9
Ειδικά θέματα θεωρίας ελέγχου

9.1 Ρύθμιση καταστάσεως με δυναμική ανατροφοδότηση καταστάσεως

Εστω ένα σύστημα Σ που περιγράφεται από τις εξισώσεις καταστάσεως

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Οπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, το πρόβλημα της ρυθμίσεως καταστάσεως γραμμικών συστημάτων με έλεγχο της μορφής $u(t)=u_e+K(x(t)-x_e)$ δεν έχει πάντοτε λύση είτε επειδή δεν υπάρχει u_e τέτοιο ώστε η x_e να είναι κατάσταση ισορροπίας είτε γιατί δεν υπάρχει μήτρα K ώστε οι ιδιοτιμές του συστήματος κλειστού βρόχου, δηλαδή οι ιδιοτιμές της μήτρας $A+BK$, να έχουν πραγματικά μέρη αρνητικά. Μερικά από τα προβλήματα που συνδέονται με έλεγχο της μορφής $u(t)=u_e+K(x(t)-x_e)$ αίρονται αν θεωρήσουμε έλεγχο της μορφής

$$u(t)=u_e+K_x(x(t)-x_e)+K_z z(t) \tag{9.1}$$

όπου το διάνυσμα $z(t)$ ικανοποιεί μία εξίσωση της μορφής

$$\dot{z}(t) = A_z z(t) + A_x x(t) + u_z \tag{9.2}$$

Σε ένα τέτοιο σχήμα ελέγχου, η μεταβλητή ελέγχου $u(t)$ σε μία χρονική στιγμή t δεν εξαρτάται μόνο από την τιμή της μεταβλητής καταστάσεως στην ίδια χρονική στιγμή, δηλαδή από την $x(t)$, αλλά και από τις τιμές της σε προηγούμενες χρονικές στιγμές γιατί όπως προκύπτει από την σχέση (9.2), η τιμή της μεταβλητής *z(t)* δίνεται από την σχέση

$$z(t) = A_x \int_{t_0}^{t} x(\tau)d\tau + A_z \int_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau + u_z(t - t_0)$$

Με άλλα λόγια, ο νόμος ελέγχου (9.1) έχει μνήμη. Το σύστημα κλειστού βρόχου που προκύπτει με εφαρμογή ενός τέτοιου νόμου ελέγχου περιγράφεται από τις καταστατικές εξισώσεις

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A_x & A_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_e + K_x(x(t) - x_e) + K_z z(t) \\ u_z \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK_x & BK_z \\ A_x & A_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_e - K_x x_e \\ u_z \end{bmatrix} = 0 \tag{9.3}$$

Μία κατάσταση

$$\begin{bmatrix} x^* \\ z^* \end{bmatrix}$$

θα είναι κατάσταση ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου αν

$$\begin{bmatrix} A + BK_x & BK_z \\ A_x & A_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ z^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_e - K_x x_e \\ u_z \end{bmatrix} = 0$$

ή, ισοδυνάμως, αν ικανοποιούνται οι σχέσεις

$$Ax^* + BK_x x^* + BK_z z^* + Bu_e - BK_x x_e = 0$$
$$A_x x^* + A_z z^* + u_z = 0$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι για να ισορροπήσει το υπό έλεγχο σύστημα στο επιθυμητό σημείο λειτουργίας

$$x^* = x_e$$

θα πρέπει να ικανοποιούνται οι σχέσεις

$$Ax_e + BK_x x_e + BK_z z^* + Bu_e - BK_x x_e = 0$$
$$A_x x_e + A_z z^* + u_z = 0$$

Συνεπώς, θα πρέπει να ικανοποιούνται, οι σχέσεις

$$Ax_e + BK_z z^* + Bu_e = 0 \tag{9.4}$$

$$A_x x_e + A_z z^* + u_z = 0 \tag{9.5}$$

για κάποιο z^* και κάποιες κατάλληλες τιμές των παραμέτρων A_x, A_z, K_z, u_e και u_z.

