# 1
# Εισαγωγή

Ο έλεγχος φυσικών ή συμβολικών συστημάτων είναι ένα πολύ σύνθετο πρόβλημα για την επίλυση του οποίου ο μηχανικός ελέγχου πρέπει να διαθέτει γνώσεις μαθηματικών, γνώσεις φυσικής, γνώσεις πληροφορικής αλλά και αρκετή διαίσθηση. Το σύνθετο αυτό πρόβλημα στήν πράξη αντιμετωπίζεται με αναγωγή σε απλούστερα υποπροβλήματα τα οποία θεωρητικά μπορούν να επιλυθούν διαδοχικά, στην πράξη όμως η σειρά επιλύσεώς τους δεν είναι ούτε καθορισμένη ούτε ευθεία. Γενικά, η διαδικασία αναπτύξεως ενός συστήματος ελέγχου ακολουθεί τα εξής στάδια:

1. Ποιοτικός προσδιορισμός προτύπου (Modeling).
2. Ανάπτυξη μαθηματικού προτύπου - Αναγνώριση. (Mathematical modeling - Identification).
3. Ανάλυση συμπεριφοράς μαθηματικού προτύπου.
4. Ορισμός του προβλήματος ελέγχου.
5. Σχεδίαση συστήματος ελέγχου.

Ο ποιοτικός προσδιορισμός προτύπου συνίσταται στην επιλογή των κατάλληλων ποσοτήτων (μεταβλητών) οι οποίες θεωρούμε ότι περιγράφουν την συμπεριφορά του συστήματος. Στο στάδιο αυτό μπορούμε να προσδιρρίσουμε τους τρόπους με τους οποίους αλληλεπιδρούν οι μεταβλητές αυτές χωρίς όμως να ενδιαφερόμαστε για τις ποσοτικές ιδιότητες των διασυνδέσεών τους.

Η ανωτέρω ποιοτική ανάλυση του υπό έλεγχο συστήματος μας βοηθά να επιλέξουμε το είδος των μαθηματικών εξισώσεων που θα περιγράψουν το σύστημα. Η κατάστρωση των μαθηματικών εξισώσεων μπορεί να προκύψει μετά από εφαρμογή κατάλληλων νόμων που διέπουν την συμπεριφορά του συστήματος (π.χ. φυσικών νόμων αν πρόκειται γιά φυσικό σύστημα) χωρίς ωστόσο αυτή η προσέγγιση να είναι η μοναδική αλλά ούτε και να αποτελεί τον καλύτερο τρόπο προσδιορισμού ενός μαθηματικού προτύπου. Το τελευταίο στάδιο στην ανάπτυξη του μαθηματικού προτύπου είναι ο προσδιορισμός των τιμών των παραμέτρων του. Το πρόβλημα αυτό ονομάζεται αναγνώριση συστήματος (system identification).

Το τρίτο στάδιο είναι η ανάλυση του μαθηματικού προτύπου. Με την προϋπόθεση ότι το μαθηματικό πρότυπο περιγράφει πιστά το υπό έλεγχο σύστημα, η ανάλυση αυτή αντικαθιστά την πειραματική μελέτη του τελευταίου. Η επεξεργασία των αποτελεσμάτων της αναλύσεως του μαθηματικού προτύπου μας οδηγεί στον ορισμό του προβλήματος του ελέγχου ο οποίος έχει σαν σκοπό τον προσδιορισμό της πολιτικής εκείνης πού θα εξασφαλίζει την επιθυμητή συμπεριφορά του συστήματος. Στό τελευταίο στάδιο της διαδικασίας προσδιορίζεται η κατάλληλη πολιτική ελέγχου και σχεδιάζεται η μονάδα ελέγχου που θα την υλοποιεί.

Στό βιβλίο αυτό δεν θα ασχοληθούμε με τα δύο πρώτα στάδια της μελέτης γιατί αυτά προυποθέτουν τις γνώσεις των μεθόδων αναλύσεως της συμπεριφοράς μαθηματικών προτύπων καθώς και των τεχνικών ελέγχου. Στα πλαίσια του βιβλίου αυτού θα ασχοληθούμε με θέματα αναλύσεως μαθηματικών προτύπων και θα παραθέσουμε τεχνικές σχεδιασμού συστημάτου ελέγχου βασισμένες στην προσέγγιση του χώρου καταστάσεως..

Η ύλη του βιβλίου αυτού έχει διαρθρωθεί ως εξής: Στο επόμενο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την μαθηματική περιγραφή συστημάτων. Η μελέτη αυτή επιτρέπει να γίνει μίαν σύγκριση των Το τρίτο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στα μαθηματικά πρότυπα γραμμικών συστημάτων. Η μελέτη γραμμικών προτύπων καταστατικών εξισώσεων είναι το κύριο αντικείμενο του βιβλίου αυτού.

Η ανάπτυξη μεθόδων επιλύσεως των γραμμικών καταστατικών εξισώσεων και η εφαρμογή των μεθόδων αυτών στον σχεδιασμό ψηφιακών συστημάτων ελέγχου είναι το αντικείμενο του τετάρτου κεφαλαίου.

Στο πέμπτο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τις θεμελιώδεις έννοιες της ελεγξιμότητας και παρατηρησιμότητας γραμμικών συστημάτων ενώ το επόμενο έχει σαν αντικείμενο τις ισοδύναμες καταστατικές εξισώσεις

Αν και το βιβλίο αυτό είναι αφιερωμένο στην μελέτη γραμμικών δυναμικών συστημάτων, στο έβδομο κεφάλαιο που αναφέρεται στην σημαντική έννοια της ευστάθειας θεωρούνται μη γραμμικά συστήματα. Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε και να μελετήσουμε έννοιες ευστάθειας που δεν συναντώνται στα γραμμικά συστήματα.

Το βιβλίο κλείνει με δύο κεφάλαια που αναφέρονται στον σχεδιασμό συστημάτων ελέγχου με ανατροφοδότηση των μεταβλητών καταστάσεως.

