$$\cdot \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \lim_{u\to+\infty} \boxed{\int_3^{u} \frac{dx}{x^2+x-2}}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΕ ΑΠΛΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

$$\int \frac{dx}{x^2+x-2} \qquad x^2+x-2 \to 1,\ -2$$

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} \Rightarrow$$

$$1 = \frac{A\cdot\cancel{(x+2)}\cdot(x-1)}{\cancel{x+2}} + \frac{B\cdot(x+2)\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = A\cdot(x-1) + B\cdot(x+2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = (A+B)x + (2B-A) \Rightarrow$$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

$$\Rightarrow 0\cdot x + 1 = (A+B)x + (2B-A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \Rightarrow A=-B \Rightarrow \boxed{A=-1/3} \\ 2B-A=1 \Rightarrow 2B+B=1 \Rightarrow 3B=1 \Rightarrow \boxed{B=1/3} \end{cases}$$

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{-1/3}{x+2} + \frac{1/3}{x-1} = -\frac{1}{3(x+2)} + \frac{1}{3\cdot(x-1)}$$

$$\int \frac{1}{x^2+x-2}dx = \int \frac{1}{(x+2)(x-1)}dx = \int -\frac{1}{3(x+2)} + \frac{1}{3\cdot(x-1)}dx =$$

$$= -\int \frac{1}{3(x+2)}dx + \int \frac{1}{3(x-1)}dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x+2}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx$$

$$\boxed{\left(-\frac{1}{3}\ln|x+2| + \frac{1}{3}\ln|x-1|\right)}$$

$$= -\frac{1}{3}\ln(x+2) + \frac{1}{3}\ln(x-1) =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln(x-1) - \ln(x+2)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\frac{(x-1)}{(x+2)}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

$$\int \frac{1}{x+2}dx = \int \frac{(x+2)'}{x+2}dx = \ln(x+2)$$

$$(x+2)' = 1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln f(x).$$

$$\ln A - \ln B = \ln A/B$$

$$\int_3^{u} \frac{1}{x^2+x-2}dx = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\Bigg|_3^{u} = \frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{u-1}{u+2}\right) - \ln\left(\frac{2}{5}\right)\right] \stackrel{*}{=}$$

(*) $\frac{1}{3}\ln\left[\dfrac{\frac{u-1}{u+2}}{\frac{2}{5}}\right] = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{5\cdot(u-1)}{2\cdot(u+2)}\right)$ ✓ → Λύση του ορισμένου ολοκληρώματος στο κόκκινο κουτί.

$$\int_3^{+\infty}\frac{1}{x^2+x-2}\,dx = \lim_{u\to+\infty}\int_3^{u}\frac{dx}{x^2+x-2} =$$

$$= \lim_{u\to+\infty}\frac{1}{3}\ln\left(\frac{5\cdot(u-1)}{2\,(u+2)}\right) = \frac{1}{3}\lim_{u\to+\infty}\boxed{\ln}\left(\frac{5\cdot(u-1)}{2\cdot(u+2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left[\lim_{u\to+\infty}\frac{5\cdot(u-1)}{2\cdot(u+2)}\right] = \frac{1}{3}\ln\left[\lim_{u\to+\infty}\frac{5}{2}\right] =$$

$$= \boxed{\frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{2}\right)}$$

Άρα το γ.ο. συγκλίνει

ΚΑΝΟΝΑΣ de L'Hospital (Απροσδιοριστία)

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\frac{f'(x)}{g'(x)} \checkmark$$

$$\lim\left[\ln(f(x))\right] = \ln\left[\lim(f(x))\right] \checkmark$$

(*) Β' ΤΡΟΠΟΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ:

Όταν έχω πηλίκο πολυωνύμων ίδιου βαθμού τότε για τον υπολογισμό του ορίου μπορώ να χρησιμοποιήσω το πηλίκο των μεγιστοβάθμιων όρων.

