Άσκηση 1η (Ορίζουσα 3×3).

$$\begin{vmatrix} 3 & -\frac{2}{3} & 7 \\ -6 & 4 & 9 \\ 1 & \frac{5}{2} & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ \frac{5}{2} & -2 \end{vmatrix} + \frac{2}{3}\begin{vmatrix} -6 & 9 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 1 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= 3\left(4(-2) - 9\cdot\frac{5}{2}\right) + \frac{2}{3}\left(-6(-2) - 1\cdot 9\right) + 7\left(-6\cdot\frac{5}{2} - 1\cdot 4\right) =$$

$$= 3\cdot\left(-8 - \frac{45}{2}\right) + \frac{2}{3}(-12-9) + 7\cdot\left(-\frac{30}{2} - 4\right) =$$

$$= 3\cdot\left(-\frac{16}{2} - \frac{45}{2}\right) + \frac{2}{3}(-21) + 7\cdot\left(-\frac{30}{2} - \frac{8}{2}\right) =$$

$$= 3\cdot\left(-\frac{61}{2}\right) - \frac{42}{3} + 7\cdot\left(-\frac{38}{2}\right) = -\frac{183}{2} - \frac{42}{3} - \frac{966}{2} =$$

$$= \text{[illegible]} \left(-\frac{549}{6} - \frac{84}{6} - \frac{798}{6}\right) =$$

$$= \frac{1431}{6}$$

Άσκηση 2η (Ορίζουσα 4×4).

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \\ -4 & 6 & 2 & -3 \\ 9 & 10 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \\ 10 & 6 & -2 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 \\ -4 & 2 & -3 \\ 9 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

$$+ 3\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -4 & 6 & -3 \\ 9 & 10 & -2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -4 & 6 & 2 \\ 9 & 10 & 6 \end{vmatrix} = -2\left[1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 10 & -2 \end{vmatrix}\right.$$

IDIA

$\boxed{\text{Άσκηση 3}}$ (Ορίζουσα 3x3 με πραγμ.).

Έστω $\begin{vmatrix} -1,2 & 2,3 & 4,5 \\ 7 & -3,1 & 5 \\ -4,5 & 5,5 & 2,6 \end{vmatrix} =$

$= -1,2 \begin{vmatrix} -3,1 & 5 \\ 5,5 & 2,6 \end{vmatrix} - 2,3 \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -4,5 & 2,6 \end{vmatrix} + 4,5 \begin{vmatrix} 7 & -3,1 \\ -4,5 & 5,5 \end{vmatrix} =$

$= -1,2(-8,06-27,5) - 2,3\cdot(18,2+22,5) + 4,5\cdot(38,5-13,95) =$

$= -1,2\cdot(-35,56) - 2,3\cdot(40,7) + 4,5\cdot(24,55) =$

$= +42,672 - 93,61 + 110,475 = 59,537.$

$\boxed{\text{Άσκηση 4}}$ (Άσκηση 1.14 (σελ 29)) $\longrightarrow$ ΠΑΛΙΟ ΘΕΜΑ.

Αν $\underset{\sim}{A}$ και $\underset{\sim}{B}$ είναι 3x3 πίνακες με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς και ισχύει:

$$\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

<u>ν.δ.ο:</u> $\underset{\sim}{A}$ και $\underset{\sim}{B}$ είναι αντιστρέψιμοι.

<u>Λύση</u>

$\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow |\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$

Συνέχεια άσκησης 4η

$$|A|\cdot|B| = 1\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix} \iff$$

$$|A|\cdot|B| = 1\cdot(-1(-1)-0\cdot 2) - 3\cdot(-1\cdot(-1)-2\cdot 2) =$$

$$= 1\cdot(+1) - 3\cdot(+1-4) = +1+9 = 10 \neq 0.$$

Άρα $|A| \neq 0$ και $|B| \neq 0$

Επομένως οι A και B είναι αντιστρέψιμοι.

Άσκηση 5η (Παράδειγμα σελ. 18).