© George Bitsoris

# 2

# Το σύστημα και η μαθηματική περιγραφή του

## 2.1 Εισαγωγή

Ενα φυσικό ή συμβολικό σύστημα είναι μία διάταξη που επιτελεί μία συγκεκριμένη λειτουργία. Πρέπει να τονισθεί ότι ένα σύστημα χαρακτηρίζεται από την λειτουργία που επιτελεί και όχι από τις φυσικές συνιστώσες του. Η λειτουργία που επιτελεί ένα σύστημα μπορεί να εκφρασθεί σαν μία *απεικόνιση* (mapping) σημάτων. Για παράδειγμα, σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα τα σήματα που εκφράζουν τις τάσεις ή τα ρεύματα των διαφόρων παθητικών ηλεκτρικών στοιχείων του κυκλώματος μπορούν να θεωρηθούν σαν απεικονίσεις των σημάτων που εκφράζουν τις τάσεις ή τα ρεύματα των πηγών του κυκλώματος. Σε μία μικροφωνική διάταξη ένα ηχητικό σήμα ομιλίας μετατρέπεται σε ένα αντίστοιχο ηχητικό σήμα μεγαλύτερης εντάσεως. Στο συμβολικό σύστημα διαδικασίας παραγωγής το κόστος του παραγόμενου προϊόντος είναι απεικόνιση της ποσότητος

© George Bitsoris

και του κόστους των πρώτων υλών, της εργασίας και των λοιπών συντελεστών που είναι απαραίτητοι για την παραγωγή του εν λόγω προϊόντος.

Η περιγραφή ενός συστήματος γίνεται με την βοήθεια ενός προτύπου (model), φυσικού ή συμβολικού. Για παράδειγμα, το ηλεκτρικό ανάλογο ενός μηχανικού συστήματος αποτελεί ένα φυσικό πρότυπό του. Συμβολικό πρότυπο του ίδιου συστήματος αποτελούν οι μαθηματικές σχέσεις που περιγράφουν την λειτουργία του. Και στις δύο περιπτώσεις το πρότυπο αποτελεί μία προσεγγιστική περιγραφή του πραγματικού συστήματος γι αυτό είναι σημαντικό να γίνεται διάκριση μεταξύ ενός φυσικού ή συμβολικού συστήματος και του *προτύπου* (model) που το περιγράφει.

Η θεώρηση ενός συστήματος ως μία απεικόνιση (mapping) από ένα σύνολο σημάτων σε ένα άλλο επιτρέπει την περιγραφή του συστήματος από ένα σύνολο μαθηματικών σχέσεων που αποτελούν αυτό που αποκαλείται *μαθηματικό πρότυπο* (mathematical model) του συστήματος. Είναι φανερό ότι για το ίδιο σύστημα μπορούν να αναπτυχθούν πολλά διαφορετικά μαθηματικά πρότυπα αναλόγως του είδους των μαθηματικών εργαλείων που υιοθετούνται ή του βαθμού προσέγγισης της περιγραφής του συστήματος. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την μαθηματική περιγραφή των συστημάτων και την ταξινόμησή τους βάσει γενικών ιδιοτήτων.

## 2.2 Το μαθηματικό πρότυπο εισόδου- εξόδου

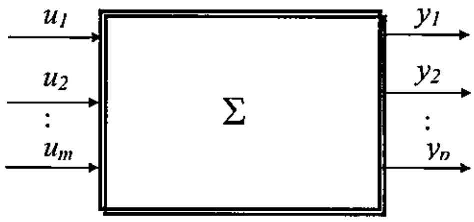
Ως *σύστημα* (system) ορίζουμε μία οποιαδήποτε απεικόνιση $S$ από έν σύνολο σημάτων $U$ σε ένα άλλο σύνολο σημάτων $Y$. Τα σήματα $u$ που ανήκουν στο πρώτο σύνολο $U$ ονομάζονται *είσοδοι* (inputs) του συστήματος ενώ οι εικόνες τους $y$ που είναι και αυτά σήματα ονομάζονται *έξοδοι* (outputs) του συστήματος.

Ενα *μαθηματικό πρότυπο* (mathematical model) περιγράφει την σχέση μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του συστήματος. Οι είσοδος $u$ και η έξοδος $y$ είναι σήματα, δηλαδή διανυσματικές συναρτήσεις οι οποίες ορίζονται σε ένα σύνολο χρόνου $T$ και παίρνουν τιμές στον $m$-διάστατο και $p$-διάστατο πραγματικό ή μιγαδικό χώρο αντιστοίχως. Συμβολικά γράφουμε $u(\tau)$, $u{:}T\to C^m$ και $y(t)$, $y{:}T\to C^p$ και εννοούμε τις διανυσματικές συναρτήσεις

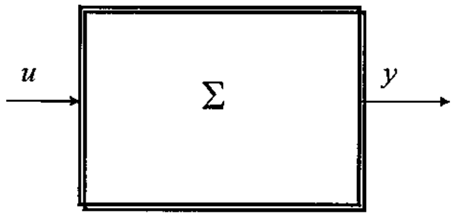
$$u(\tau)=\begin{bmatrix} u_1(\tau) \\ u_2(\tau) \\ \vdots \\ u_m(\tau) \end{bmatrix}, \qquad y(\tau)=\begin{bmatrix} y_1(\tau) \\ y_2(\tau) \\ \vdots \\ y_p(\tau) \end{bmatrix}.$$

© George Bitsoris

όπου $\tau \in T$. Ενα σύστημα Σ παριστάνεται σαν ένα μαύρο κουτί που επικοινωνεί με τον έξω κόσμο μέσω των εισόδων $u_j$ και εξόδων $y_i$ όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα




ή απλώς




Ενα μαθηματικό *πρότυπο εισόδου-εξόδου* (input-output model) είναι μια μαθηματική σχέση που συνδέει την έξοδο $y(\cdot)$ με την είσοδο:

$$y(\cdot) = S[u(\cdot)]$$

Στην σχέση αυτή το σύμβολο $S$ παριστάνει μία απεικόνιση απο το σύνολο συναρτήσεων $U$ στο οποίο ανήκει η $u(\cdot)$ στο σύνολο συναρτήσεων $Y$ στο οποίο ανήκει η $y(\cdot)$. Δεχόμαστε ότι η απεικόνιση $S$ είναι μονοσήμαντη, δηλαδή σε κάθε είσοδο $u(\cdot)$ αντιστοιχεί μία μόνο έξοδος $y(\cdot)$.

Μία πρώτη σημαντική ταξινόμηση των συστημάτων είναι εκείνη που τα κατατάσσει σε συστήματα συνεχούς χρόνου και συστήματα διακριτού χρόνου. *Συστήματα συνεχούς χρόνου* (continuous-time systems) είναι εκείνα των οποίων και η είσοδος και η έξοδος είναι σήματα συνεχούς χρόνου. Κατ'αναλογία, ένα σύστημα του οποίου τόσο η είσοδος όσο και η έξοδος είναι σήματα διακριτού χρόνου ονομάζεται *σύστημα διακριτού χρόνου* (discrete-time system).