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{5(u-1)}{2(u+2)} = \lim_{u\to+\infty}\frac{5\cancel{u}}{2\cancel{u}} = \lim_{u\to+\infty}\frac{5}{2} = \boxed{\frac{5}{2}}$$

$\int_0^1 \ln x\,dx \to$ γ.ο. 2ου είδους

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty.$$

$\ln e = 1$

$\ln 1 = 0$

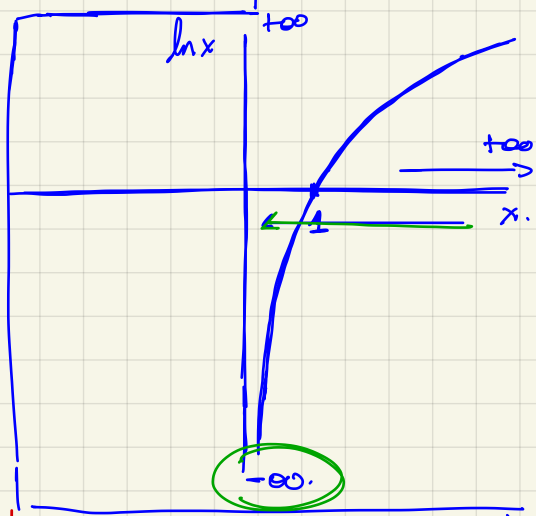
$$= \lim_{u\to 0} \boxed{\int_u^1 \ln x\,dx} \overset{(*)}{=}$$

Θέτω

~~$x = w$~~

~~$\ln x = w.$~~

$\boxed{\frac{1}{x}\,dx = dw}$



$$\int_u^1 \ln x\,dx = \int_u^1 1\cdot \ln x\,dx = \int_u^1 \underset{g}{(x)'}\cdot \underset{f}{\ln x}\,dx =$$

$$\boxed{\int f\cdot g'\,dx = f\cdot g - \int f' g\,dx}$$

$$= [x\cdot \ln x]\Big|_u^1 - \int_u^1 \cancel{x}\cdot \frac{1}{\cancel{x}}\,dx =$$

$$= x\ln x\Big|_u^1 - x\Big|_u^1 = (1\cdot \cancel{\ln 1}^{\,0} - u\cdot \ln u) - (1-u) =$$

$$= \boxed{-u\ln u - 1 + u}$$

$$\overset{*}{=} \lim_{u\to 0}(-u\ln u - 1 + u) = \begin{cases} \to -\infty \\ \to +\infty \\ \to \end{cases}$$

$$= \lim_{u\to 0}(-u\ln u) + \Big(-\overbrace{\lim_{u\to 0} 1}^{=-1}\Big) + \cancel{\lim_{u\to 0} u}^{\,0} = -\boxed{\cancel{\lim_{u\to 0}(u\cdot \ln u)}^{\,0}} - 1 = \boxed{-1}$$

$$\lim_{u\to 0} u\cdot \ln u = \lim_{u\to 0} \boxed{\frac{\ln u}{1/u}} = \lim_{u\to 0} \frac{(\ln u)'}{(1/u)'} = \lim_{u\to 0} \frac{1/u}{-1/u^2} =$$

$$= \lim_{u\to 0} -\frac{u^{\cancel{2}}}{\cancel{u}} = 0.$$

$$\frac{\frac{\ln u}{1}}{1/u} = u\ln u$$

ΑΡΑ ΤΟ Γ.Ο 2ου ΕΙΔΟΥΣ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ.

- $f(x)$, $g(x)$ .... $x \in \mathbb{R}$
- $\boxed{f(x,y)}$ → Συνάρτηση 2 μεταβλητών
  όπου $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

  πραγματικό επίπεδο

$f(x)$

$$f'(x) = \frac{d f(x)}{dx}$$

$\cancel{f_1(x,y)}$

$\boxed{f(x,y)}$ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ →

$\boxed{\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}}$ → ΜΕΡΙΚΗ ΠΑΡΑΓ. ως προς x

$\boxed{\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}}$ → ΜΕΡΙΚΗ ΠΑΡΑΓ ως προς y

$\cancel{f'(x,y)}$

$\Theta(x,y,z,t)$ → ΦΥΣΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$$\frac{\partial \Theta(x,y,z,t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Theta(x,y,z,t)}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Theta(x,y,z,t)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \Theta(x,y,z,t)}{\partial t}.$$