$$y''(x) - 5y'(x) + 7y(x) = 0.$$

Θέτω $\boxed{y = e^{px}}$

$y' = p \cdot e^{px}$

$y'' = p^2 e^{px}$.

Χ.Π

$$\underbrace{e^{px}}_{\neq 0} \underbrace{\left(\quad \ldots \quad \right)}_{\overset{\parallel}{0}} = 0.$$

$p^2 - 5p + 7 = 0. \quad \to \quad \boxed{\Delta = -3} < 0 \quad \to$ μιγαδικές λύσεις

$$p_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{-3}}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{5 + i\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{5 - i\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \to$$

Δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες.

ΓΕΝ. ΟΡΙΣΜΟΣ ΛΥΣΗΣ

$$y(x) = e^{ax} \cdot \left[A(x) \cos bx + B(x) \cdot \sin bx \right]$$

Επομένως στην δική μας Δ.Ε η λύση θα είναι:

$$\boxed{y(x) = e^{\frac{5}{2}x} \left[C_1 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right]}$$

$a + ib.$

$\frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΓΕΝ. ΜΟΡΦΗ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ

$\boxed{z = a + ib}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$z = 2 + i\sqrt{5}$.

$\bar{z} = a - ib. \to$ Συζυγείς μιγαδικοί.

$\bar{z} = 2 - i\sqrt{5}$.

$Re\{z\} = a.$

$Im\{z\} = b.$

$i \to$ μιγαδική μονάδα

$\boxed{i^2 = -1} \longrightarrow$ π.χ. $\sqrt{-3} = \sqrt{(-1) \cdot 3} = \sqrt{i^2 \cdot 3} = i\sqrt{3}$

$z = i\sqrt{3}$

$Re\{z\} = 0$, $Im\{z\} = \sqrt{3}$.

Ισότητες

$z_1 = a + ib \quad$ και $\quad z_2 = c + id$

ΙΣΟΤΗΤΑ.

- $\boxed{z_1 = z_2} \Rightarrow \boxed{a = c \quad \text{και} \quad b = d}$

- ΠΡΟΣΘΕΣΗ ή ΑΦΑΙΡΕΣΗ.

$$z_1 + z_2 = (a+ib) + (c+id) = \underbrace{(a+c) + (b+d)i}_{} = z_3$$

$$Re\{z_3\} = a+c$$

$$Im\{z_3\} = b+d.$$

$$z_1 - z_2 = (a+ib) - (c+id) = \boxed{(a-c) + (b-d)i}$$

- Πολλαπλασιασμός.

