No 1

ΑΣΚΗΣΗ 1 (Πρόσθεση Πινάκων) (τετραγωνικών 3×3).

$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 7 & 5 & -2 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ και $\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 8 \\ 9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & -2 \end{bmatrix}$

Λύση

$$\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 2-3 & -3+5 & 4+8 \\ 7+9 & 5+2 & -2+7 \\ 1+4 & -4-6 & 0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & +2 & 12 \\ 16 & 7 & 5 \\ 5 & -10 & -2 \end{bmatrix}$$

OK

ΑΣΚΗΣΗ 2 (Αφαίρεση πινάκων)(τετραγωνικών 3×3).

$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} -3 & -5 & 7 \\ 2 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ και $\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 9 \\ 11 & -4 & 7 \\ 3 & -5 & 7 \end{bmatrix}$

$$\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} -3-(-2) & -5-6 & 7-9 \\ 2-11 & 1-(-4) & -4-7 \\ 0-3 & 3-(-5) & 8-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -11 & -2 \\ -9 & 5 & -11 \\ -3 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3 (Πολ/μός Πινάκων) (3×3 δηλ. τετραγωνικοί κι οι δυο).

$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & -6 \\ 7 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ και $\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 7 & \frac{1}{2} & -6 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

<u>οπότε:</u>

$$\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}=\begin{bmatrix}-2 & 5 & 8\\ 3 & 4 & -6\\ 7 & 0 & 9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 7 & \frac{1}{2} & -6\\ 0 & -4 & 5\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-2\cdot(-1)+5\cdot 7+8\cdot 0 & -2\cdot 3+5\cdot\frac{1}{2}+8\cdot(-4) & -2\cdot 5+5\cdot(-6)+8\cdot 5\\ 3\cdot(-1)+4\cdot 7+(-6)\cdot 0 & 3\cdot 3+4\cdot\frac{1}{2}+(-6)\cdot(-4) & 3\cdot 5+4\cdot(-6)+(-6)\cdot 5\\ 7\cdot(-1)+0\cdot 7+9\cdot 0 & 7\cdot 3+0\cdot\frac{1}{2}+9\cdot(-4) & 7\cdot 5+0\cdot(-6)+9\cdot 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2+35 & -6+\frac{5}{2}-32 & -10-30+40\\ -3+28 & 9+2+24 & 15-24-30\\ -7 & 21-36 & 35+45\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}37 & -\frac{38}{1}+\frac{5}{2} & 0\\ 25 & 35 & -39\\ -7 & -15 & 80\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}37 & -\frac{71}{2} & 0\\ 25 & 35 & -39\\ -7 & -15 & 80\end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{Άσκηση 4}}$ (Πρόσθεση μη τετραγωνικών πινάκων). (π.χ. 2×3).

α) <u>Έστω:</u> $\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}=\begin{bmatrix}-2 & 4 & -5\\ 7 & -1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & 8 & 9\\ 6 & 0 & -4\end{bmatrix}=$

$$=\begin{bmatrix}-2-4 & 4+8 & -5+9\\ 7+6 & -1+0 & 3-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 12 & 4\\ 13 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

β) (Η Αφαίρεσή τους)

$$\underset{\sim}{A}-\underset{\sim}{B}=\begin{bmatrix}-2 & 4 & -5\\ 7 & -1 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-4 & 8 & 9\\ 6 & 0 & -4\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-2-(-4) & 4-8 & -5-9\\ 7-6 & -1-0 & 3-(-4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4 & -14\\ 1 & -1 & 7\end{bmatrix}$$

21/9 **Άσκηση 5**

No. 3 Date

Δεν ισχύει $\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B} \neq \underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{A}$ (Αντιμεταθετική)

Έστω: $\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ώς $\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

$$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 + (-2)\cdot 5 & 3\cdot 3 + (-2)\cdot(-2) \\ 4\cdot 2 + 1\cdot 5 & 4\cdot 3 + 1\cdot(-2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 13 \\ 13 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + 3\cdot 4 & 2(-2) + 3\cdot 1 \\ 5\cdot 3 + (-2)\cdot 4 & 5\cdot(-2) + (-2)\cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18 & -1 \\ 7 & -12 \end{bmatrix}$$