**Παράδειγμα 2.1**

Οπως είπαμε, ένα σύστημα είναι απεικόνιση από ένα σύνολο σημάτων σε ένα άλλο σύνολο σημάτων. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή της εξόδου σε μία χρονική στιγμή $t$ μπορεί να εξαρτάται από πολλές τιμές της εισόδου για διάφορες χρονικές στιγμές. Ενα τέτοιο σύστημα συνεχούς χρόνου είναι ο *ολοκληρωτής* (integrator) του οποίου η έξοδος σε μία χρονική στιγμή $t$ εξαρτάται από όλες τις τιμές της εισόδου στο διάστημα $(-\infty,t]$. Ενα μαθηματικό πρότυπο εισόδου-εξόδου του ολοκληρωτή δίνεται από την σχέση

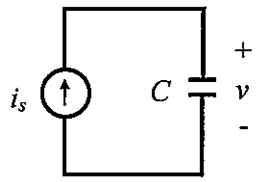
$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\tau)d\tau$$

**Παράδειγμα 2.2**

Ενα αντίστοιχο προς τον ολοκληρωτή σύστημα διακριτού χρόνου είναι ο *συσσωρευής* (accumulator) του οποίου ένα μαθηματικό πρότυπο εισόδου-εξόδου δίνεται από την σχέση

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}u[k]$$

Στο Σχήμα 2.1 φαίνεται ένα ηλεκτρικό κύκλωμα αποτελούμενο από μία πηγή ρεύματος εντάσεως $i_s(t)$ και ένα πυκνωτή χωρητικότητας $C$.




Σχήμα 2.1: Σύστημα μίας εισόδου-μίας εξόδου

Η τάση του πυκνωτή $v(t)$ σε μία χρονική στιγμή $t\geq t_o$ συνδέεται με την ένταση $i_s$ της πηγής ρεύματος μέσω της σχέσεως

$$v(t)=v(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}i_s(\tau)d\tau$$

όπου $v(t_0)$ υποδηλώνει την αρχική τάση του πυκνωτή την χρονική στιγμή $t_0$. Αν το κύκλωμα αυτό θεωρηθεί ως σύστημα με είσοδο $i_s(.)$ και έξοδο την τάση του πυκνωτή $v(.)$, τότε ένα μαθηματικό πρότυπο εισόδου-εξόδου ορίζεται από τη σχέση

$$y(t)=v(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}u(\tau)d\tau \qquad (2.1)$$

© George Bitsoris

όπου όμως η απεικόνιση από την είσοδο προς την έξοδο του συστήματος δεν είναι μονοσήμαντη αφού από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι η τιμή της εξόδου σε μια χρονική στιγμή δεν εξαρτάται μόνο από την είσοδο $u(.)\,u(\cdot)=i_s(.)$ αλλά και από την τιμή της τάσεως $v(t_0)$. Για να αρθεί αυτή η δυσκολία υποθέτουμε ότι

$$y(t_0)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0}u(\tau)d\tau$$

δηλαδή θεωρούμε ότι η τάση $v(t_0)$ είναι αποτέλεσμα της εισόδου του συστήματος από το $-\infty$ έως την χρονική στιγμή $t_0$. Ετσι η σχέση εισόδου-εξόδου του συστήματος να γράφεται υπό την μορφή

$$y(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0}u(\tau)d\tau+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}u(\tau)d\tau=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}u(\tau)d\tau \qquad (2.2)$$

Η υπόθεση αυτή ισοδυναμεί με το γεγονός ότι η έξοδος του συστήματος είναι μηδενική όταν η είσοδος του είναι εκ ταυτότητος ίση με το μηδέν. Λέμε τότε ότι το σύστημα *είναι σε χαλάρωση* (relaxed system) στο χρόνο $t=-\infty$. Γενικεύοντας τα ανωτέρω δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

**Ορισμός 2.1**
Ενα σύστημα *βρίσκεται σε χαλάρωση* την χρονική στιγμή $\tau_0$ άν η σχέση $u(\tau)=0$ για $\tau\geq\tau_0$ συνεπάγεται την σχέση $y(\tau)=0$ για $\tau\geq\tau_0$.

Στην συνέχεια θα υποθέτουμε ότι όλα τα συστήματα βρίσκονται σε χαλάρωση στο $t=-\infty$ απ' όπου προκύπτει ότι αν η είσοδος ενός συστήματος είναι εκ ταυτότητος ίση με το μηδέν τότε το ίδιο ισχύει και για την έξοδό του.

**Παράδειγμα 2.3**

Εστω ένα σύστημα συνεχούς χρόνου που περιγράφεται από την γραμμική διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=u(t)$$

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$y(t)=e^{-0,5(t-t_0)}y(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{-0,5(t-\tau)}u(\tau)d\tau$$

Οταν η είσοδος είναι μηδέν για $t\geq t_0$, τότε

$$y(t) = e^{-0,5(t-t_0)} y(t_0)$$

απ'όπου προκύπτει ότι η έξοδος είναι μηδενική για $t \geq t_0$ αν και μόνο αν $y(t_0)=0$. Συνεπώς το σύστημα είναι σε χαλάρωση την χρονική στιγμή $t_0$ αν και μόνο αν $y(t_0)=0$, δηλαδή αν και μόνο αν ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος την χρονική στιγμή $t_0$.

## 2.3 Ταξινόμηση συστημάτων

Η βασική κατηγοροποίηση των συστημάτων είναι εκείνη που τα διακρίνει σε συστήματα συνεχούς και σε συστήματα διακριτού χρόνου. Στην συνέχεια προβαίνουμε σε περαιτέρω κατηγοροποιήσεις που δεν εξαρτώνται από την φύση των σημάτων εισόδου και εξόδου αλλά από τις ιδιότητες της απεικόνισης $S$.

