$$\bullet \int (\sqrt{x}+1)\cdot(x+\sqrt{x}+1)\,dx = \int x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1\,dx =$$

$$= \int x\sqrt{x}+2x+2\sqrt{x}+1\,dx = \int x\sqrt{x}\,dx + \int 2x\,dx + \int 2\sqrt{x}\,dx + \int dx =$$

$$= \int x^{3/2}\,dx + \int 2x\,dx + \int 2x^{1/2}\,dx + \int dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{2x^2}{2} + 2\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} + x + C' =$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + x^2 + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + x + C$$

$$\bullet \int \frac{1}{e^x+1}\,dx =$$

$$\int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,dx =$$

[Σκέψη] $(e^x+1)' = e^x$

$$= \int \frac{1+e^x}{1+e^x}\,dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx =$$

$$= \int 1\,dx - \int \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\,dx = \boxed{x - \ln(1+e^x) + C'}$$

$(\dots)' = x^{3/2}$???

$(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$

$n-1 = \frac{3}{2} \Rightarrow n = \frac{3}{2}+1 = \frac{5}{2}$

$\left(x^{5/2}\right)' = \frac{5}{2}x^{3/2} =$

$\left(\frac{2}{5}x^{5/2}\right)' = \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}x^{3/2} = x^{3/2}$

$$\bullet \int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx =$$

$\frac{x}{2} = u$

$\frac{dx}{2} = du$

$$= \int \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx = \int \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{dx}{2} = du$$

$$= \int \frac{\cos u}{\sin u\cdot\cos^2 u}\,du = \int \frac{1}{\tan u\cdot\cos^2 u}\,du$$

$\tan u = \frac{\sin u}{\cos u}$

$\frac{\cos u}{\sin u} = \frac{1}{\tan u}$

$$(\tan u)' = \left(\frac{\sin u}{\cos u}\right)' = \frac{(\sin u)'\cos u - \sin u\cdot(\cos u)'}{\cos^2 u} =$$

$$= \frac{\cos^2 u + \sin^2 u}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u}$$

$$\int \frac{1}{\tan u \cdot \cos^2 u}\, du = \int \frac{(\tan u)'}{\tan u}\, du = \ln(\tan u) + c_1 =$$

$$= \boxed{\ln\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + c_1'}$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln(f(x)) + c_1}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Β' ΤΡΟΠΟΣ

$1 + e^x = u \Rightarrow$ $\boxed{e^x = u - 1}$

$e^x\, dx = du \Rightarrow$

$dx = \dfrac{du}{e^x}$, $e^x \to u-1$

$$\boxed{dx = \frac{du}{u-1}}$$

$$\int \frac{1}{e^x + 1}\, dx = \int \frac{1}{u} \frac{du}{u-1} = \ldots\ldots$$

ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ (ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΕ ΑΠΛΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ)

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\, dx$$

- Ο βαθμός του παρονομαστή > βαθμό του αριθμητή.
- Η $g(x)$ να έχει πραγματικές ρίζες.
- $f(x), g(x) \to$ πολυώνυμα.

Έστω: $\dfrac{x}{x^2 - 6x + 8} = \dfrac{x}{1(x-4)\cdot(x-2)} = \dfrac{x}{(x-4)\,(x-2)}$

1ο ΒΗΜΑ: Ρίζες του παρονομαστή → 4, 2

Γεν. $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1)\,(x - x_2)$ → ρίζες του πολυωνύμου.

2º ΒΗΜΑ

$$\frac{x}{(x-4)\cdot(x-2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-2} \quad (1)$$

A = ? B = ?

(*) ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΛΟΥΜΕ ΣΤΟΝ ΑΡΙΘΜΗΤΗ ΕΝΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΚΑΤΑ ΕΝΑ ΒΑΘΜΟ ΜΙΚΡΟΤΕΡΟ ΤΟΥ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ.

ΓΕΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ : $c_0 + c_1x^1 + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots\ldots + c_nx^n$.

1ου βαθμού

2ου βαθμού

3ου βαθμού.

. . . . .

3º ΒΗΜΑ [Βρίσκω τα A και B]

$$\frac{x}{(x-4).(x-2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-2}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = (x-4)(x-2)\left[\frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{A.(x-4).(x-2)}{x-4} + \frac{B.(x-4).(x-2)}{x-2}$$

$$\Rightarrow x = A.(x-2) + B.(x-4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = Ax - 2A + Bx - 4B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = (A+B)x - 2A - 4B}$$ ⟹ Εξίσωση 2 πολυωνύμων.

$$1\cdot x + 0 = (A+B)x - 2A - 4B$$

$$\left.\begin{matrix} A+B=1 \\ -2A-4B=0 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 2A+2B=2 \\ -2A-4B=0 \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} -2B=2 \Rightarrow \boxed{B=-1}$$

$$A+B=1 \Rightarrow \boxed{A=2}$$

4ο ΒΗΜΑ : [Άρα η σχέση (1)

$$\frac{x}{(x-4)\cdot(x-2)} = \frac{2}{x-4} + \frac{(-1)}{x-2} = \frac{2}{x-4} - \frac{1}{x-2}$$

παράδειγμα

$$\int \frac{x}{x^2-6x+8}\,dx = \int \frac{x}{(x-4)(x-2)}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-4} - \frac{1}{x-2}\right) dx =$$

Αναλύω την διαίρεση σε απλά κλάσματα

$$= \int \frac{2}{x-4}\,dx - \int \frac{1}{x-2}\,dx =$$

$$= 2\int \frac{(x-4)'}{x-4}\,dx - \int \frac{(x-2)'}{x-2}\,dx =$$

$(x-4)' = 1$

$(x-2)' = 1$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$

$$= 2\cdot \ln(x-4) - \ln(x-2) + c_1 =$$

$$= \ln(x-4)^2 - \ln(x-2) + c_1 =$$

$\ln A - \ln B = \ln\left(\frac{A}{B}\right)$

$\ln x^a = a\cdot \ln x$

$$= \boxed{\ln \frac{(x-4)^2}{x-2} + c_1}$$