΜΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ.

$$\int \left(\text{Συνάρτηση}\right) dx = G(x) + C$$

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

dx: Διαφορικό

$$\frac{d\,G(x)}{dx} = \left(\text{Συνάρτηση}\right)$$

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

B → πάνω όριο. ⇒ 10sec
ή τελική τιμή

$$\int_A^B (\Sigma \text{υνάρτηση}) \cdot dx \rightsquigarrow dt \quad \theta(t) \quad = G(t)\Big|_A^B =$$

A → κάτω όριο 1sec
ή αρχική τιμή.

$$= G(B) - G(A)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

$$\int 1\, dx = x \boxed{+C}$$

$$\frac{d(\ldots?\ldots)}{dx} = 1$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x+c) = \frac{dx}{dx} + \cancel{\frac{dc}{dx}}^{\,0} = 1} \checkmark$$

↳ Μια δοκιμή προκειμένου να ελέγξω τον εαυτό μου.

$$\int (\cancel{0}^{\,1})\, dx$$

$$\int 5\, dx = \boxed{5x + C}$$

$$f(x) = 5$$

$$\frac{d}{dx}(5x+c) = \frac{d}{dx}(5x) + \cancel{\frac{dc}{dx}}^{\,0}$$

$$= 5\,\cancel{\frac{dx}{dx}}^{\,1} = 5 \checkmark$$

$$5 \cdot \int dx = 5 \cdot x + C$$

$$G(x) = 5x + C$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

$$\int x^2\,dx = \boxed{\frac{x^3}{3} + c_1}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + c_1\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{d}{dx}(c_1)$$

$$= \frac{1}{3}\frac{d}{dx}(x^3) = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^2 = x^2$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cdots\right) = x^2$$

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{7}{3}}$$

ΣΚΕΨΗ

$$\frac{d(x^n)}{dx} = n\cdot x^{n-1}$$

$$n-1 = 2 \Rightarrow n = 2+1 \Rightarrow \boxed{n=3}$$

$$\frac{d(x^3)}{dx} = 3\cdot x^2$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{3}\cdot x^3\right)}{dx} = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^2 = x^2$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

$$\int \frac{5}{2} x^4 \, dx =$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \int x^4 \, dx =$$

$$= \frac{\cancel{5}}{2} \cdot \frac{x^5}{\cancel{5}} + c_1 =$$

$$= \frac{x^5}{2} + c_1$$

$$\frac{d}{dx}\left(a \cdot f(x)\right) = a \cdot \frac{d}{dx}\left(f(x)\right)$$

$$\left(\ldots \right)' = x^4$$

$$\frac{1}{2} \int 5x^4 \, dx = $$

$$= \boxed{\frac{x^5}{2} + c_1}$$

$$\frac{d \, x^5}{dx} = 5 \cdot x^4$$

$$\int_0^1 \frac{5}{2} x^4 \, dx = \left. \frac{x^5}{2} \right|_0^1 = \frac{1^5}{2} - \cancel{\frac{0^5}{2}} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

$$\int \frac{1}{x^2} \, dx \equiv \int x^{-2} \, dx =$$

$$= -x^{-1} + c_1$$

$$= \boxed{-\frac{1}{x} + c_1}$$

$$\left(\ldots ? \ldots \right)' = x^{-2}$$

$$\frac{d \, \cancel{\ln x^2}}{dx} = \frac{1}{x^{\cancel{2}}} \cdot 2\cancel{x} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \ln\left(f(x)\right) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x} + c_1\right) = -\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) =$$

$$= -(-1) \cdot x^{-1-1} = +1 \cdot x^{-2} = \boxed{\frac{1}{x^2}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

ΚΑΝΟΝΑΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ του $\ln$

$$\boxed{\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6

$$\int \frac{5x^2+3}{10}\,dx = \frac{1}{10}\int 5x^2+3\,dx =$$

$$= \frac{1}{10}\left[\int 5x^2\,dx + \int 3\,dx\right] =$$

ΚΑΝΟΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{10}\left[5\cdot\int x^2\,dx + 3\cdot\int dx\right] =$$

$$= \frac{1}{10}\left[5\cdot\frac{x^3}{3} + 3\cdot x\right] + C =$$

$$= \boxed{\frac{x^3}{6} + \frac{3x}{10} + C}$$

$$\int_1^2 \frac{5x^2+3}{10}\,dx = \left.\frac{x^3}{6} + \frac{3x}{10}\right|_1^2 = \left(\frac{2^3}{6} + \frac{3\cdot 2}{10}\right) - \left(\frac{1^3}{6} + \frac{3\cdot 1}{10}\right)$$

$$= \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{5}\right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{10}\right) = \ldots\ldots\ldots = \left(\frac{\ldots}{\ldots}\right)$$