Εξ'άλλου, με αλλαγή μεταβλητής,

$$w(t) = x(t) - x_e$$

το σύστημα κλειστού βρόχου (9.3) γίνεται

$$\begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK_x & BK_z \\ A_x & A_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) + x_e \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_e - K_x x_e \\ u_z \end{bmatrix}$$

ή, λαμβάνοντας υπ'όψιν την (9.4)

$$\begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK_x & BK_z \\ A_x & A_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \tag{9.6}$$

Συνεπώς, για να είναι η κατάσταση x_e ασυμπτωτικώς ευσταθής θα πρέπει τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών της μήτρας

$$\begin{bmatrix} A + BK_x & BK_z \\ A_x & A_z \end{bmatrix} \tag{9.7}$$

είναι αρνητικά.

Ας συγκρίνουμε τώρα τους νόμους ελέγχου με στιγμιαία ανατροφοδότηση καταστάσεως της μορφής

$$u(t)=u_e+K_x(x(t)-x_e) \tag{9.8}$$

με τους νόμουςι ελέγχου με δυναμική ανατροφοδότηση καταστάσεως της μορφής

(9.9)

$$u(t)=u_e+K_x(x(t)-x_e)+K_z z(t)$$

με

$$\dot{z}(t)=A_z z(t)+A_x x(t)+u_z \tag{9.10}$$

:

- Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι αν η σχέση

$$Ax_e+Bu_e=0 \tag{9.11}$$

δεν έχει λύση ως προς u_e τότε δεν είναι δυνατόν να καταστεί η x_e κατάσταση ισορροπίας του συστήματος Σ με στιγμιαίο νόμο ελέγχου της μορφής (9.8). Αν όμως δεν υπάρχει u_e που ικανοποιεί την σχέση (9.11) τότε δεν υπάρχουν ούτε K_z, z^* και u_e να ικανοποιούν την (9.4). Συνεπώς αν δεν είναι δυνατόν να καταστεί η x_e κατάσταση ισορροπίας μέσω ενός στιγμιαίου ρυθμιστή αυτό δεν είναιι δυνατόν να επιτευχθεί ούτε μέσω ενός πολυπλοκότερου δυναμικού ρυθμιστή.

- Ο δυναμικός ρυθμιστής με ανατροφοδότηση καταστάσεως πλεονεκτεί του στιγμιαίου μόνο σε ότι αφορά την επίτευξη της ευστάθειας της επιθυμητής καταστάσεως ισορροπίας. Με άλλα λόγια , αν είναι δυνατόν να καταστεί η x_e κατάσταση ισορροπίας του συστήματος δηλαδή αν υπάρχει u_e που ικανοποιεί την

$$Ax_e+Bu_e=0$$

τότε ο έλεγχος με δυναμική ανατροφοδότηση καταστάσεως μπορεί να καταστήσει την ισορροπία αυτή ασυμπτωτικώς ευσταθή ακόμη κι αν αυτό δεν μπορεί να επιτευχθεί μέσω ένος στιγμιαίου νόμου ελέγχου, δηλαδή ακόμη κι αν δεν υπάρχει μήτρα K_x τέτοια ώστε τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών της μήτρας

$$A+BK_x$$

να είναι αρνητικά. Αυτό συμβαίνει γιατί το γεγονός ότι δεν υπάρχει μήτρα K_x που καθιστά την μήτρα $A+BK_x$ ευσταθή δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχουν ούτε μήτρες A_x, A_z και K_z που καθιστούν την μήτρα

$$\begin{bmatrix} A+BK_x & BK_z \\ A_x & A_z \end{bmatrix}$$

ευσταθή. Συνεπώς η επιλογή ενός (πολυπλοκώτερου) δυναμικού ρυθμιστή ανατροφοδότησης καταστάσεως επιβάλλεται όταν η ευστάθεια της καταστάσεως ισορροπίας δεν μπορεί να επιτευχθεί μέσω στιγμιαίου ρυθμιστού ανατροφοδότησης καταστάσεως, δηλαδή όταν το ζεύγος (A,B) δεν είναι σταθεροποιήσιμο..