Άρα $\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B} \neq \underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{A}$

Άσκηση 6. (Πολ/μός πινάκων μη τετραγωνικών).

$$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B} = \underset{(2\times 3)}{\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & 5 \end{bmatrix}} \cdot \underset{(3\times 4)}{\begin{bmatrix} -2 & 5 & 6 & 1 \\ -9 & 0 & -3 & 2 \\ -4 & -6 & 1 & 0 \end{bmatrix}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3\cdot(-2) + (-2)\cdot(-9) + 4(-4) & 3\cdot 5 + (-2)\cdot 0 + 4\cdot(-6) & 3\cdot 6 + (-2)(-3) + 4\cdot 1 & 3\cdot 1 + (-2)2 + 4\cdot 0 \\ 6\cdot(-2) + 1(-9) + 5\cdot(-4) & 6\cdot 5 + 1\cdot 0 + 5\cdot(-6) & 6\cdot 6 + 1\cdot(-3) + 5\cdot 1 & 6\cdot 1 + 1\cdot 2 + 5\cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6+18-16 & 15-24 & 18+6+4 & 3-4+4 \\ -12-9-20 & 30-30 & 36-3+5 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -9 & 28 & 3 \\ -41 & 0 & 38 & 8 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{Άσκηση 7}}$ (Άσκηση 1.1 σελ. 20)

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, x με $\alpha, x > 0$ ώστε να ισχύει η ισότητα:

$$\begin{bmatrix} \ln\alpha & 5^{\beta} \\ 2^{\gamma} & \log^2 x - \log x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5^{-\beta} \\ 6\cdot 2^{-\gamma}-1 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Λύση</u>

Για να είναι ίσοι οι πίνακες πρέπει και τα αντίστοιχα στοιχεία τους να είναι ίσα. <u>Δηλ.</u> <u>πρέπει</u>:

$\ln\alpha = -2 \Leftrightarrow \ln\alpha = \ln e^{-2} \Leftrightarrow \alpha = e^{-2} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{e^2}}$

<u>και</u>: $5^{\beta} = 5^{-\beta} \Leftrightarrow 5^{\beta} = \frac{1}{5^{\beta}} \Leftrightarrow 5^{2\beta} = 1 \Leftrightarrow 5^{2\beta} = 5^0$

$\Leftrightarrow \boxed{\beta = 0}$

<u>και</u>: $2^{\gamma} = 6\cdot 2^{-\gamma} - 1 \Leftrightarrow 2^{\gamma} = \frac{6}{2^{\gamma}} - 1 \overset{\text{ΕΚΠ}=2^{\gamma}}{\Longleftrightarrow}$

$2^{2\gamma} = 6 - 2^{\gamma} \Leftrightarrow 2^{2\gamma} + 2^{\gamma} - 6 = 0.$

Θέτω $2^{\gamma} = \omega$. <u>άρα</u>: $\omega^2 + \omega - 6 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4\cdot1\cdot(-6) = 25$

$\omega_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \text{ απορρ.} \end{cases}$

<u>οπότε</u>: $2^{\gamma} = 2^1 \Leftrightarrow \boxed{\gamma = 1}$

<u>και</u>:

$\log^2 x - \log x = 0 \Leftrightarrow \log x \cdot (\log x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \log x = 0 \Leftrightarrow \log x = \log 1 \Leftrightarrow \boxed{x = 1} \\ \text{ή} \\ \log x = 1 \Leftrightarrow \log x = \log 10 \Leftrightarrow \boxed{x = 10} \end{cases}$

No. 5. Date [redacted]

Άσκηση 8 (Άσκηση 1.23 σελ.37)

!!!