### 2.3.1 Γραμμικά συστήματα

Μία πρώτη ταξινόμηση του συνόλου των συστημάτων είναι εκείνη που τα κατατάσσει σε *γραμμικά* (linear) και *μη γραμμικά* (nonlinear). Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα $\Sigma$ που περιγράφεται από την σχέση εισόδου - εξόδου

$$y(\cdot) = S[u(\cdot)]$$

**Ορισμός 2.2**
Το σύστημα $\Sigma$ λέγεται *γραμμικό* αν και μόνο αν γιά κάθε ζεύγος εισόδων ($(u_1(\cdot), u_1(\cdot))$ και κάθε ζεύγος αριθμών $(a_1, a_2)$ ισχύει η σχέση

$$S[a_1 y_1(\cdot) + a_2 y_2(\cdot)] = a_1 S[u_1(\cdot)] + a_2 S[u_2(\cdot)]$$

Με άλλα λόγια, ένα σύστημα είναι γραμμικό αν η έξοδος σε οποιοδήποτε γραμμικό συνδυασμό εισόδων $u_1(\cdot)$ και $u_2(\cdot)$ είναι ίση με τον ίδιο γραμμικό συνδυασμό των αντίστοιχων εξόδων $y_1(\cdot)$ $y_1(\cdot)$ και $y_2(\cdot)$.

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι ένα σύστημα είναι γραμμικό αν ο τελεστής $S$ είναι
α) *Προσθετικός* (additive), δηλαδή αν οι σχέσεις

$$y_1(\cdot) = S[u_1(\cdot)]$$
$$y_2(\cdot) = S[u_2(\cdot)]$$

συνεπάγονται την σχέση

© George Bitsoris

$$y_1(\cdot)+y_2(\cdot)=S[u_1(\cdot)+u_2(\cdot)]$$

β) και *Ομογενής* (homogeneous), δηλαδή αν από την σχέση

$$y(\cdot)=S[u(\cdot)]$$

προκύπτει η σχέση

$$ay(\cdot)=S[au(\cdot)]$$

γιά κάθε αριθμό $\alpha$.

**Παράδειγμα 2.4**

Εστω ένα σύστημα συνεχούς χρόνου που περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=u(t)$$

Αν $(u_1(\cdot),y_1(\cdot))$ και $(u_2(\cdot),y_2(\cdot))$ είναι δύο ζεύγη εισόδου-εξόδου του συστήματος τότε για κάθε ζεύγος μιγαδικών αριθμών $\alpha_1$ και $\alpha_2$ το ζεύγος $(a_1u_1(\cdot)+a_2u_2(\cdot),a_1y_1(\cdot)+a_2y_2(\cdot))$ είναι επίσης ζεύγος εισόδου-εξόδου του συστήματος, γιατί από τις σχέσεις

$$\frac{dy_1(t)}{dt}+2y_1(t)=u_1(t)$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt}+2y_2(t)=u_2(t)$$

με πολλαπλασιασμό επί $\alpha_1$ και $\alpha_2$ αντιστοίχως προκύπτουν οι σχέσεις

$$a_1\frac{dy_1(t)}{dt}+2a_1y_1(t)=a_1u_1(t)$$

$$a_2\frac{dy_2(t)}{dt}+2a_2y_2(t)=a_2u_2(t)$$

και με πρόσθεση κατά μέλη των τελευταίων σχέσεων προκύπτει ότι

$$a_1\frac{dy_1(t)}{dt}+2a_1y_1(t)+a_2\frac{dy_2(t)}{dt}+2a_2y_2(t)=a_1u_1(t)+a_2u_2(t)$$

ή

$$\frac{d}{dt}[a_1y_1(t)+a_2y_2(t)]+2[a_1y_1(t)+a_2y_2(t)]=a_1u_1(t)+a_2u_2(t)$$

Συνεπώς το σύστημα είναι γραμμικό.

**Παράδειγμα 2.5**

Το σύστημα συνεχούς χρόνου που περιγράφεται από την αλγεβρική εξίσωση

$$y(t)=2u(t)+5$$

είναι μη γραμμικό γιατί όπως φαίνεται από τις σχέσεις

$$2(u_1(t)+u_2(t))+5\neq(2u_1(t)+5)+(2u_2(t)+5)$$

δεν ισχύει η προσθετική ιδιότητα. Εξ' άλλου η σχέση ορισμού του συστήματος δεν είναι ούτε ομογενής γιατί

$$y(t)=2au(t)+5\neq a(2u(t)+5)=ay(t)$$

για οποιοδήποτε πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό διάφορο του μηδενός.

**Παράδειγμα 2.6**

Εστω το σύστημα διακριτού χρόνου που ορίζεται στο σύνολο των μιγαδικών σημάτων και περιγράφεται από την εξίσωση

$$y[n]=2\operatorname{Re}\{u[n]\} \tag{2.3}$$

Το σύστημα αυτό ικανοποιεί την προσθετική ιδιότητα γιατί για οποιαδήποτε μιγαδικά σήματα $u_1[n]=\mu_1[n]+j\sigma_1[n]$ και $u_2[n]=\mu_2[n]+j\sigma_2[n]$ ισχύει η σχέση

$$2\operatorname{Re}\{u_1[n]+u_2[n]\}=2\operatorname{Re}\{\mu_1[n]+j\sigma_1[n]+\mu_2[n]+j\sigma_2[n]\}=$$

$$=2\mu_1[n]+2\mu_2[n]=2\operatorname{Re}\{u_1[n]\}+2\operatorname{Re}\{u_2[n]\}$$

Ωστόσο το σύστημα δεν είναι ομογενές γιατί αν $a=j$ τότε

$$\operatorname{Re}\{au[n]\}=\operatorname{Re}\{j\mu[n]+j^2\sigma[n]\}=-\sigma(t)\neq j\operatorname{Re}\{a[n]\}=j\mu[n]$$

© George Bitsoris

Συνεπώς το σύστημα (2.3) είναι μη γραμμικό.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα *άλλο* σύστημα που περιγράφεται από την ίδια σχέση (2.3) αλλά ορίζεται στο σύνολο των πραγματικών σημάτων. Τότε η σχέση (2.3) μπορεί να γραφεί υπό την μορφή

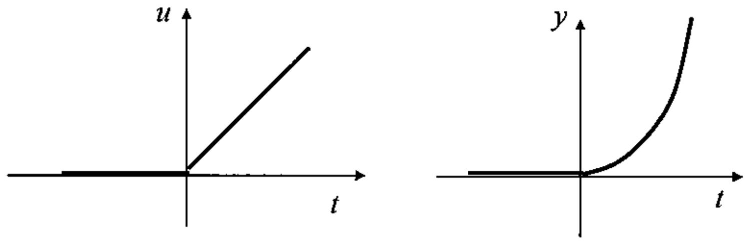
$$y[n] = 2u[n]$$

Είναι φανερό ότι στην περίπτωση αυτή το σύστημα είναι γραμμικό!

