ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ.

• $$\int_{-\infty}^{1} e^x\,dx = \lim_{u\to-\infty} \boxed{\int_u^1 e^x\,dx} =$$

$$\int_u^1 e^x\,dx = e^x\Big|_u^1 = e^1 - e^u$$

$$= \lim_{u\to-\infty}\left(e-e^u\right) = \lim_{u\to-\infty} e - \cancel{\lim_{u\to-\infty} e^u}^{\to 0} =$$

$= e \to$ Συγκλίνει διότι το όριο υπάρχει.

$$\lim_{u\to-\infty} e^u = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} \to 0.$$

• $$\int_a^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \lim_{u\to+\infty} \boxed{\int_a^u \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx} \stackrel{(**)}{=}$$

$$\cancel{\int f\cdot g\,dx = \int f\,dx\cdot\int g\,dx}$$

$$\int_a^u \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{2(x^2+1)}\Bigg|_a^u \stackrel{(*)}{=}$$

Θέτω

$x^2+1 = w \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x\,dx = dw \Rightarrow x\,dx = \frac{dw}{2}$

Αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{dw/2}{w^2} =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dw}{w^2} = \frac{1}{2}\int w^{-2}\,dw =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{w}\right) = \boxed{-\frac{1}{2w}}$$

ΔΟΚΙΜΗ

$$\left(\frac{w^{-3}}{-3}\right)' = \frac{\cancel{-3}\cdot w^{-4}}{\cancel{-3}} = w^{-4}$$

↳ ΟΧΙ ΛΥΣΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ.

$$\left(-w^{-1}\right)' = -(-1)\cdot w^{-2} = w^{-2}$$

Άρα επιστρέφω στη λύση το x : $\boxed{-\frac{1}{2(x^2+1)}}$

$$\stackrel{(*)}{=} -\frac{1}{2(u^2+1)} + \frac{1}{2(a^2+1)}$$

→ το όριο υπάρχει άρα το αρχικό μας γ.ο. συγκλίνει.

$$\stackrel{(**)}{=} \lim_{u\to+\infty}\left(-\frac{1}{2(u^2+1)} + \frac{1}{2\cdot(a^2+1)}\right) = \frac{1}{2(a^2+1)}$$ ✓

Λύση ορισμένου ολοκληρώματος

$$\int_{a}^{u} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int_{\cancel{a} \to a^2+1}^{\cancel{u} \to u^2+1} \frac{dw/2}{w^2} =$$

Θέτω

$x^2+1 = w$

$2x\,dx = dw$

$x\,dx = \frac{dw}{2}$

→ νέα όρια ολοκλήρωσης

$x = a \;\rightarrow\; w = a^2+1$

$x = u \;\rightarrow\; w = u^2+1$

$$= \frac{1}{2}\int_{a^2+1}^{u^2+1} \frac{dw}{w^2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{w}\right)\Bigg|_{a^2+1}^{u^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{w}\right)\Bigg|_{a^2+1}^{u^2+1} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{u^2+1} - \frac{1}{a^2+1}\right] =$$

$$= \boxed{-\frac{1}{2(u^2+1)} + \frac{1}{2\cdot(a^2+1)}}$$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{u\to+\infty}\int_{1}^{u} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{u\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{2}\Bigg|_{1}^{u} =$$

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int w\cdot dw = \;= \frac{w^2}{2} = \;= \frac{(\ln x)^2}{2}$$

θέτω $\ln x = w$

$\frac{1}{x}\,dx = dw$

$$= \lim_{u\to+\infty}\left[\frac{(\ln u)^2}{2} - \frac{(\cancel{\ln 1})^2}{2}\right] =$$

(0)

$$= \lim_{u\to+\infty} \frac{(\ln u)^2}{2} = \frac{1}{2}\lim_{u\to+\infty}(\ln u)^2 =$$

$$= \boxed{+\infty} \rightarrow$$ ΑΠΟΚΛΙΝΕΙ ΤΟ Γ.Ο.