Έστω a, b τα μήκη των πλευρών ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα τριγώνου ΑΒΓ και $x \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές όταν:

φίλαση 3x3.

$$\begin{vmatrix} a\cos x & 0 & 0 \\ e^x & 4\cos x & 0 \\ \sqrt{x^2+1} & -13 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & -1 \\ a^2+b^2 & b \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$a\cos x \cdot \begin{vmatrix} 4\cos x & 0 \\ -13 & b \end{vmatrix} - \cancel{0 \cdot \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ \sqrt{x^2+1} & b \end{vmatrix}} + \cancel{0 \cdot \begin{vmatrix} e^x & 4\cos x \\ \sqrt{x^2+1} & -13 \end{vmatrix}} = 2ab - \left[-(a^2+b^2)\right]$$

$$\Leftrightarrow a\cos x(4b\cos x - 0) = 2ab + a^2 + b^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\cancel{4ab}\cdot\cos^2 x}{\cancel{4ab}} = \frac{2ab+a^2+b^2}{4ab} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{(a+b)^2}{4ab}.$$

όμως ξέρω ότι: $\cos^2 x \le 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{(a+b)^2}{4ab} \le 1. \Leftrightarrow$$

$$(a+b)^2 \le 4ab. \Leftrightarrow$$

$$a^2+b^2+2ab \le 4ab \Leftrightarrow$$

$$a^2+b^2-2ab \le 0. \Leftrightarrow$$

$(a-b)^2 \le 0$ Δεν γίνεται παρά μόνο όταν ισχύει η ισότητα. Άρα πρέπει: $a-b=0. \Leftrightarrow a=b$

Οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

No. 6 Date 6/1

$\boxed{\text{Άσκηση 9}}$ (Άσκηση 1.8 σελ 25).

Να βρεθούν όλοι οι πίνακες που αντιμετατίθενται με τον $\underset{\sim}{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Λύση

Έστω $\underset{\sim}{B} = \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$ ο ζητούμενος πίνακας.

Τότε θα έχω:

$$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{B} \cdot \underset{\sim}{A} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x+2z & y+2w \\ 3x+4z & 3y+4w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z+3w & 2 \quad +4w \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

προκύπταν οι ισότητες:

$$x+2z = x+3y \quad (1)$$
$$y+2w = 2x+4y \quad (2)$$
$$3x+4z = z+3w \quad (3)$$
$$3y+4w = 2 \quad +4w \quad (4).$$

Άρα $x = x$

$z = \frac{3}{2}y$

$y = y$

$w = x + \frac{3}{2}y$.

Άρα $\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} x & y \\ \frac{3}{2}y & x+\frac{3}{2}y \end{bmatrix}$.

5

No. 3

Άσκηση 5η

(3×3 που καταλήγει σε τριγωνικό άνω).

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -3 & 5 & -2 \\ -4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\left(\frac{2}{3}\Gamma_2 + \Gamma_1\right) \to \Gamma_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{19}{3} & -\frac{4}{3} \\ -4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \dots$$

$$\xrightarrow{(2\Gamma_1 + \Gamma_3) \to \Gamma_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{19}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \dots$$

$$\xrightarrow{\left(2\cdot\Gamma_2 - \frac{19}{3}\Gamma_3\right) \to \Gamma_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{19}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{16}{1} - \frac{95}{3} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{19}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{-143}{3} \end{pmatrix}$$

$$\frac{-48-95}{3}$$

6

Άσκηση 6η

(3×3 που καταλήγει σε τριγωνικό κάτω)

$$\begin{pmatrix} -1 & -8 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 9 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2\Gamma_1 + \Gamma_2) \to \Gamma_2} \begin{pmatrix} -1 & -8 & 5 \\ 0 & -19 & 14 \\ 9 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

No. 4

$$\xrightarrow{(9r_1+r_3)\to r_3}\begin{pmatrix} -1 & -8 & 5 \\ 0 & -19 & 14 \\ 0 & -66 & 43 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots$$

$$\xrightarrow{(66r_2-19r_3)\to r_3}\begin{pmatrix} -1 & -8 & 5 \\ 0 & -19 & 14 \\ 0 & 0 & 107 \end{pmatrix}$$

$66\cdot(-19)-19\cdot(-66)=0$

$66\cdot 14-19\cdot 43=924-817=107$

Άσκηση 10 (Άσκηση 1.19(α) σελ 32-33). **2**

2 Έστω $n \times n$ πίνακας A για τον οποίο είναι γνωστό ότι $A^2 + 2A = O$.

α) Να λυθεί η εξίσωση $A - X = A \cdot X$.