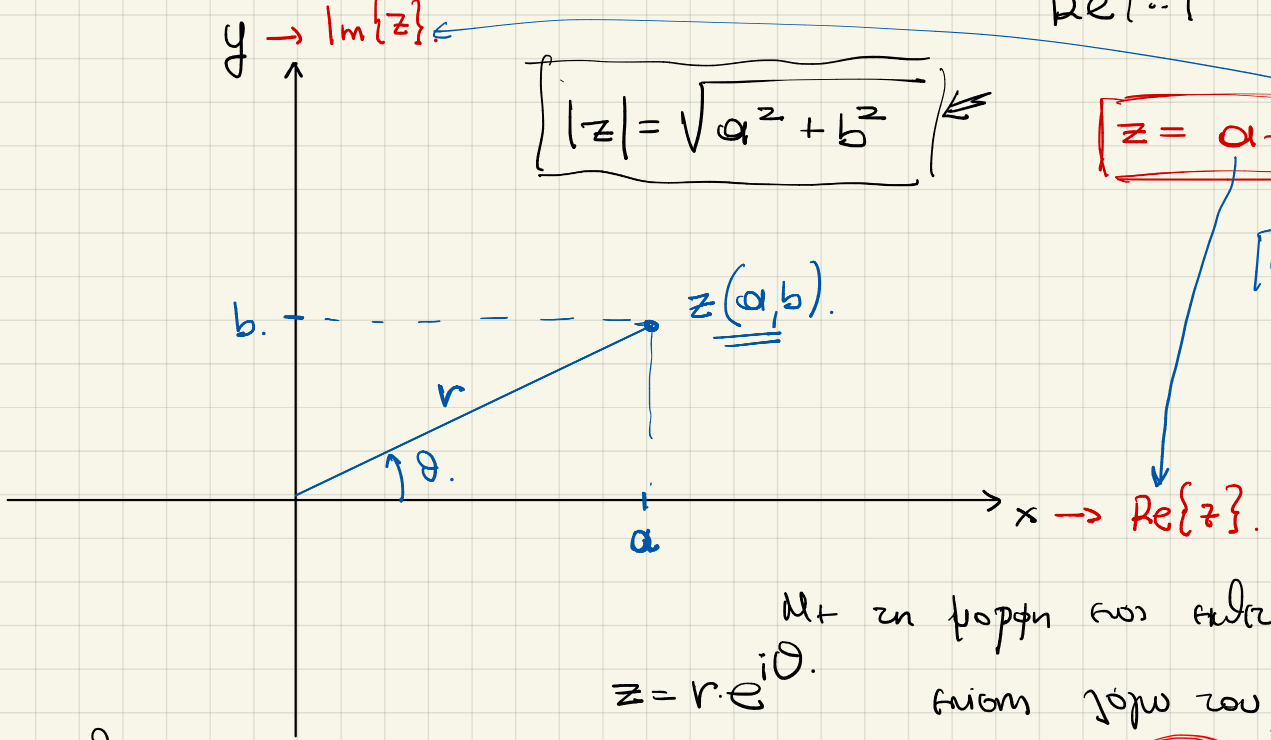
$$z_1 \cdot z_2 = (a+ib)\cdot(c+id) =$$

$$= ac + \underline{iad + ibc} + i^2 bd = \underbrace{(ac-bd)}_{Re\{..\}} + i\underbrace{(ad+bc)}_{Im\{..\}}, \quad i^2 = -1$$

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\boxed{z = a + ib}$$

$$\boxed{a, b > 0}$$



Με τη μορφή ενός εκθετικού:

$z = r\cdot e^{i\theta}$. έπεται λόγω του Euler.

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$

$$z = r\cdot(\cos\theta + i\sin\theta) = r\cos\theta + i\, r\cdot\sin\theta.$$

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}\cdot y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1\cdot y'(x) + a_0\cdot y(x) = \boxed{h(x)}$$

Μη ομογενής ΔΕ.

ΓΕΝ ΛΥΣΗ ΤΗΣ :

$$y_{γεν}(x) = y_{ομογενούς}(x) + y_{ιδιαζ.}(x)$$

1º ΒΗΜΑ : Λύνω την ομογενή της ....

$$\boxed{y_{ομ}(x)}$$

2º ΒΗΜΑ : Βρίσκω την ιδιάζουσα λύση λόγω της ύπαρξης της $h(x) \longrightarrow y_{ιδιαζ}(x)$

3º ΒΗΜΑ : παρουσιάζω τη γενική λύση ως γραμμικό συνδυασμό των παραπάνω:

$$y_{γεν} = y_{ομ} + y_{ιδιαζ}$$

ΕΥΡΕΣΗ ΙΔΙΑΖΟΥΣΑΣ ΛΥΣΗΣ.

- Εξαρτάται από τη μορφή της $h(x)$:

$$h(x) = e^{ax}\left[A\cdot\cos(bx) + B\cdot\sin(bx)\right]\cdot P_k(x)$$

k → βαθμός πολυωνύμου.

πολυώνυμο

Αναγνωρίζω τα εξής.

$a = ?$ $B = ?$

$A = ?$ $b = ?$

και $P_k(x)$ → με ενδιαφέρει ο βαθμός του πολυωνύμου.

Άρα μετά την αναγνώριση των παραπάνω ακολουθεί τον έλεγχο γιατί την αναγνώριση της μορφής της ιδιάζουσας λύσης:

ΓΕΝ. ΜΟΡΦΗ

$$y_{ιδιαζ}(x) = x^{s} \cdot e^{\alpha x}\left[\underbrace{A_k(x)}_{} \cdot \sin(\beta x) + \underbrace{B_k(x)}_{} \cdot \cos(\beta x)\right]$$

είναι πολυώνυμα ίδιου βαθμού με το $P_k(x)$

είναι η πολλαπλότητα του μιγαδικού αριθμού $\alpha + i\beta$ → εάν αυτός εμφανίζεται ως ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της ομογενούς.

(*) ΣΗΜ. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Οι συντελεστές των πολυωνύμων $A_k(x)$ και $B_k(x)$ υπολογίζονται από τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών.

