ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ.

$1^{ου}$ είδους γενικευμένο ολοκλήρωμα.

- Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $1^{ου}$ είδους γενικεύει την έννοια του γενικευμένου ολοκληρώματος για διαστήματα ολοκλήρωσης της μορφής

$[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ και $(-\infty, +\infty)$

$\underset{\text{κάτω όριο}}{a}$, $\underset{\text{πάνω όριο}}{+\infty}$

<u>Ορισμός</u>: Αν μια πραγματική συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, x]$ με $x \in [a, +\infty)$ τότε το όριο

$\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ ονομάζεται γενικευμένο ολοκλήρωμα $1^{ου}$ είδους

και συμβολίζεται ως εξής:
$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{\int_a^{\boxed{x}} f(t)\,dt}_{\text{ορισμένο.}} = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Όταν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[x, b]$ με $x \in (-\infty, b]$ τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $1^{ου}$ είδους έχει την εξής μορφή:
$$\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt = \lim_{x \to -\infty} \int_x^b f(t)\cdot dt.$$

Επίσης εαν η πραγματική μου συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a, b]$ τότε το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ ορίζεται ως εξής:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{με } c \in \mathbb{R}$$

δηλαδή $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \int_{x}^{c} f(t)\,dt + \lim_{x\to+\infty} \int_{c}^{x} f(t)\,dt = \ldots\ldots$$

Συγκλίνει μόνο όταν και τα 2 όρια υπάρχουν; δηλαδή όταν συγκλίνουν και τα 2 γενικευμένα ολοκληρώματα που εμφανίστηκαν κατά την επίλυση.

Ενώ θα λέμε ότι ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ όταν τουλάχιστον ένα από τα παραπάνω αποκλίνει.

~~ΠΟΣΟ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ~~ ?

ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ ΤΟ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ✓

ΠΡΟΣΟΧΗ: Για τα 2 πρώτα γενικευμένα

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to+\infty} \underbrace{\int_{a}^{M} f(x)\,dx}_{g(M)}$$

και

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{k\to-\infty} \int_{k}^{a} f(x)\,dx \;\checkmark$$

αν το όριο υπάρχει στο $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ δηλαδή αν το όριο είναι πραγματικός αριθμός τότε το ολοκλήρωμα **ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ**.

Αλλιώς αν το όριο είναι $\pm\infty$ τότε λέμε ότι **ΑΠΟΚΛΙΝΕΙ** στο $\pm\infty$ αντίστοιχα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 1ου είδους

Για ποιές τιμές το k συγκλίνει και για ποιές αποκλίνει το παρακάτω γενικευμένο.

$$\bullet \int_a^{+\infty} e^{-kx}\,dx = $$

$$= \lim_{x\to+\infty} \int_a^x e^{-kt}\,dt = (*) \ldots\ldots$$

$$= \lim_{M,\,U,\,y\to+\infty} \int_a^{y,\,U,\,M} e^{-kx}\,dx$$

$$\int_a^x \underline{e^{-kt}}\,dt = -\frac{e^{-kt}}{k}\Bigg|_a^x = $$

$$= -\frac{e^{-kx}}{k} + \frac{e^{-ka}}{k}$$

$$\left(\,?\, \right)' = \underline{e^{-kt}}$$

$$\left(-\frac{1}{k} e^{-kt}\right)' = \underline{e^{-kt}}$$

Επομένως μένει ο υπολογισμός του ορίου της παραπάνω συνάρτησης που προήλθε από την λύση του ορισμένου ολοκληρώματος

$$\overset{*}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-ka}}{k} - \frac{e^{-kx}}{k}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-ka}}{k}\right) - \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-kx}}{k}\right) = $$

$$= \frac{e^{-ka}}{k} - \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-kx}}{k}\right) = \begin{cases} \xrightarrow{k>0} \dfrac{e^{-ka}}{k} & \text{τότε το γενικευμένο συγκλίνει} \\ \xrightarrow{k\leq 0} +\infty & \text{τότε το γενικευμένο αποκλίνει} \end{cases}$$

$k > 0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-kx}}{k}\right) = \frac{e^{-\infty}}{k} = \frac{1}{k\cdot e^{+\infty}} = 0.$$

$k \leq 0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-kx}}{k}\right) = \frac{e^{-k(+\infty)}}{k} = \frac{e^{+\infty}}{k} = -\infty$$

$$\cdot \int_0^{+\infty} e^{-3x}\,dx = \lim_{u \to +\infty} \int_0^{u} e^{-3x}\,dx =$$

$$\left(-\frac{e^{-3x}}{3}\right)' = -\frac{1}{3} e^{-3x} (-3x)' = -\cancel{\tfrac{1}{3}} \cdot e^{-3x} \cancel{(-3)}$$

$$= \lim_{u \to +\infty} \left[-\frac{e^{-3x}}{3}\right]_0^{u} =$$

$$= \lim_{u \to +\infty} -\left[\frac{e^{-3u}}{3} - \frac{e^{0}}{3}\right] = \lim_{u \to +\infty} -\left(\frac{e^{-3u}}{3} - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \lim_{u \to +\infty} \underbrace{\left(-\frac{e^{-3u}}{3} + \frac{1}{3}\right)}_{} = 0 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$+\infty$

$\frac{1}{3}$ ✓

$-\infty$.

$$-\frac{e^{-\infty}}{3} + \frac{1}{3} = \cancel{-\frac{1}{3 \cdot e^{+\infty}}} \to 0 \; + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Επομένως αφού το όριο υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα 1ου είδους $\int_0^{+\infty} e^{-3x}dx \longrightarrow$ συγκλίνει στο $\frac{1}{3}$