Λύση

έχω: $A^2 + 2A = 0 \iff$ προσθαφαιρώ τον αντίστροφο πίνακα I. (δηλ. $A \cdot B = B \cdot A = I$).
κ' σου $A \cdot A^{-1} = A^{-1} A = I$.

$$A^2 + 2A + I = I \iff$$

$$(A + I)^2 = I \iff (A + I)(A + I) = I$$

Άρα: $\boxed{(A + I)^{-1} = A + I}$ (1)

Σκεφτείτε το I σαν την μονάδα

έχω:
Επίσης: $A - X = A \cdot X \iff$

οπότε: $A = A \cdot X + X \iff A = (A + I) \cdot X \iff$

πολ/ζω και τα 2 μέλη με τον αντίστροφο (1)

$$X = A \, (A + I)^{-1} \iff$$

$$X = A \cdot (A + I) \iff X = A^2 + A \iff X = -A$$

No 8

Date

Άσκηση 11 (Άσκηση 1.1 σελ. 51 Απαντες)

Αν $\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $\underset{\sim}{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$.

να προσδιοριστούν οι $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει: $\boxed{x\underset{\sim}{A} - y\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{C}}$

Λύση

έχω:

$$x \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - y \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2x \\ x & 4x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & y \\ -y & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2x-y \\ x+y & 4x-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$0=0$ ισχύει

① $2x - y = 4$

② $x + y = 1$

③ $4x - 2y = 8 \overset{:2}{\Leftrightarrow} 2x - y = 4$. (ίδια με ①).

Άρα λύνω (Σ) ① ξ' ②. όπότε:

$y = 2x - 4$.

$② \Longrightarrow x + 2x - 4 = 1 \Leftrightarrow 3x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$

Άρα: $y = 2 \cdot \frac{5}{3} - 4 \Leftrightarrow y = \frac{10}{3} - \frac{4}{1} \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}$

① 3

$\boxed{\text{Άσκηση 1}}$ (σελ. 16 Παράδειγμα)

Να βρεθεί ο βαθμός του $\underset{\sim}{A}$ δηλ. rank(A) = ;

$$\underset{\sim}{A}=\begin{bmatrix}2&6&10&14\\-1&4&2&0\\1&10&12&14\end{bmatrix}\xrightarrow{\left(\frac{\Gamma_1}{2}\right)\to\Gamma_1}\begin{bmatrix}1&3&5&7\\-1&4&2&0\\1&10&12&14\end{bmatrix}\to$$

$$\xrightarrow{(\Gamma_1+\Gamma_2)\to\Gamma_2}\begin{bmatrix}1&3&5&7\\0&7&7&7\\1&10&12&14\end{bmatrix}\xrightarrow{(\Gamma_3-\Gamma_1)\to\Gamma_3}\begin{bmatrix}1&3&5&7\\0&7&7&7\\0&7&7&7\end{bmatrix}\to$$

$$\xrightarrow{(\Gamma_3-\Gamma_2)\to\Gamma_3}\begin{bmatrix}1&3&5&7\\0&7&7&7\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\left(\Gamma_2/7\right)\to\Gamma_2}\begin{bmatrix}1&3&5&7\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\Longrightarrow\boxed{\text{rank}(\underset{\sim}{A})=2}$$

③ 4

$\boxed{\text{Άσκηση 2}}$ (σελ. 18. Παράδειγμα)

Έστω ο πίνακας $\underset{\sim}{A}=\begin{bmatrix}2&5&7\\6&3&4\\5&-2&-3\end{bmatrix}$.

Αρχικά $|\underset{\sim}{A}|=2\begin{vmatrix}3&4\\-2&-3\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}6&4\\5&-3\end{vmatrix}+7\begin{vmatrix}6&3\\5&-2\end{vmatrix}=$

$$=2\cdot(-9+8)-5(-18-20)+7(-12-15)=$$
$$=2\cdot(-1)-5\cdot(-38)+7\cdot(-27)=$$
$$=-2+190-189\neq 0.$$

Άρα ο $\underset{\sim}{A}$ αντιστρέφεται.