$\boxed{\Pi.X}$

$$y^{(4)}(x) - 2y^{(3)}(x) + 2y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 3e^x.$$

1ο ΒΗΜΑ : Λύνω την ομογενή της.

$$y^{(4)} - 2y^{(3)}(x) + 2y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0.$$

Χ.Π. $$\boxed{p^4 - 2p^3 + 2p^2 - 2p + 1 = 0}$$

⋮ (Βγήκε προηγούμενο μάθημα)

$$y_{ομ.}(x) = (c_0 + c_1 x)e^x + c_2 \cdot \cos x + c_3 \cdot \sin x$$

2ο ΒΗΜΑ $$h(x) = 3 \cdot e^x$$

$$h(x) = e^{ax} \cdot [A \cdot \cos(bx) + B \cdot \sin(bx)] \cdot P_k(x) = 3 \cdot e^x \cdot 1$$

$a = 1$ B = οτιδήποτε.

$P_k(x) = 3$

$A = 1$ $b = 0$

$\sin 0 = 0$

$\cos 0 = 1$

$$y_{ιδιαλ.}(x) = x^s \cdot e^{ax}\left[A_k(x) \cdot \sin bx + B_k(x) \cdot \cos bx\right].$$

$$= x^s e^x \left[\cancel{A_k(x) \cdot 0} + B_k(x) \cdot 1\right] =$$

$$= x^s \cdot e^x \cdot \boxed{B_k(x)} \to C = \boxed{C \cdot x^s \cdot e^x}$$

μιγαδικός : $a + ib = 1 + i0 = 1$ → και εμφανίζεται ως ρίζα του ΧΑΡΑΚΤ. ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ της ομογενούς με πολλαπλότητα 2.

ΑΡΑ $s = 2$

$$\boxed{y_{ιδιαλ}(x) = C \cdot x^2 \cdot e^x}$$

Μέθοδος προσδιοριστέων συντελεστών.

Άρα η $y_{ιδιαλ.}$ ικανοποιεί την αρχική μου διαφορική:

$$y^{(4)}(x) - 2y^{(3)}(x) + 2y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 3e^x.$$

$$y'_{ιδιαλ.} = C\left[2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x\right]$$

$$y''_{ιδιαλ.} = C\left[2(e^x + xe^x) + (2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x)\right] =$$

$$= 2c(e^x + xe^x) + c(2xe^x + x^2 \cdot e^x) =$$

$$= 2ce^x + \underbrace{2cxe^x + 2cxe^x}_{} + c \cdot x^2 \cdot e^x =$$

$$= 2c \cdot e^x + 4cxe^x + cx^2 \cdot e^x.$$

$$y''' = 2c \cdot e^x + 4c(e^x + xe^x) + c(2xe^x + x^2 \cdot e^x)$$

$$= 2ce^x + 4ce^x + 4cxe^x + 2cx \cdot e^x + cx^2 \cdot e^x.$$

$$= 6ce^x + 6cxe^x + cx^2e^x.$$

$$y^{(4)} = 6ce^x + 6c(e^x + xe^x) + c(2xe^x + x^2 \cdot e^x)$$

$$= \underbrace{6ce^x + 6ce^x}_{} + \underbrace{6cxe^x + 2cxe^x}_{} + cx^2e^x.$$

$$= 12ce^x + 8cxe^x + cx^2 \cdot e^x$$

$$\cancel{12ce^x} + \cancel{8cxe^x} + \cancel{cx^2e^x} - \cancel{12ce^x} - \cancel{12cxe^x} - \cancel{2cx^2e^x}$$
$$+ 4ce^x + \cancel{8cxe^x} + \cancel{2cx^2e^x} - \cancel{4cxe^x} - \cancel{2cx^2e^x}$$
$$+ \cancel{cx^2e^x} = 3 \cdot e^x. \Rightarrow \boxed{4c \cdot e^x = 3e^x}$$

$$4c\cancel{e^x} = 3\cdot\cancel{e^x} \Rightarrow \boxed{c = 3/4}$$

$$\boxed{y_{\iota\delta\iota\alpha\zeta} = \frac{3}{4}x^2\cdot e^x}$$

$$y_{\gamma\epsilon\nu}(x) = y_{o\mu} + y_{\iota\delta\iota\alpha\zeta} =$$

$$y_{\gamma\epsilon\nu} = (c_0 + c_1 x)e^x + c_2\cdot\cos x + c_3\cdot\sin x + \frac{3}{4}x^2\cdot e^x$$

Έστω ότι $h(x) = e^x\cdot\sin 2x.$

$$h(x) = e^{ax}\left[A\cdot\cos(bx) + B\cdot\sin(bx)\right]\cdot P_k(x)$$ → ΓΝΩΣΤΟ

$a = 1$ $\qquad A = 0.$

$b = 2$ $\qquad B = 1$

$P_k(x) = 1.$

$$y_{\iota\delta\iota\alpha\zeta} = e^x\left[c_1\cdot\sin(2x) + c_2\cdot\cos(2x)\right].$$