Έστω $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{bmatrix}$

Αρχικά: $|A| = 2\begin{vmatrix}3 & 4\\ -2 & 3\end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix}6 & 4\\ 5 & -3\end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix}6 & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix} =$

$$= 2(9+8) - 5(-18-20) + 7\cdot(-12-15) =$$

$$= 2\cdot 17 - 5\cdot(-38) + 7\cdot(-27) \neq 0.$$

Άρα ο A αντιστρέφεται.

Ο Gauss-Jordan επαυξημένος του A είναι:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 7\\ 0 & 1 & 0 & 6 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -3\end{bmatrix} \xrightarrow{(\Gamma_2-\Gamma_3)\to\Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 7\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 5 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -3\end{bmatrix} \text{---}\ldots$$

$$\xrightarrow{(\Gamma_1-2\Gamma_2)\to\Gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & -5 & -7\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 5 & 7\\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -3\end{bmatrix} \xrightarrow{(\Gamma_3-5\Gamma_2)\to\Gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & -5 & -7\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 5 & 7\\ 0 & -5 & 6 & 0 & -27 & -38\end{bmatrix} -$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1+\Gamma_2\to\Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & -5 & -7\\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 6 & 0 & -27 & -38\end{bmatrix} \xrightarrow{(\Gamma_3-5\Gamma_1)\to\Gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & -5 & -7\\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -5 & 5 & -4 & 0 & -2 & -3\end{bmatrix} -$$

$$\xrightarrow{(\Gamma_1-2\Gamma_3)\to\Gamma_1}\begin{bmatrix} 11 & -12 & 10 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & -4 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \dots$$

$$\xrightarrow{(\Gamma_3-2\Gamma_1)\to\Gamma_3}\begin{bmatrix} 11 & -12 & 10 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -27 & 29 & -24 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\Gamma_1-\Gamma_3)\to\Gamma_1}\begin{bmatrix} 38 & -41 & 34 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -27 & 29 & -24 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-\Gamma_1)\to\Gamma_1}\begin{bmatrix} -38 & 41 & -34 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -27 & 29 & -24 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-\Gamma_3)\to\Gamma_3}\begin{bmatrix} -38 & 41 & -34 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 27 & -29 & 24 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{\Gamma_1\leftrightarrow\Gamma_2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -38 & 41 & -34 & 0 & 1 & 0 \\ 27 & -29 & 24 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς $\underset{\sim}{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}.$

Άσκηση 6η

1

→ [56].

Ασκη ~~...~~

Δίνεται ο πίνακας:

$$\underset{\sim}{A}(x) = \begin{bmatrix} 3^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α) Ν.δ.ο: $A(x+y)=A(x)\cdot A(y)$ και $A(0)=I$.

β) Ν.δ.ο: Ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος $\forall\, x \in \mathbb{R}$ και να βρεθεί ο αντίστροφός του.

γ) Να λυθεί η: $A(3x)=A(x^3+2)$.

Λύση

α) $A(x)\cdot A(y)=\begin{bmatrix}3^x & 0 & 0\\ 0 & 1 & x\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3^y & 0 & 0\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$

$=\begin{bmatrix}3^{x+y} & 0 & 0\\ 0 & 1 & x+y\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=A(x+y)$

Επίσης: $A(0)=\begin{bmatrix}3^0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I.$

Θέτω όπου y το $-x$

β) $A(x)\cdot A(-x)=A(x-x)=A(0)=I.$

Άρα: $(A(x))^{-1}=A(-x).$

γ)

$A(3x)=A(x^3+2)\Leftrightarrow\begin{bmatrix}3^{3x} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3x\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^{x^3+2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & x^3+2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow 3x=x^3+2 \Leftrightarrow x^3-3x+2=0$ (Horner)

με ρίζα το 1. Άρα. $(x-1)(x^2+x-2)=0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(x-1)(x+2)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)=0$

$x=1$ ή $x=-2$

Άσκηση 7η

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί ο βαθμός.

$$\underset{\sim}{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 10 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\left(\frac{\Gamma_1}{2}\right) \to \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 10 & 12 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{(\Gamma_1 + \Gamma_2) \to \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 7 \\ 1 & 10 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\Gamma_3 - \Gamma_1) \to \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 7 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{(\Gamma_3 - \Gamma_2) \to \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\left(\frac{\Gamma_2}{7}\right) \to \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rank}(\underset{\sim}{A}) = 2.$