9.2 Ρύθμιση καταστάσεως με ανατροφοδότηση εξόδου

Είδαμε στο προηγουμενο κεφάλαιο ότι στην περίπτωση που η κατάσταση του συστήματος δεν είναι άμεσα μετρήσιμη, η υλοποίηση ενός νόμου ελέγχου με ανατροφοδότηση καταστάσεως απαιτεί την κατασκευή ενός παρατηρητού. Η ανάγκη σχεδιασμού παρατηρητού αίρεται αν αντί του σχήματος ελέγχου με ανατροφοδότηση καταστάσεως υιοθετηθεί ένα σχήμα ελέγχου με ανατροφοδότηση εξόδου. Σε ένα τέτοιο σχήμα ο έλεγχος είναι της μορφής ,

$$u(t) = u_e + K[y(t) - y_e]$$

όπου

$$y_e = Cx_e$$

Τότε το σύστημα κλειστού βρόχου γίνεται

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_e + BK[y(t) - y_e]$$

ή

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_e + BK[Cx(t) - Cx_e]$$

ή, τέλος,

$$\dot{x}(t) = (A + BKC)x(t) + Bu_e - BKCx_e \tag{9.8}$$

Για να είναι η x_e κατάσταση ισορροπίας θα πρέπει να ισχύει η σχέση

$$(A + BKC)x_e + Bu_e - BKCx_e = 0$$

ή, ισοδυνάμως, η σχέση

$$Ax_e + Bu_e = 0 \tag{9.9}$$

Εξ'άλλου, για να είναι η κατάσταση ισορροπίας x_e ασυμπτωτικώς ευσταθής, θα πρέπει η ισορροπία $z=0$ του συστήματος

$$\dot{z}(t) = (A + BKC)z(t)$$

που προκύπτει από την (9.8) με αλλαγή μεταβλητής

$$z(t) = x(t) - x_e$$

να είναι ασυμπτωτικώς ευσταθής. Συνεπώς θα πρέπει η μήτρα K να είναι τέτοια ώστε οι ιδιοτιμές της μήτρας

$$A+BKC$$

να έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη.

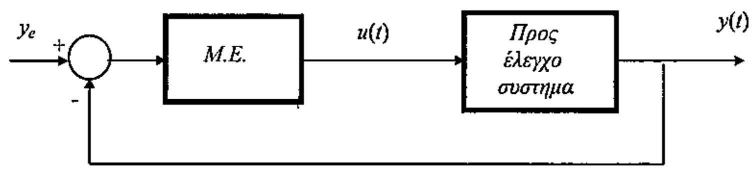
9.3 Το πρόβλημα ρυθμίσεως της εξόδου

Η ρύθμιση της εξόδου μπορεί να γίνει είτε με ένα σχήμα ελέγχου ανατροφοδότησης της καταστάσεως είτε με ανατροφοδότηση της ίδιας της εξόδου. Ακολουθούνται ίδιες μέθοδοι με εκείνες της ρυθμίσεως καταστάσεως όπου όμως η επιθυμητή κατάσταση ισορροπίας x_e δεν δίνεται αλλά προσδιορίζεται από την σχέση

$$y_e = Cx_e .$$

όπου y_e υποδηλώνει την επιθυμητή έξοδο λειτουργίας y_e.

Ενα ειδικής μορφής σχήμα ρυθμιστού εξόδου με ανατροφοδότηση της ίδιας της εξόδου φαίνεται στο σχήμα 9.1. Πρόκειται για ένα σύνηθες σχήμα ελέγχου βιομηχανικών συστημάτων όπου η ρύθμιση της εξόδου γίνεται μέσω ενός νόμου ελέγχου $u(t)$ για τον προσδιορισμό του οποίου λαμβάνεται υπ'όψιν η απόκλισή $y(t)$-y_e της εξόδου $y(t)$ του συστήματος από το επιθυμητό σημείο λειτουργίας y_e και όχι ξεχωριστά από την έξοδο $y(t)$ του συστήματος και το επιθυμητό σημείο λειτουργίας y_e. Με ένα τέτοιο σχήμα ελέγχου μπορούμε να αλλάζουμε το επιθυμητό σημείο λειτουργίας με απλή αλλαγή του σήματος εισόδου y_e χωρίς να προβαίνουμε σε καμμία αλλαγή των παραμέτρων της μονάδας ελέγχου του συστήματος.



9.3.1 Ο αναλογικός ρυθμιστής

Ο πιό απλός νόμος ελέγχου του σχήματος αυτού είναι μία ανατροφοδότηση της απόκλισης της εξόδου $y(t)$ από το επιθυμητό σημείο λειτουργίας y_e, πολλαπλασιασμένη με μία μήτρα κέρδους K, δηλαδή

$$u(t) = K(y(t) - y_e) \tag{9.10}$$

Πρόκειται για ένα ρυθμιστή μηδενικής μνήμης.