## 2.3.2. Χρονικώς αμετάβλητα συστήματα

Ας θεωρήσουμε πάλι το σύστημα του σχήματος (2.1) και ας υποθέσουμε ότι ο γραμμικός πυκνωτής έχει χωρητικότητα $C=0,5$F. Αν η ένταση της πηγής ρεύματος που αποτελεί την είσοδο του συστήματος είναι $u(t)=ts(t)$ τότε η τάση του πυκνωτή που αποτελεί την έξοδο του συστήματος είναι

$$y(t) = \frac{1}{0,5}\int_{-\infty}^{t} \tau s(\tau) d\tau = t^2 s(t)$$

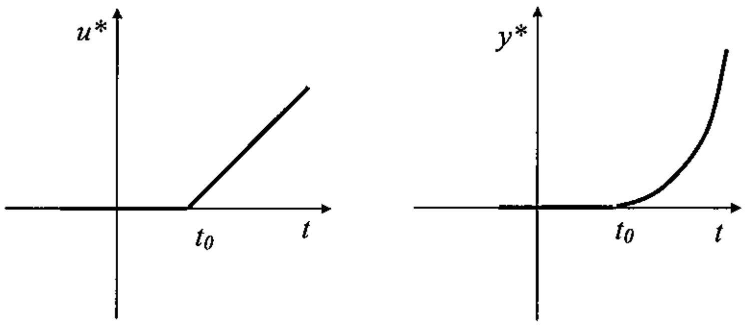



Σχήμα 2.2 Είσοδος και έξοδος του συστήματος του σχήματος (2.1) με $C=0,5$F και είσοδο $u(t)=ts(t)$

Αν μετατοπίσουμε τη καμπύλη $u(t)=ts(t)$ κατά $t_0$, δηλαδή αν θεωρήσουμε σαν είσοδο την $u^*(t)=u(t-t_0)=(t-t_0)s(t-t_0)$, τότε η έξοδος θα είναι

$$y^*(t) = \frac{1}{0,5}\int_{-\infty}^{t} (\tau - t_0) s(\tau - t_0) d\tau = (t-t_0)^2 s(t-t_0)$$

δηλαδή, όπως φαίνεται στα σχήματα 2.2 και 2.3, θα είναι η $y(t)$ μετατοπισμένη επίσης κατά $t_0$. Με άλλα λόγια οποιαδήποτε στιγμή κι αν εφαρμοσθεί μία είσοδος, η έξοδος θα είναι πάντοτε της ίδιας μορφής, δηλαδή η σχέση εισόδου-εξόδου παραμένει σταθερή στον χρόνο.




Σχήμα 2.3 Είσοδος και έξοδος του συστήματος του σχήματος (2.1) με $C$=*0,5*F και είσοδο $u^*(t)=(t-t_0)s(t-t_0)$.

Για να δώσουμε ένα αυστηρό ορισμό της χρονικής σταθερότητας της συμπεριφοράς ενός συστήματος μας χρειάζεται να ορίσουμε πρώτα τον *τελεστή μετατοπίσεως* (shifting operator) $D_{\tau_0}$. Ο τελεστής μετατοπίσεως $D_{\tau_0}$ είναι μία απεικόνιση από σύνολο συναρτήσεων σε σύνολο συναρτήσεων και έχει την ιδιότητα $D_{\tau_0}u(\tau)=u(\tau-\tau_0)$ για οποιαδήποτε συνάρτηση $u(\cdot)$ και κάθε $\tau\in T$. Ετσι,

**Ορισμός 2.2**
Ενα σύστημα $y(.)=S[u(.)]$ λέγεται *χρονικώς αμετάβλητο* (time –invariant) αν

$$S[D_{\tau_0}u(\cdot)]=D_{\tau_0}y(\cdot)$$

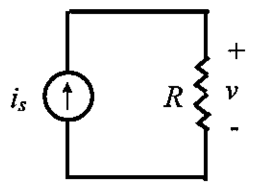
γιά κάθε $\tau_0\in T$.

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι αν στις μαθηματικές σχέσεις που περιγράφουν την συμπεριφορά ενός συστήματος η χρονική μεταβλητή εμφανίζεται μόνο υπό την μορφή της ανεξάρτητης μεταβλητής της εισόδου και της εξόδου, τότε το σύστημα είναι χρονικώς αμετάβλητο

**Παράδειγμα 2.7**

Θεωρούμε το γραμμικό κύκλωμα του σχήματος 2.3 σαν σύστημα με είσοδο $u(.)=i_s(.)$ το ρεύμα της πηγής ρεύματος και έξοδο την τάση $y(.)=v(.)$ του αντιστάτη.

© George Bitsoris

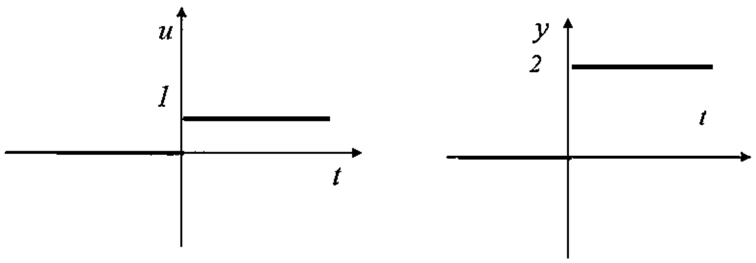



Σχήμα 2.3: Σύστημα μίας εισόδου-μίας εξόδου

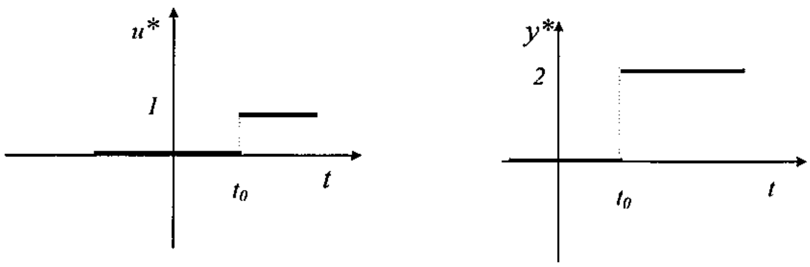
Ενα μαθηματικό πρότυπο εισόδου-εξόδου του συστήματος $y(.)=S[u(.)]$ δίνεται από την σχέση:

$$v(t)=Ri_s(t) \tag{2.4}$$

Ας υποθέσουμε κατ' άρχήν ότι $R=2$. Τότε με είσοδο $u(t)=s(t)$ η έξοδος θα είναι $y(t)=2s(t)$. Αν τώρα επιβληθεί στο σύστημα η ίδια είσοδος αλλά μετατοπισμένη χρονικά κατά $t_0$, δηλαδή αν επιβληθεί η είσοδος $u^*(t)=s(t-t_0)$, τότε η νέα έξοδος θα είναι $y^*(t)=2s(t-t_0)$.