Άρα $|\underset{\sim}{A}| = 0 \Leftrightarrow \nexists\, A^{-1}.$

Άσκηση 8η (Άσκηση 139 (σελ 47))

2

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} \ln x & \ln x - 2 \\ 1 & \ln x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 5 \\ 4 & 10 & 6 \end{vmatrix}$$

Λύση

Έχω: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 5 \\ 4 & 10 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} =$

$= 2(42-50) - 4\cdot(18-20) + 6\cdot(30-28) =$

$= 2\cdot(-8) - 4\cdot(-2) + 6\cdot(+2) = -16 + 8 + 12$

$= 4.$

Επίλυση: $\begin{vmatrix} \ln x & \ln x-2 \\ 1 & \ln x \end{vmatrix} = \ln^2 x - \ln x + 2$

Άρα: $\ln^2 x - \ln x + 2 = 0. \Leftrightarrow$ Θέτω $\ln x = \omega$

$\omega^2 - \omega + 2 = 0.$

$\Delta = 9$ και $\omega_1 = \frac{1+3}{2} = 2$

$\omega_2 = \frac{1-3}{2} = -1.$

Άρα: $\ln x_1 = \omega_1 \Leftrightarrow \ln x_1 = 2 \Leftrightarrow x_1 = e^2$

και $\ln x_2 = \omega_2 \Leftrightarrow \ln x_2 = -1 \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{e}$

Άσκηση 9η (Άσκηση 129 (σελ 40-42)).

Δίνεται ο διαγώνιος 2x2 πίνακας A ο οποίος έχει αρνητικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο, τα οποία είναι λύσεις της εξίσωσης:

$$\pi^{x^2} = \left(\sqrt[4]{\frac{1}{\pi}}\right)^{-16}.$$

α) Να βρεθεί, αν υπάρχει, ο αντίστροφος του παραπάνω πίνακα.

β) Να βρεθούν οι 2x2 πίνακες B, Γ, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$\boxed{A^{-1} \cdot B + \Gamma = 2A} \quad \text{και} \quad \boxed{B - \Gamma = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}}$$

Λύση

α) Έχω: $\pi^{x^2} = \left(\sqrt[4]{\frac{1}{\pi}}\right)^{-16} \Leftrightarrow$

$\pi^{x^2} = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{-4} \Leftrightarrow \pi^{x^2} = (\pi^{-1})^{-4} \Leftrightarrow$

$\pi^{x^2} = \pi^4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Και αφού ο πίνακας έχει ίσα αρνητικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο,

$$x = -2 \Longleftrightarrow \underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow |\underset{\sim}{A}| = 4 \neq 0$$

Οπότε ο $\underset{\sim}{A}$ αντιστρέφεται και είναι:

$$\underset{\sim}{A}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

β) Έστω $\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{bmatrix}$ και $\underset{\sim}{\Gamma} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix}$

Τότε: $\underset{\sim}{A}^{-1} \cdot \underset{\sim}{B} + \underset{\sim}{\Gamma} = 2\underset{\sim}{A} \Leftrightarrow$

Απ' τη 2η σχέση

$$\underset{\sim}{A}^{-1} \cdot \left[\underset{\sim}{\Gamma} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right] + \underset{\sim}{\Gamma} = 2\underset{\sim}{A} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x+6 & y \\ z+4 & \omega+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\frac{x+6}{2} & -\frac{y}{2} \\ -\frac{z+4}{2} & -\frac{\omega+2}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

No. 9 Date 20/10

$$\begin{bmatrix} -\frac{x+6}{2}+\frac{2x}{2} & \frac{y}{2} \\ -\frac{(z+4)}{2}+z & -\frac{(\omega+2)}{2}+\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{2}-3 & \frac{y}{2} \\ \frac{z}{2}-2 & \frac{\omega}{2}-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

οπότε:

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}-3=-4 \\ \frac{y}{2}=0 \\ \frac{z}{2}-2=0 \\ \frac{\omega}{2}-1=-4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}=-1 \\ y=0 \\ \frac{z}{2}=2 \\ \frac{\omega}{2}=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \\ z=4 \\ \omega=-6 \end{cases}$$

Επίσης:

$$\underset{\sim}{B}-\underset{\sim}{\Gamma}=\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} k & \lambda \\ \mu & \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} k & \lambda \\ \mu & \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+6 & y \\ z+4 & \omega+2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} k=x+6 \\ \lambda=y \\ \mu=z+4 \\ \nu=\omega+2. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k=-2+6 \\ \lambda=0 \\ \mu=4+4 \\ \nu=-6+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=4 \\ \lambda=0 \\ \mu=8 \\ \nu=-4 \end{cases}$$

Άρα: $\underset{\sim}{B}=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$

και: $\underset{\sim}{\Gamma}=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$

Άσκηση 3

6

Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$\underset{\sim}{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 4\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

2

Λύση

Επισυνάπτω στον πίνακα A τον μοναδιαίο πίνακα

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

οπότε

$$\underset{\sim}{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_2-3r_1}$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -2 & & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xleftrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1\to r_1+r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\to r_3-5r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 8 & -3 & 1 & -5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\to \frac{1}{8}r_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \to r_2 + 2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{8} & \frac{2}{8} & -\frac{2}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

Αρα ο αντίστροφος του A είναι ο

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

Άσκηση 1 (Άσκηση 1.37) σελ 46

Αν $|\underset{\sim}{A}| > 0$ και $adj(A) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ να βρεθεί

ο αντίστροφος πίνακας του πίνακα $\underset{\sim}{A}$.

<u>Λύση</u>

<u>Έχω:</u> $adj(\underset{\sim}{A}) = |\underset{\sim}{A}| \cdot \underset{\sim}{A}^{-1} \Rightarrow$ ιδιότητα σελ 31

$$|adj(\underset{\sim}{A})| = \left| |\underset{\sim}{A}| \cdot \underset{\sim}{A}^{-1} \right| = |\underset{\sim}{A}|^3 \cdot |\underset{\sim}{A}|^{-1} = |\underset{\sim}{A}|^2$$

<u>Επίσης:</u> $|adj(\underset{\sim}{A})| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix} =$

$$= 3\left(1 \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) + 1 \cdot 2\right) - 1\left(0 \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) + 1 \cdot 4\right) + (-2) \cdot (0 \cdot 2 - 1 \cdot 4) =$$

$$= 3\left(-\tfrac{1}{3} + 2\right) - 1 \cdot (4) - 2 \cdot (-4) = \cancel{3} \cdot \frac{5}{\cancel{3}} - 4 + 8 = 9$$

<u>Οπότε:</u> $|\underset{\sim}{A}|^2 = 9 \Rightarrow |\underset{\sim}{A}| = \pm 3$. Αφού $|\underset{\sim}{A}| > 0 \Leftrightarrow$

$$|\underset{\sim}{A}| = 3$$

6 5

Άσκηση 2 (Άσκηση 1.38) σελ 46.

Έστω ο 2×2 πίνακας $\underset{\sim}{A}$ για τον οποίο υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι:

$$|\lambda \underset{\sim}{A}| + 5 = 4\lambda \cdot |\underset{\sim}{A}|$$

α) Ν.δ.ο: ο $\underset{\sim}{A}$ αντιστρέφεται

β) Αν είναι $|\underset{\sim}{A}|>0$, να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της $|\underset{\sim}{A}|$.

Λύση

α) Έχω:

$$|\lambda\cdot\underset{\sim}{A}|+5=4\lambda|\underset{\sim}{A}| \Leftrightarrow$$

βγαίνει με τετράγωνο

$$\boxed{\lambda^2|\underset{\sim}{A}|-4\lambda|\underset{\sim}{A}|+5=0} \quad (1)$$

Αν ο $\underset{\sim}{A}$ δεν αντιστρέφεται, τότε:

$|\underset{\sim}{A}|=0$. Οπότε απ την (1) έχω: $5=0$ ΑΔΥΝΑΤΟ

Επομένως ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος.