Αν το σύστημα περιγράφεται από τις καταστατικές εξισώσεις

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

τότε η κατάσταση του προκύπτοντος συστήματος κλειστού βρόχου θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[K(y(t) - y_e)] =$$

$$= Ax(t) + BKCx(t) - BKy_e$$

ή, ισοδυνάμως, την εξίσωση

$$\dot{x}(t) = (A + BKC)x(t) - BKy_e \tag{9.11}$$

Σε αντίθεση με ένα σχήμα ελέγχου της μορφής

$$u(t) = u_e + K(y(t) - y_e)$$

όπου η κατάσταση ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου προσδιορίζεται από την επιλογή του όρου u_e, στο σχήμα ελέγχου (9.10) η κατάσταση στην οποία θα ισορροπήσει το σύστημα κλειστού βρόχου εξαρτάται από το σημείο αφετηρίας του μεταβατικού φαινομένου. Αν x^* είναι μία κατάσταση ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου, τότε η αντίστοιχη έξοδος θα είναι

$$y^* = Cx^*$$

και μετά το μεταβατικό φαινόμενο θα εμφανίζεται μία απόκλιση Δy^* της εξόδου από την επιθυμητή τιμή της y_e που θα είναι ίση με

$$\Delta y^* = Cx^* - y_e$$

$$w_0 = Cz_0$$

Αξίζει να υπογραμμισθεί το γεγονός ότι το μόνιμο σφάλμα δεν επηρεάζεται από την επιλογή της μήτρας *K*. Συνεπώς, η επιλογή της μήτρας *K* γίνεται με μοναδικό στόχο την επίτευξη της ασυμπτωτικής ευστάθειας της εξόδου στην μόνιμη κατάσταση.

9.3.2 Ο αναλογικός-ολοκληρωτικός ρυθμιστής

Ενας τρόπος να επιτευχθεί ο μηδενισμός του μονίμου σφάλματος είναι αντί του ρυθμιστή (9.10), γνωστού ως *αναλογικού ρυθμιστή* (proportional regulator), να επιλέξουμε δυναμικό ρυθμιστή ανατροφοδότησης της εξόδου της μορφής

$$u(t) = K_p(y(t) - y_e) + K_I z(t) \tag{9.15}$$

όπου

$$\dot{z}(t) = y(t) - y_e \tag{9.16}$$

Τότε το σύστημα κλειστού βρόχου θα περιγράφεται από τις σχέσεις

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[K_p(y(t) - y_e)] + BK_I z(t)$$

$$\dot{z}(t) = y(t) - y_e$$

οι οποίες, λαμβάνοντας υπ'όψιν ότι $y(t)=Cx(t)$ παίρνουν την μορφή

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK_pC & BK_I \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} BK_P \\ 1 \end{bmatrix} y_e$$

Μία κατάσταση

$$\begin{bmatrix} x^* \\ z^* \end{bmatrix}$$

θα είναι κατάσταση ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου αν ισχύει η σχέση

$$\begin{bmatrix} A + BK_pC & BK_I \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ z^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} BK_P \\ 1 \end{bmatrix} y_e = 0$$

Λαμβάνοντας υπ'όψιν την $y^*=Cx^*$, οι ανωτέρω συνθήκες ισορροπίας παίρνουν την μορφή των σχέσεων

$$Ax^* + BK_p y^* + BK_I z^* - BK_p y_e = 0$$

$$y^* - y_e = 0$$

Οι συνθήκες αυτές ικανοποιούνται αν και μόνο αν υπάρχουν x^* και z^* τέτοια ώστε

$$Ax^* + BK_I z^* = 0$$
$$y_e = Cx^*$$

Συνεπώς, για ένα δεδομένο σημείο επιθυμητό σημείο λειτουργίας y_e, το μόνιμο σφάλμα μηδενίζεται αν υπάρχει μήτρα K_I τέτοια ώστε το αλγεβρικό σύστημα

$$\begin{bmatrix} A & BK_I \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y_e \end{bmatrix}$$

να έχει λύση.

Εξ'άλλου για να είναι η ισορροπία ασυμπτωτικώς ευσταθής θα πρέπει οι μήτρες K_p και K_I να είναι τέτοιες ώστε τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών της μήτρας

$$\begin{bmatrix} A + BK_p C & BK_I \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

να είναι αρνητικά.

