1ης Τάξης Δ.Ε. Bernoulli.

ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ :

$$\frac{dy}{dx} + A_B(x) \cdot y = B_B(x) \cdot y^{\mu}$$

(*)

συναρτήσεις ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή

(*) το $\mu \neq 0, 1$

- Αν το $\mu = 0$ τότε η Δ.Ε. Bernoulli γίνεται γραμμική
- Αν το $\mu = 1$ —"— —"— —"— γίνεται χωριζομένων μεταβλητών

Μέθοδος Επίλυσης (Βήματα).

- Πολλαπλασιάζω και τα 2 μέλη με $y^{-\mu}$

άρα

$$y^{-\mu}\frac{dy}{dx} + A_B(x)\, y \cdot y^{-\mu} = B_B(x) \cdot y^{\mu} \cdot y^{-\mu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y^{-\mu}\frac{dy}{dx} + A_B(x)\, y^{1-\mu} = B_B(x)} \quad (1)$$

- Θέτω $w(x) = y^{1-\mu}(x)$ (2) άρα παραγωγίζοντας και τα 2 μέλη θα έχω :

$$w'(x) = (1-\mu)\, y^{\cancel{1-\mu-1}}(x) \cdot y'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{w'(x) = (1-\mu) \cdot y'(x) \cdot y^{-\mu}} \rightarrow \frac{w'}{(1-\mu)\cdot y'} = y^{-\mu}$$

- Αντικαθιστώ στην (1) :

$$\frac{w'}{(1-\mu)\cdot \cancel{y'}} \cdot \cancel{y'} + A_B(x) \cdot w(x) = B_B(x) \Rightarrow$$

$w(x) \rightarrow$ εξαρτημένη

$x \rightarrow$ ανεξάρτητη

$$\Rightarrow \boxed{\frac{w'}{1-\mu} + A_B(x) \cdot w(x) = B_B(x)}$$

$$\boxed{\frac{w'}{1-\mu} + A_B(x)\cdot w(x) = B_B(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\boxed{w'} + (1-\mu)\cdot A_B(x)\,\boxed{w(x)} = (1-\mu)\cdot B_B(x)}$$

$\Downarrow$

ΑΥΤΗ ΠΛΕΟΝ ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗ Δ.Ε

$$\left\{\begin{array}{l} A_L(x) = \boxed{(1-\mu)\cdot A_B(x)} \\ B_L(x) = \boxed{(1-\mu)\cdot B_B(x)} \end{array}\right\}$$

με λύση

$$w(x) = e^{-\int A_L(x)\,dx}\left[c + \int B_L(x)\cdot e^{\int A_L(x)\,dx}\,dx\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{w(x) = \cdots\cdots}$$

Από την (2) θα επιστρέψω στην $y(x)$ άρα

$$w(x) = y^{1-\mu}(x) \Rightarrow \boxed{y(x) = [w(x)]^{\frac{1}{1-\mu}}}$$

$\Downarrow$

Αυτή είναι η τελική λύση της (*)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθεί η Δ.Ε. $\boxed{y' + xy = x^3 y^3}$

ΓΕΝ. ΜΟΡΦΗ Bernoulli.

$$\frac{dy}{dx} + A_B(x)\, y = B_B(x) \cdot y^{\mu}$$

$$A_B(x) = x \qquad B_B(x) = x^3. \qquad \text{και} \quad \mu = 3$$

• 1ο ΒΗΜΑ

Πολ/ζω με y^{-3} παντού:

$$y' \cdot y^{-3} + x y \cdot y^{-3} = x^3 y^3 \cdot y^{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y' \cdot y^{-3} + x \cdot y^{-2} = x^3}$$

• 2ο ΒΗΜΑ

Θέτω $\boxed{y^{-2}(x) = w(x)}$ παραγωγίζω $\boxed{-2\, y^{-3}(x) \cdot y'(x) = w'(x)}$

$$\boxed{y' = -\frac{w'}{2 \cdot y^{-3}}}$$

$$- \frac{w'}{2 \cdot \cancel{y^{-3}}} \cdot \cancel{y^{-3}} + x \cdot w = x^3 \Rightarrow$$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ Δ.Ε.