β) Εφόσον υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε να είναι:

$\lambda^2|\underset{\sim}{A}|-4\lambda|\underset{\sim}{A}|+5=0$, τότε πρέπει:

$$\Delta=(-4|\underset{\sim}{A}|)^2-4\cdot5\cdot|\underset{\sim}{A}|\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$16|\underset{\sim}{A}|^2-20|\underset{\sim}{A}|\geq 0$$

$$4|\underset{\sim}{A}|(4|\underset{\sim}{A}|-5)\geq 0 \overset{\text{Αφού } |A|>0}{\Longleftrightarrow}$$

Οπότε: $4|\underset{\sim}{A}|-5\geq 0 \Leftrightarrow |\underset{\sim}{A}|\geq\frac{5}{4}$

Άρα η ελάχιστη τιμή της $\boxed{|\underset{\sim}{A}|=\frac{5}{4}}$

Άσκηση 3 (Άσκηση 1.42) σελ 48

Να βρεθεί ο βαθμός του πίνακα A.

$$\underset{\sim}{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -10 & -9 & 3 \\ 4 & 1 & -3 & 2 & 8 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 6 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

Λύση

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -10 & -9 & 3 \\ 4 & 1 & -3 & 2 & 8 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 6 & 3 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\Gamma_1 \longleftrightarrow \Gamma_3)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -3 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & -10 & -9 & 3 \\ -3 & 0 & 6 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-\Gamma_1) \to \Gamma_1} \begin{bmatrix} +1 & 0 & -2 & -1 & +3 \\ 4 & 1 & -3 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & -10 & -9 & 3 \\ -3 & 0 & 6 & 3 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\Gamma_2 - 4\Gamma_1) \to \Gamma_2} \begin{bmatrix} +1 & 0 & -2 & -1 & +3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & -4 \\ 0 & -2 & -10 & -9 & 3 \\ -3 & 0 & 6 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(\Gamma_4 + 3\Gamma_1) \to \Gamma_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & -4 \\ 0 & -2 & -10 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\Gamma_3 + 2\Gamma_2) \to \Gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{\Gamma_3}{3}\right) \to \Gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\Gamma_2 - 6\Gamma_3) \to \Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(\Gamma_1+\Gamma_3)\to\Gamma_1}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & 3^{\eta} & 4^{\eta} & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Αν αλλάξω την τρίτη με την τέταρτη στήλη

$$\underset{\sim}{Z}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οπότε: $\operatorname{rank}(\underset{\sim}{A})=\operatorname{rank}(\underset{\sim}{Z})=3$

Άσκηση 4 (Ασκ. 125) σελ. 38

Να βρεθεί ο πίνακας $\underset{\sim}{A}$ εάν ισχύει:

$$\underset{\sim}{A}=\begin{bmatrix} 2 & |\underset{\sim}{A}| & -1 \\ 1 & |\underset{\sim}{A}|-1 & 0 \\ 0 & -12 & 3 \end{bmatrix}$$

Λύση

$$|\underset{\sim}{A}| = 2\begin{vmatrix} |\underset{\sim}{A}|-1 & 0 \\ -12 & 3 \end{vmatrix} - |\underset{\sim}{A}|\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & |\underset{\sim}{A}|-1 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$|\underset{\sim}{A}| = 2(3|\underset{\sim}{A}|-3) - 3|\underset{\sim}{A}| + 12 \Leftrightarrow$$

$$|\underset{\sim}{A}| = 6|\underset{\sim}{A}| - 6 - 3|\underset{\sim}{A}| + 12 \Leftrightarrow$$

$$|\underset{\sim}{A}| = 3|\underset{\sim}{A}| + 6 \Leftrightarrow -3|\underset{\sim}{A}| + |\underset{\sim}{A}| = 6 \Leftrightarrow$$

$$-2|\underset{\sim}{A}| = 6 \Leftrightarrow |\underset{\sim}{A}| = -3$$

Άρα: $\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & -12 & 3 \end{bmatrix}.$