Πρέπει να υπογραμισθεί ότι το μόνιμο σφάλμα δεν επηρεάζεται από την επιλογή της μήτρας K_p που γίνεται με μοναδικό στόχο την επίτευξη της ασυμπτωτικής ευστάθειας της καταστάσεως ισορροπίας x^*. Αντιθέτως, η επιλογή της μήτρας K_I επηρεάζει τόσο το μόνιμο σφάλμα όσο και την ευστάθεια του συστήματος.

Ο ρυθμιστής, (9.15)-(9.16) ονομάζεται *αναλογικός-ολοκληρωτικός* (Proportional Integral ή PI) γιατί με ολοκλήρωση της (9.16), η (9.15) γράφεται υπό την μορφή

$$u(t) = K_p(y(t) - y_e) + K_I \int_{t_0}^{t} (y(\tau) - y_e) d(t)$$

9.4 Το πρόβλημα παρακολουθήσεως της εξόδου

Κατ'αναλογία προς το πρόβλημα ρυθμίσεως, ο πιό απλός νόμος ελέγχου παρακολουθήσεως μίας τροχιάς $y^*(t)$, είναι μία ανατροφοδότηση της απόκλισης της εξόδου $y(t)$ από την επιθυμητή τροχιά λειτουργίας $y^*(t)$, πολλαπλασιασμένη με μία μήτρα κέρδους K, δηλαδή ένας νόμος ελέγχου της μορφής

$$u(t) = K(y(t) - y^*(t)) \tag{9.17}$$

Αν το σύστημα περιγράφεται από τις καταστατικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

τότε η κατάσταση του προκύπτοντος συστήματος κλειστού βρόχου θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[K(y(t) - y^*(t))] =$$

$$= Ax(t) + BKCx(t) - BKy^*(t)$$

ή, ισοδυνάμως, την εξίσωση

$$\dot{x}(t) = (A + BKC)x(t) - BKy^*(t) \tag{9.18}$$

Η απόκλιση

$$\Delta y(t) = y(t) - y^*(t)$$

η οποία γράφεται και υπό την μορφήν

$$\Delta y(t) = Cx(t) - y^*(t)$$

θα μηδενίζεται στην μόνιμη κατάσταση αν υπάρχει τροχιά $x^*(t)$ του συστήματος κλειστού βρόχου (9.18) τέτοια ώστε

$$\boxed{y^*(t) = Cx^*(t)} \tag{9.19}$$

Προφανώς θα ισχύει και η σχέση

$$\dot{x}^*(t) = (A + BKC)x^*(t) - BKy^*(t)$$

γιατί η $x^*(t)$ είναι τροχιά του συστήματος κλειστού βρόχου. Η τελευταία λόγω της (9.19) γίνεται

$$\boxed{\dot{x}^*(t) = Ax^*(t)} \tag{9.20}$$

Συνεπώς το μόνιμο σφάλμα μηδενίζεται μόνο για εξόδους $y^*(t)$ για τις οποίες υπάρχει τροχιά $x^*(t)$ του συστήματος ανοικτού βρόχου

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{9.21}$$

που ικανοποιεί την (9.19)

Για παράδειγμα, αν

$$y^*(t) = at$$

όπου $a \in \Re^p$ τότε θα πρέπει να υπάρχει τροχιά $x^*(t)$ του συστήματος ανοικτού βρόχου (9.21) τέτοια ώστε

$$at = Cx^*(t)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η τροχιά $x^*(t)$ θα είναι της μορφής

$$x^*(t) = \beta t$$

όπου β ένα πραγματικό διάνυσμα. Οι λύσεις όμως της εξίσωσης (9.21) είναι της μορφής

$$x^*(t) = \sum_{i=1}^{n^*} \sum_{j}^{m_i} t^{j-1} e^{\lambda_i t} \beta_{ij} \tag{9.22}$$

όπου λ_1, λ_2, ..., λ_n είναι οι ιδιοτιμές της μήτρας A, και m_i οι αντίστοιχες πολλαπλότητες. Είναι φανερό ότι για να ισχύει η σχέση

$$x^*(t) = \beta t = \sum_{i=1}^{n^*} \sum_{j}^{m_i} t^{j-1} e^{\lambda_i t} \beta_{ij}$$