Ν.Δ. αν συγκλίνει ή αν αποκλίνει το γ.ο.:

$$\int_0^{+\infty} x\cdot e^{-sx}\,dx, \quad \text{όπου } s>0.$$

$$\left(\frac{e^{-sx}}{-s}\right)' = -\frac{1}{s}\cdot e^{-sx}\cdot(-sx)' = \cancel{-}\frac{1}{\cancel{s}}\cdot\cancel{(-s)}\cdot e^{-sx} = e^{-sx}$$

$$\int_0^{+\infty} x\, e^{-sx}\,dx = \lim_{u\to+\infty}\int_0^u x\cdot e^{-sx}\,dx =$$

$$= \lim_{u\to+\infty}\left(-\frac{xe^{-sx}}{s} - \frac{e^{-sx}}{s^2}\right)\Bigg|_0^u =$$

$$= \lim_{u\to+\infty}\left[\left(-\frac{ue^{-su}}{s} - \frac{e^{-su}}{s^2}\right) - \left(0 - \frac{1}{s^2}\right)\right] =$$

$$= \lim_{u\to+\infty}\left(\underbrace{-\frac{ue^{-su}}{s}}_{0} - \boxed{\frac{e^{-su}}{s^2}}^{\to 0} + \frac{1}{s^2}\right) =$$

$$= \boxed{1/s^2} \rightarrow \text{Το γ.ο. συγκλίνει στο } 1/s^2$$

ΛΥΣΗ ΩΣ ΑΟΡΙΣΤΟ

$$\int x\,\boxed{e^{-sx}}\,dx = \int \underset{f}{x}\,\underset{g}{\left(\frac{e^{-sx}}{-s}\right)'}\,dx = *$$

$$\int f\cdot g'\,dx = f\cdot g - \int f'\cdot g\cdot dx$$

$$* \; x\cdot\left(-\frac{e^{-sx}}{s}\right) - \int 1\cdot\frac{e^{-sx}}{-s}\,dx =$$

$$= -\frac{x\cdot e^{-sx}}{s} + \frac{1}{s}\underbrace{\int e^{-sx}\,dx}_{-\frac{e^{-sx}}{s}} =$$

$$= \boxed{-\frac{x\cdot e^{-sx}}{s} - \frac{e^{-sx}}{s^2}}$$

$$\lim_{u\to+\infty} -\frac{ue^{-su}}{s} = -\frac{1}{s}\lim_{u\to+\infty} u\cdot e^{-su}$$

$$= -\frac{1}{s}\boxed{\lim_{u\to+\infty}\frac{u}{e^{+su}}} \quad \begin{matrix}\to \text{πολυωνυμική} \\ \to \text{εκθετική}\end{matrix} = 0$$

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{s\cdot e^{su}} \longrightarrow \boxed{0}$$

$$(e^{su})' = e^{su}\cdot s$$

$$f(u) = u$$

$$g(u) = e^{su}$$

$u = 5, 100, 1000 \ldots\ldots$

$g(5) = e^{5s}$

$g(100) = e^{100s}$

ΓΕΝ. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ 2ου ΕΙΔΟΥΣ

Ένα ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ λέγεται γ.ο. 2ου είδους αν η ολοκληρωτέα συνάρτηση απειρίζεται σε ένα ή περισσότερα (πεπερασμένου πλήθους) σημεία του διαστήματος $x \in [a,b]$.

• $$\int_1^4 \frac{x+1}{x^2-5x+6}\,dx$$

$x \in [1,4]$ $\longrightarrow$ $x_1=2$, $x_2=3$

απειρίζουν την ολοκληρωτέα συνάρτηση $\longrightarrow$ γ.ο. 2ου είδους

ρίζες του παρονομαστή

$x_1=2$, $x_2=3$

$$\frac{x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΕ ΑΠΛΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ.

$$\int_7^{11} \frac{x+1}{x^2-5x+6}\,dx = \dots\dots$$

$\longrightarrow$ ΣΕ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