Θα βρω τον Gauss-Jordan επαυξημένο του $\underset{\sim}{A}$ πού είναι:

No. 2. Date

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\Gamma_2-\Gamma_3)\to\Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[(\Gamma_3-5\Gamma_2)\to\Gamma_3]{(\Gamma_1-2\Gamma_2)\to\Gamma_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & -5 & 6 & 0 & -27 & -38 \end{bmatrix} \xrightarrow[(\Gamma_3-5\Gamma_1)\to\Gamma_3]{(\Gamma_1+\Gamma_2)\to\Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & -5 & -7 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & -4 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(\Gamma_1-2\Gamma_3)\to\Gamma_1} \begin{bmatrix} 11 & -12 & 10 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & -4 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\Gamma_3-2\Gamma_1)\to\Gamma_3}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 11 & -12 & 10 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -27 & 29 & -24 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{(\Gamma_1-\Gamma_3)\to\Gamma_1} \begin{bmatrix} 38 & -41 & 34 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -27 & 29 & -24 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[(-\Gamma_3)\to\Gamma_3]{(-\Gamma_1)\to\Gamma_1} \begin{bmatrix} -38 & 41 & -34 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 27 & -29 & 24 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \longleftrightarrow \Gamma_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -38 & 41 & -34 & 0 & 1 & 0 \\ 27 & -29 & 24 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

<u>Οπότε:</u>

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}.$$

7

No. 5. Date

$\boxed{\text{Ασκηση } 7^{η}}$ (4×4 που καταλήγει σε τριγωνικό άνω).

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 7 & 9 \\ 4 & 8 & -6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3\Gamma_1+\Gamma_2)\to\Gamma_2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 13 & 15 \\ -1 & 1 & 7 & 9 \\ 4 & 8 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2\Gamma_3-\Gamma_1)\to\Gamma_3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 13 & 15 \\ 0 & 2 & 11 & 13 \\ 4 & 8 & -6 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \ldots$$

$$\xrightarrow{(2\Gamma_1+\Gamma_4)\to\Gamma_4} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 13 & 15 \\ 0 & 2 & 11 & 13 \\ 0 & 10 & 0 & 12 \end{pmatrix} \longrightarrow \ldots$$

$$\xrightarrow{(-\frac{2}{5}\Gamma_2+\Gamma_3\to\Gamma_3)} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 13 & 15 \\ 0 & 0 & \frac{29}{5} & 7 \\ 0 & 10 & 0 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2\Gamma_2+\Gamma_4\to\Gamma_4)} \ldots$$

$\to -\frac{2}{5}\cdot 15+13=-6+13=7$

$-\frac{2}{5}13+11=-\frac{26}{5}+\frac{11}{1}=\frac{55-26}{5}=\frac{29}{5}.$

$$\xrightarrow{(-2r_2+r_4)\to r_4}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 13 & 15 \\ 0 & 0 & 29/5 & 7 \\ 0 & 0 & -26 & 18 \end{pmatrix} \longrightarrow \dots$$

$$\xrightarrow{(26r_3+\frac{29}{5}r_4)\to r_4}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 13 & 15 \\ 0 & 0 & \frac{29}{5} & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{522}{5} \end{pmatrix}$$

$$26\cdot\frac{29}{5}-\frac{29}{5}\cdot 26=0$$

$$26\cdot 7+\frac{29}{5}\cdot 18 = 182+\frac{522}{5}$$

8

No. Date

Ασκηση 8 (3 × 3 που καταλήγει σε τριγωνικό κάτω).

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(6\Gamma_1+\Gamma_2)\to\Gamma_2} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 8 & -13 & 0 \\ 7 & -8 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots$$

$$\xrightarrow{(\Gamma_1+\Gamma_3)\to\Gamma_1} \begin{pmatrix} 9 & -11 & 0 \\ 8 & -13 & 0 \\ 7 & -8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-13\Gamma_1+11\Gamma_2)\to\Gamma_1} \begin{pmatrix} -29 & 0 & 0 \\ 8 & -13 & 0 \\ 7 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

$-13\cdot 9+11\cdot 8=$

$=-117+88=-29$

$-13(-11)+11\cdot(-13)=0$