για κάθε t θα πρέπει να υπάρχουν i και j τέτοια ώστε ο αντίστοιχος όρος $t^{j-1} e^{\lambda_i t} \beta_{ij}$ να είναι της μορφής

$$\beta t = t^{j-1} e^{\lambda_i t} \beta$$

Αυτό συμβαίνει μόνο αν $\lambda_i = 0$ και $j = 2$. Συνεπώς

Θεώρημα 9.2

Αναγκαία συνθήκη για να υπάρχει έλεγχος της μορφής

$$u(t) = K(y(t) - y^*(t))$$

τέτοιος ώστε η έξοδος του προκύπτοντος συστήματος κλειστού βρόχου να παρακολουθεί μία τροχιά της μορφής

$$y^*(t) = at$$

είναι η μήτρα *A* να έχει μία διπλή μηδενική ιδιοτιμή. Ενα τέτοιο σύστημα ονομάζεται *σύστημα τύπου δύο* (type-2 system)

Εξ'άλλου, αν η επιθυμητή τροχιά εξόδου ειναι της μορφής

$$y^*(t) = at^2$$

τότε θα πρέπει να υπάρχει τροχιά $x^*(t)$ του συστήματος ανοικτού βρόχου τέτοια ώστε

$$at^2 = Cx^*(t)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι η τροχιά $x^*(t)$ θα είναι της μορφής

$$x^*(t) = \beta t^2$$

όπου β ένα πραγματικό n-διάστατο διάνυσμα. Συνεπώς λόγω της (9.22) θα πρέπει να επαληθεύεται η σχέση

$$x^*(t) = \beta t^2 = \sum_{i=1}^{n^*} \sum_{j}^{m_i} t^{j-1} e^{\lambda_i t} \beta_{ij}$$

Είναι φανερό ότι για να ισχύει η τελευταία σχέση για κάθε t θα πρέπει να υπάρχουν i και j τέτοια ώστε ο αντίστοιχος όρος $t^{j-1}e^{\lambda_i t}\beta_{ij}$ να είναι της μορφής

$$\beta t^2 = t^{j-1} e^{\lambda_i t} \beta_{ij}$$

Αυτό συμβαίνει μόνο αν $\lambda_i=0$ και $j=3$. Συνεπώς

Θεώρημα 9.2

Αναγκαία συνθήκη για να υπάρχει έλεγχος της μορφής

$$u(t) = K(y(t) - y^*(t))$$

τέτοιος ώστε η έξοδος του προκύπτοντος συστήματος κλειστού βρόχου να παρακολουθεί μία τροχιά της μορφής

$$y^*(t) = at^2$$

είναι η μήτρα A να έχει μία τριπλή μηδενική ιδιοτιμή. Ενα σύστημα ..τέτοιο σύστημα ονομάζεται *σύστημα τύπου τρία* (type-3 system)

9.5 Ασκήσεις

Ενα σύστημα Σ, μίας εισόδου – μίας εξόδου, περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix} x$$

Α. Σκοπός είναι ο σχεδιασμός ενός συστήματος ελέγχου για την ρύθμιση της εξόδου γύρω από το σημείο λειτουργίας $y_e=2$.

α) Να σχεδιασθεί ένα **πλήρες** σύστημα ελέγχου με ανατροφοδότηση καταστάσεως
β) Υπάρχει νόμος ελέγχου για την εφαρμογή του οποίου δεν είναι απαραίτητος ο σχεδιασμός παρατηρητή; Σε περίπτωση θετικής απαντήσεως, να προσδιορισθεί σχεδιασθεί ένας τέτοιος νόμος ελέγχου.
Β. Αν υποθέσουμε τώρα ότι επιθυμούμε η ρύθμιση να γίνεται γύρω από το σημείο λειτουργίας $y_e=0$, να προσδιορισθεί (αν υπάρχει) ένας νόμος ελέγχου της μορφής $u=Kx$ ώστε το προκύπτον σύστημα κλειστού βρόχου να έχει τροχιά της μορφής

$$x(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} r(t)$$

όπου $r(t)$ είναι βαθμωτή συνάρτηση του χρόνου.

Λύση:
Α) Θεωρούμε έλεγχο της μορφής

$$u = u_e + K(x - x_e)$$

όπου x_e είναι μία κατάσταση ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου τέτοια ώστε

$$y_e = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{e1} \\ x_{e2} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Αν

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$$

τότε για να είναι η x_e είναι κατάσταση ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου θα πρέπει επί πλέον να επαληθεύεται η σχέση

$$Ax_e + Bu_e = 0$$

η οποία, αντικαθιστώντας τις τιμές των A και B γίνεται

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{e1} \\ x_{e2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Από τις σχέσεις (1.1) και (1.2) προκύπτει ότι

$$x_{e1} = 0{,}5$$
$$x_{e2} = 1$$
$$u_e = -1$$

Η μήτρα K θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών της μήτρας $A+BK$ να είναι αρνητικά.