$$\Rightarrow - \frac{w'}{2} + x \cdot w = x^3 \Rightarrow \boxed{w' - 2xw = -2x^3} \ (*)$$

$$\begin{cases} A_L(x) = -2x \\ B_L(x) = -2x^3. \end{cases}$$

$$\boxed{w(x) = e^{-\int A_L(x)\,dx} \left[c + \int B_L(x) \cdot e^{\int A_L(x)\,dx} dx \right]}$$

$$w(x) = e^{-\int (-2x)\,dx} \left[c + \int -2x^3 e^{\int -2x\,dx} dx \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w(x) = e^{\int 2x\,dx} \left[c - \int 2x^3 \cdot e^{-\int 2x\,dx} dx \right]$$

$$w(x) = e^{\int 2x\,dx}\left[c - \int 2x^3 \cdot e^{-\int 2x\,dx}\,dx\right] \quad (*)$$

$$\cdot \int 2x\,dx = \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} = x^2.$$

$$\cdot \int 2x^3 \cdot e^{-x^2}\,dx = 2\int x^3 \cdot e^{-x^2}\,dx = \cancel{2}\cdot\left(-\frac{e^{-x^2}}{\cancel{2}}(x^2+1)\right) = -e^{-x^2}(x^2+1)$$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

$$\int x^3 \cdot e^{-x^2}\,dx =$$

$$\int x \cdot x^2 \cdot e^{-x^2}\,dx = \int x^2 \cdot e^{-x^2} \cdot x\,dx =$$

$$= \int u \cdot e^{-u}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\boxed{\int u \cdot e^{-u}\,du.}$$

Θέτω $\boxed{u = x^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \quad \text{ή}$$

$$\text{ή} \quad du = 2\boxed{x\,dx.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{du}{2} = x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int u \cdot (-e^{-u})'\,du = \frac{1}{2}\left[-ue^{-u} - \int(-e^{-u}) \cdot \cancel{u'}^{\,1}\,du\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-ue^{-u} + \int e^{-u}\,du\right) = \frac{1}{2}\left(-ue^{-u} + (-e^{-u})\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-ue^{-u} - e^{-u}\right) = -\frac{e^{-u}}{2}(u+1) =$$

$$= \boxed{-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1)}$$

$$(-e^{-u})' = -e^{-u} \cdot (-u)' = e^{-u}$$

$$(*)\ w(x) = e^{x^2}\left[c - \left(-e^{-x^2}(x^2+1)\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{w(x) = e^{x^2}\left(c + e^{-x^2}(x^2+1)\right)}$$

$$w(x) = y^{-2}(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^{-2}(x) = e^{x^2}\left(c + e^{-x^2}(x^2+1)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^2(x)} = e^{x^2}\left(c + e^{-x^2}(x^2+1)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2(x) = \frac{1}{e^{x^2}\left(c + e^{-x^2}(x^2+1)\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{e^{x^2}\left(c + e^{-x^2}(x^2+1)\right)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \pm\left[e^{x^2}\left(c + e^{-x^2}(x^2+1)\right)\right]^{-1/2}} \Leftarrow$$

$$y' + 2xy = 2x^3 \cdot y^3.$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} A_B(x) = 2x & \\ B_B(x) = 2x^3 & \mu = 3. \end{array}}$$

- Πολ/ζω με $y^{-\mu} \to y^{-3}$.

$$\boxed{y' \cdot y^{-3} + 2xy^{-2} = 2x^3} \Leftarrow$$

- Θέτω $y^{-2} = w \Rightarrow w' = -2 \cdot y^{-3} \cdot y'$

$$\frac{w'}{-2\cancel{y^{-3}}} \cdot \cancel{y^{-3}} + 2xw = 2x^3 \Rightarrow$$

$$-\frac{w'}{2} + 2xw = 2x^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{w' - 4xw = -4x^3}$$

$$\boxed{w' - 4xw = -4x^3}$$

$$A_1(x) = -4x$$

$$B_1(x) = -4x^3.$$

$$w(x) = e^{-\int A_1(x)\,dx}\left[c + \int B_1(x)\cdot e^{\int A_1(x)\,dx}\,dx\right] =$$

$$= e^{-\int(-4x)\,dx}\left[c + \int -4x^3\cdot e^{\int -4x\,dx}\,dx\right] =$$

$$= e^{\int 4x\,dx}\left[c - \int 4x^3\cdot e^{-\int 4x\,dx}\,dx\right]$$

- $\int 4x\,dx = \cancel{4}^{2}\cdot\dfrac{x^2}{\cancel{2}} = 2x^2$

- $\int 4x^3\cdot e^{-2x^2}\,dx =$ $\longrightarrow$ Θέτω $u = 2x^2$

$$\boxed{du = 4x\,dx}$$

ΛΥΣΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ......

και φυσικά λύση της Δ.Ε. $y(x) = \dots$