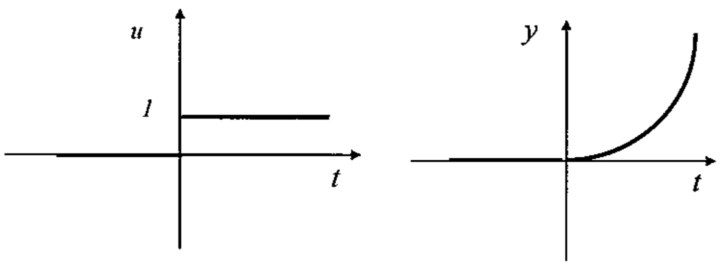

Σχήμα 2.4α: Η είσοδος $u(t)=s(t)$ και η αντίστοιχη έξοδος $y(t)$ του συστήματος (2.4) όταν $R=2$



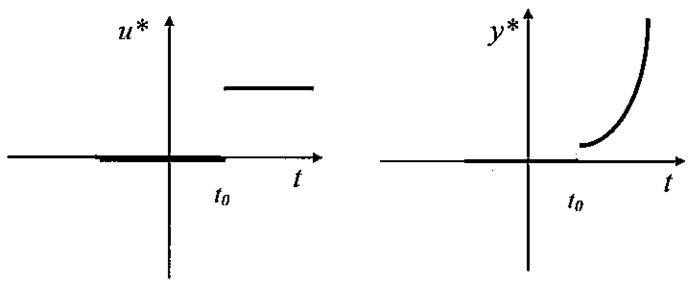

Σχήμα 2.4β: Η είσοδος $u^*(t)=s(t-t_0)$ και η αντίστοιχη έξοδος $y(t)$ του συστήματος (2.4) όταν $R=2$

αΑπό τα σχήματα 2.4α και 2.4β φαίνεται ότι χρονική μετατόπιση της εισόδου κατά $t_0$, έχει σαν συνέπεια να έχουμε εξόδο της ίδιας μορφής αλλά ισόχρονα μετατατοπισμένη.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η αντίσταση του αντιστάτη δεν είναι σταθερή στον χρόνο αλλά $R(\tau)=2t^2$. Τότε με είσοδο $u(t)=s(t)$ η έξοδος θα είναι $y(t)=2t^2s(t)$ ενώ αν επιβληθεί στο σύστημα η ίδια είσοδος αλλά μετατοπισμένη χρονικά κατά $t_0$, δηλαδή αν επιβληθεί η είσοδος $u^*(t)=s(t-t_0)$, η νέα έξοδος θα είναι $y^*(t)=2t^2s(t-t_0)$. Οπως φαίνεται στα σχήματα 2.5α και 2.5β, οι δύο έξοδοι δεν είναι όμοιες δηλαδή στην περίπτωση αυτή το σύστημα είναι χρονικώς μεταβαλλόμενο.




Σχήμα 2.5.α: Η είσοδος $u(t)=s(t)$ και η αντίστοιχη έξοδος $y(t)$ του συστήματος (2.4) όταν $R=2t$




Σχήμα 2.5.α: Η είσοδος $u^*(t)=s(t-t_0)$ και η αντίστοιχη έξοδος $y^*(t)$ του συστήματος (2.4) όταν $R=2t$

## 2.3.3 Συστήματα με μνήμη

Ας θεωρήσουμε πάλι τα συστήματα των σχημάτων (2.3) και (2.1) των οποίων η συμπεριφορά περιγράφεται από τις σχέσεις

$$v(t)=Ru(t) \tag{2.5}$$

και

© George Bitsoris

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau \qquad (2.6)$$

αντιστοίχως. Μια σύγκριση της συμπεριφοράς των δύο συστημάτων μας οδηγεί στις παρακάτω διαπιστώσεις: Για τον προσδιορισμό της τιμής της εξόδου του συστήματος του σχήματος (2.3) την χρονική στιγμή $t$ είναι αρκετή η γνώση της τιμής της εισόδου την ίδια χρονική στιγμή. Με άλλα λόγια η συμπεριφορά της εξόδου του συστήματος αυτού την στιγμή $t$ δεν εξαρτάται από τη συμπεριφορά της εισόδου ούτε σε διάστημα $(t_o,t)$ για $t_o<t$, ούτε σε διάστημα $(t,t^*)$ για $t^*>t$. Δηλαδή, η έξοδος δεν "θυμάται" ούτε το παρελθόν ούτε το μέλλον (!). Ενα τέτοιο σύστημα δεν έχει μνήμηκαι ονομάζεται *στιγμιαίο* σύμφωνα με τον παρακάτω ορισμό:

**Ορισμός 2.3**
Ενα σύστημα ονομάζεται *στιγμιαίο* η *σύστημα μηδενικής μνήμης* (memoryless system) αν η τιμή της εξόδου του σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή εξαρτάται μόνο από την τιμή της εισόδου την ίδια χρονική στιγμή.

Σε αντίθεση προς το σύστημα του σχήματος (2.3), η τιμή της εξόδου του σχήματος (2.1) εξαρτάται από τις τιμές της εισόδου σ' όλο το διάστημα $(-\infty,t)$, δηλαδή η έξοδος "θυμάται" το παρελθόν. Στην ίδια κατηγορία συστημάτων ανήκει και το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση

$$y(t)=u(t+2) \qquad (2.7)$$

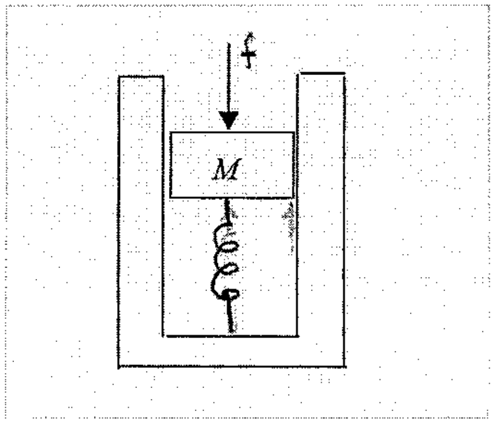
και του οποίου η έξοδος "θυμάται" ... το μέλλον, και συγκεκριμένα προβλέπει την χρονική στιγμή $t$ ποιά θα είναι η τιμή της εισόδου την χρονική στιγμή $t+2$. Λέμε ότι τα συστήματα αυτά έχουν μνήμη.