Οι ιδιοτιμές της μήτρας A είναι λύσεις της αλγεβρικής εξίσωσης

$$\det(\lambda I_2 - A) = 0$$

όπου

$$\det(\lambda I_2 - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} \right) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -8 & \lambda+2 \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$$

Αρα, $\lambda_1 = -4$ $\lambda_2 = 2$. Συνεπώς το σύστημα ανοικτού βρόχου είναι ασταθές. Εξ'άλλου, επειδή η μήτρα ελεγξιμότητας

$$rank\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix} = 1$$

μόνο μία από τις ιδιοτιμές μπορεί να αντικατασταθεί. Θα εξετάσουμε αν το σύσυτημα είναι σταθεροποιήσιμο, δηλαδή αν η ασταθής ιδιοτιμή $\lambda_2=2$ είναι ελέγξιμη ή όχι.

Εστω

$$w_2 = \begin{bmatrix}1 & w_{22}\end{bmatrix}$$

το αριστερό ιδιοδιάνυσμα της μήτρας A που αντιστοιχεί στην ασταθή ιδιοτιμή $\lambda_2=2$. Τότε θα ισχύει

$$w_2 A = \lambda_2 w_2$$

ή

$$\begin{bmatrix}1 & w_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 8 & -2\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1 & w_{22}\end{bmatrix}$$

απ'όπου προκύπτει ότι

$$w_2 = \begin{bmatrix}1 & 0{,}25\end{bmatrix}$$

Επειδή

$$w_2 B = \begin{bmatrix}1 & 0{,}25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} = 1{,}5 \neq 0$$

η ιδιοτιμή $\lambda_2=2$ είναι ελέγξιμη, συνεπώς μπορεί να αντικατασταθεί. Σαν νέα ιδιοτιμή επιλέγουμε την $\lambda_2=-5$. Τότε η μήτρα K θα υπολογισθεί από την σχέση

$K = VU^{-1}$

όπου

$$V = \begin{bmatrix}v_1 & v_2\end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix}u_1 & u_2\end{bmatrix}$$

με

$v_1=0$ (επειδή δεν θα αντικαταστήσουμε την ευσταθή ιδιοτιμή $\lambda_1=-4$)

$v_2=1$ (αυθαίρετα)

u_1 το ιδιοδιάνυσμα της A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1=-4$

$u_2 = (\lambda_2^* I_2 - A)^{-1} B v_2$

Επειδή

$$u_1 = \begin{bmatrix}1\\ -4\end{bmatrix}$$

και

$$u_2=(\lambda_2^* I_2-A)^{-1}Bv_2=\left(\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ 8 & -2\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\cdot 1=$$

$$=\begin{bmatrix}-5 & -1\\ -8 & -3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=-\frac{1}{7}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

η μήτρα U γίνεται

$$U=\begin{bmatrix}1 & -1/7\\ -4 & -2/7\end{bmatrix}$$

Εξ'άλλου,

$$V=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

Συνεπώς

$$K=VU^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1/7\\ -4 & -2/7\end{bmatrix}^{-1}=-\frac{7}{6}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2/7 & 1/7\\ 4 & 1\end{bmatrix}=-\frac{7}{6}\begin{bmatrix}4 & 1\end{bmatrix}$$

και ο νόμος ελέγχου είναι ο

$$u=u_e+K(x-x_e)=-1-\frac{7}{6}\begin{bmatrix}4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1-0{,}5\\ x_2-1\end{bmatrix}$$

ή

$$u=2{,}5-\frac{14}{3}x_1-\frac{7}{6}x_2$$

β) Υπάρχει νόμος ελέγχου για την εφαρμογή του οποίου δεν είναι απαραίτητος ο σχεδιασμός παρατηρητή; Σε περίπτωση θετικής απαντήσεως, να προσδιορισθεί σχεδιασθεί ένας τέτοιος νόμος ελέγχου.

Λύση:

Για να αποφύγουμε τον σχεδιασμό παρατηρητή, επιλέγουμε νόμο με ελέγχου με ανατροφοδότηση της εξόδου της μορφής

$$u=u_e+k(y-y_e)$$

Λαμβάνοντας υπ'όψιν ότι $y=Cx$, ο νόμος αυτός γράφεται ισοδυνάμως υπό την μορφή

$$u=u_e+kC(x-x_e)$$

όπου x_e είναι μία κατάσταση ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου τέτοια ώστε

$$y_e = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{e1} \\ x_{e2} \end{bmatrix}$$

Το σύστημα κλειστού βρόχου θα περιγράφεται από την σχέση

$$\dot{x} = Ax + B(u_e + kC(x - x_e))$$

Συνεπώς, για να είναι η x_e κατάσταση ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου θα πρέπει επί πλέον να επαληθεύεται η σχέση

$$Ax_e + B(u_e + kC(x_e - x_e)) = 0$$

η οποία γράφεται

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{e1} \\ x_{e2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ότι

$$x_{e1} = 0{,}5$$
$$x_{e2} = 1$$
$$u_e = -1$$

Για να εξασφαλίζεται η ασυμπτωτική ευστάθεια της ισορροπίας x_e και κατά συνέπεια και της y_e θα πρέπει η σταθερά k να είναι τέτοια ώστε τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών της μήτρας A+BkC να είναι αρνητικά. Η μήτρα A+BkC γράφεται

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} k \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1+2k \\ 8 & -2+4k \end{bmatrix}$$

και οι ιδιοτιμές της είναι λύσεις της αλγεβρικής εξίσωσης

$$\det(\lambda I_2 - A - BkC) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1+2k \\ 8 & -2+4k \end{bmatrix} \right) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1-2k \\ -8 & \lambda+2-4k \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \lambda^2 + (2-4k)\lambda - 8 - 16k = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει αρνητικές ιδιοτιμές αν και μόνο αν

$$2-4k>0$$

και

$$(2-4k)^2>12+16k^2$$

δηλαδή αν

$$k<-0{,}5$$

Συνεπώς ένας κατάλληλος νόμος ελέγχου είναι ο

$$u(t)=-1-2(y(t)-2)$$

Β. Αν υποθέσουμε τώρα ότι επιθυμούμε η ρύθμιση να γίνεται γύρω από το σημείο λειτουργίας $y_e=0$, να προσδιορισθεί (αν υπάρχει) ένας νόμος ελέγχου της μορφής $u=Kx$ ώστε το προκύπτον σύστημα κλειστού βρόχου να έχει τροχιά της μορφής

$$x(t)=\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}r(t)$$

όπου $r(t)$ είναι βαθμωτή συνάρτηση του χρόνου.
Λύση:
Με ένα έλεγχο της μορφής $u=Kx$ το προκύπτον σύστημα κλειστού θα περιγράφεται από την εξίσωση

$$\dot{x}(t)=(A+BK)x(t)$$

Η

$$x(t)=\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}r(t)$$

θα είναι τροχιά του συστήματος αν επαληθεύεται η εξίσωση

$$\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}\dot{r}(t)=(A+BK)\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}r(t)$$

Η σχέση αυτή γράφεται υπό την μορφή

$$(A+BK)\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}=\frac{\dot{r}(t)}{r(t)}\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$$

από την οποία προκύπτει ότι ο λόγος

$$\lambda = \frac{\dot{r}(t)}{r(t)}$$

είναι μία σταθερά. Ετσι η σχέση γράφεται υπό την μορφή

$$(A+BK)\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$$

που σημαίνει ότι ο λόγος λ είναι ιδιοτιμή της μήτρας $A+BK$ και το

$$u^* = \begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$$

είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της μήτρας αυτής. Συνεπώς, η μήτρα K θα επιλεγεί έτσι ώστε το u^* να είναι ιδιοδιάνυσμα της μήτρας K. Θα πρέπει λοιπόν να υπάρχει λ τέτοιο ώστε

$$(A+BK)\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\8 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}(k_1 + 2k_2) = \lambda\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$$

ή, τέλος,

$$\begin{aligned}-2-k_1-2k_2 &= -\lambda\\ -4-2k_1-4k_2 &= -2\lambda\end{aligned}$$

Διαλέγω

$$k_1 = 0 \quad k_2 = -2{,}5 \quad \lambda = -3$$

και ο έλεγχος γίνεται

$$u = -2{,}5x_2$$

ή

$$u = -1{,}25y$$