**Παράδειγμα 2.8**

Στο Σχήμα 2.7 φαίνεται μία διάταξη απόσβεσης μηχανικών ταλαντώσεων. Την διάταξη αυτή θεωρούμε σαν σύστημα με είσοδο $u(t)$ την δύναμη $f$(t) που ασκείται στην μάζα $M$ και έξοδο $y(t)$ την θέση της μάζας . Η συμπεριφορά του συστήματος περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση

$$My^{(2)}(t) + Dy^{(1)}(t) + Ky(t) = u(t) \qquad (2.8)$$

όπου $K$ είναι η σταθερά του ελατηρίου που υποτίθεται ότι ικανοποιεί τον νόμο του Hook και $D$ είναι ο συντελεστής αποσβέσεως η οποία θεωρείται ανάλογη της ταχύτητας. Για τον προσδιορισμό της λύσης της εξίσωσης για $t \geq t_0$ είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε πέραν της αρχικής θέσης $y(t_0)$ και της αρχικής ταχύτητας $\dot{y}(t_0)$ και την είσοδο για όλες τις χρονικές στιγμές από $\tau = t_0$ έως $\tau = t$. Συνεπώς το σύστημα έχει μνήμη.




Σχήμα 2.7: Σύστημα απόσβεσης μηχανικών ταλαντώσεων.

**Παράδειγμα 2.9**

Ενα σύστημα συνεχούς αξιολόγησης της επίδοσης μαθητών περιγράφεται από την σχέση

$$y[n] = \max\{u[n],\ 0{,}8u[n-1],\ 0{,}6u[n-2]\}$$

όπου ως επίδοση $y[n]$ του μαθητή την χρονική στιγμή $n$ ορίζεται η μέγιστη τιμή των σταθμισμένων βαθμών των εξετάσεων τις χρονικές στιγμές $n$, $n-1$ και $n-2$. Είναι φανερό ότι το σύστημα έχει μνήμη γιατί η τιμή της εξόδου του την χρονική στιγμή $n$ εξαρτάται και από τιμές της εισόδου σε προηγούμενες χρονικές στιγμές.

## 2.3.4 Αιτιατά συστήματα

Στην προηγούμενη παράγραφο διακρίναμε τα συστήματα σε στιγμιαία και σε συστήματα με μνήμη. Τα συστήματα πού περιγράφονται από τις σχέσεις (2.6) και (2.7) έχουν μνήμη. Η διαφορά τους όμως είναι σημαντική: Το σύστημα (2.6) θυμάται το παρελθόν ενώ το σύστημα (2.7) "θυμάται"... το μέλλον. Με άλλα λόγια, η τιμή της εξόδου του συστήματος (2.7) την χρονική στιγμή $t^*$ εξαρτάται από την συμπεριφορά της εισόδου σε χρονικές στιγμές $t > t^*$. Ενα τέτοιο σύστημα λέμε ότι είναι *μη αιτιατό* (non causal) σε αντίθεση με τα συστήματα που μπορεί να "θυμούνται" μόνο το παρελθόν και ονομάζονται *αιτιατά* (causal) σύμφωνα με τον παρακάτω ορισμό

© George Bitsoris

**Ορισμός 2.3**
Ενα σύστημα λέγεται *αιτιατό* όταν υπάρχει μία απεικόνιση $S : U \rightarrow Y$ τέτοια ώστε

$$y(\tau) = S[u_{(-\infty,\tau)}]$$

γιά κάθε είσοδο $u(\cdot)$ και κάθε $\tau \in T$.

Τα μη αιτιατά συστήματα είναι *μη πραγματοποιήσιμα φυσικώς* (physically unrealizable).

**Παράδειγμα 2.10**

Εστω ένα σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από την σχέση

$$y[n] = \max\{-u[n+1], u[n], -2u[n-1]\}$$

Αν η είσοδος του συστήματος είναι $u[n]=s[n]$, τότε $y[n]=s[n]$, συνεπώς η έξοδος του σε μία χρονική στιγμή $n^*$ δεν εξαρτάται από τιμές της εισόδου για $n>n^*$. Αν όμως η είσοδος του συστήματος είναι $u[n]=cos[\pi n/2]s[n]$ τότε

$$y[1] = \max\{-u[2], u[1], -2u[0]\} = -u[3]$$

γιατί

$$-u[2] = -\cos[\pi] = 1$$

$$u[1] = -\cos\left[\frac{\pi}{2}\right] = 0$$

$$-2u[0] = -2\cos[0] = -2$$

Συνεπώς το σύστημα είναι μη αιτιατό γιατί υπάρχει είσοδος τέτοια ώστε η αντίστοιχη του συστήματος σε μία χρονική στιγμή $n$ να εξαρτάται από την τιμή της εισόδου την χρονική στιγμή $n+1$.

## 2.3.5 Δυναμικά συστήματα

Είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο ότι αν ένα σύστημα είναι αιτιατό τότε η έξοδός του σε μία χρονική στιγμή $\tau$ δεν εξαρτάται από τις τιμές της εισόδου για $\tau^*>\tau$ μπορεί όμως να εξαρτάται από την συμπεριφορά της εισόδου σε όλο το διάστημα από $-\infty$ έως $\tau$ οπότε η σχέση εισόδυ-εξόδου του συστήματος έχει την μορφή

$$y(\tau)=S[u_{[-\infty,\tau]}]$$

Ομως, επειδή είναι αδύνατο να παρατηρούμε το σύστημα από το $t=-\infty$ με αποτέλεσμα να διαθέτουμε παρατηρήσεις της εισόδου μόνο από μία πεπερασμένη χρονική στιγμή $\tau_0$ και μετά, μία τέτοια σχέση δεν είναι εύχρηστη για τον προσδιορισμό της εξόδου. Εγείρεται λοιπόν το ερώτημα: Υπάρχουν συστήματα τέτοια που η εξοδός τους $y(\tau)$ να είναι συνάρτηση της $u_{[\tau_0,\tau]}$ και όχι απαραιτήτως της $u_{(-\infty,\tau]}$;

Μία πρώτη κατηγορία τέτοιων συστημάτων είναι τα στιγμιαία συστήματα γιά τα οποία ισχύει η σχέση

$$y(\tau)=S[u_{[\tau,\tau]}]$$

όπως το σύστημα του σχήματος 2.4 το οποίο περιγράφεται από την σχέση

$$y(t)=Ru(t)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την κατηγορία των μη στιγμιαίων συστημάτων στην οποία ανήκει και το σύστημα του σχήματος 2.1. Το σύστημα αυτό περιγράφεται από την σχέση:

$$y(t)=+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_S(\tau)d\tau$$

ή, ισοδυνάμως, από την σχέση

$$y(t)=x(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_S(\tau)d\tau \qquad (2.9)$$

αν ορίσουμε

$$x(t_0)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} u(\tau)d\tau \qquad (2.10)$$

Από την σχέση (2.9) προκύπτει ότι μπορούμε να προσδιορίσουμε την έξοδο $y(t)$ γιά $t \geq t_0$ γνωρίζοντας την είσοδο μόνο για $t \geq t_0$, αρκεί *επί πλέον* να γνωρίζουμε την $x(t_0)$. Η $x(t_0)$ η οποία, όπως φαίνεται από την σχέση (2.10), περιέχει όλες τις πληροφορίες για το παρελθόν του συστήματος που είναι απαραίτητες γιά τον προσδιορισμό της εξόδου $y(t)$ γιά $t \geq t_0$ ονομάζεται *κατάσταση* (state) του συστήματος την χρονική στιγμή $t_0$ . Η κατάσταση $x(t_0)$ εκφράζει το σύνολο των

© George Bitsoris

πληροφοριών που μαζί με την $u_{[t_0,t]}$ είναι αρκετές γιά τον προσδιορισμό της εξόδου $y(t)$ γιά οποιοδήποτε $t \geq t_0$.

**Παράδειγμα 2.11**

Ενα σύστημα συνεχούς αξιολόγησης μαθητών περιγράφεται από την σχέση

$$y[n] = \max\{u[n],\ 0{,}8u[n-1],\ 0{,}6u[n-2]\}$$

όπου η επίδοση $y[n]$ την χρονική στιγμή $n$ είναι η μέγιστη τιμή μεταξύ των $u[n]$, $0{,}8u[n-1]$ $0{,}6u[n-2]$ όπου $u[n]$, $u[n-1]$ και $u[n-2]$ υποδηλώνουν τις βαθμολογίες τιςν χρονικές στιγμές $n$, $n-1$ και $n-2$ αντιστοίχως. Το σύστημα είναι αιτιατό αλλά έχει μνήμη γιατί η τιμή της εξόδου του μία χρονική στιγμή $n$ εξαρτάται από τιμές της εισόδου και σε προηγούμενες χρονικές στιγμές. Η κατάσταση $x[n_0]$ του συστήματος την χρονική στιγμή $n_0$ είναι το διάνυσμα

$$x[n_0] = \begin{bmatrix} u[n_0-1] \\ u[n_0-2 \end{bmatrix}$$

**Παράδειγμα 2.12**

Εστω ένα αιτιατό σύστημα συνεχούς χρόνου που περιγράφεται από την σχέση

$$y(t) = u(t-\tau)$$

όπου $\tau$ είναι ένας θετικός αριθμός. Γιά τον προσδιορισμό της εξόδου γιά $t \geq t_0$ δεν αρκεί μόνο η γνώση της εισόδου για $t \geq t_0$ , δηλαδή η γνώση της $u_{[t_0,t]}$, αλλά απαιτείται και η γνώση της εισόδου για όλες τις χρονικές στιγμές του διαστήματος $[t_0-\tau, t_0]$, δηλαδή η γνώση της $u_{[t_0-\tau,t_0]}$. Η $x(t_0)=u_{[t_0-\tau,t_0]}$ είναι η κατάσταση του συστήματος την χρονική στιγμή $t_0$.

**Παράδειγμα 2.13**

Εστω ένα σώμα μάζας $m$ το οποίο κινείται στον οριζόντιο άξονα υπό την επίδραση της δύναμης $f(t)$. Θεωρούμε το κινούμενο σώμα ως σύστημα με είσοδο την $u(t)=f(t)$ και έξοδο την θέση $y(t)$. Το σύστημα αυτό περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση

$$f(t) = my^{(2)}(t) \tag{2.11}$$

Γιά τον προσδιορισμό της εξόδου γιά $t \geq t_0$ εκτός από την $f_{[t_0,t]}$ απαιτείται να γνωρίζουμε τις αρχικές συνθήκες της διαφορικής εξίσωσης (2.11), δηλαδή την αρχική θέση $x_1(t_0)=y(t_0)$ και την αρχική ταχύτητα $x_2(t_0) = \dot{y}(t_0)$. Το διανυσμα

$$x(t_0)=\begin{bmatrix}x_1(t_0)\\x_2(t_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y(t_0)\\\dot{y}(t_0)\end{bmatrix}$$

είναι η κατάσταση του συστήματος την χρονική στιγμή $t=t_0$.

---

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το σύνολο των "πληροφοριών" που ορίζουν την κατάσταση του συστήματος σε κάθε χρονική στιγμή $\tau_0$ μπορεί να περιγραφεί από ένα *πεπερασμένης διαστάσεως* διάνυσμα $x(\tau_0)$, $x(\tau_0)\rightarrow\Re^n$. Τότε το σύστημα περιγράφεται από μία σχέση της μορφής

$$y(\tau)=S[x(\tau_0),u_{[\tau_0,\tau]}]$$

όπου $S:\Re^n xU\rightarrow\Re^p$ και $x(\tau_0)$ είναι η κατάσταση την χρονική στιγμή $\tau_0$. Από την σχέση αυτή προκύπτει γιά $\tau_0=\tau$ η σχέση

$$y(\tau)=S[x(\tau),u_{[\tau,\tau]}]$$

ή, ισοδυνάμως,

$$y(\tau)=g[\tau,x(\tau),u(\tau)] \tag{2.12}$$

όπου $g$ είναι μία συνάρτηση $g:Tx\Re^n x\Re^m\rightarrow\Re^p$ που ορίζεται από την σχέση

$$g[\tau,x(\tau),u(\tau)]=S[x(\tau),u_{[\tau,\tau]}]$$

Ειναι φανερό ότι η έξοδος του συστήματος θα μπορούσε να προσδιοριστεί από την σχέση (2.12) που περιγράφει ένα στιγμιαίο σύστημα αν ήταν δυνατόν να προσδιορισθεί η κατάσταση $x(\tau)$ την χρονική στιγμή $\tau$ από την τιμή της $x(\tau_0)$ την χρονική στιγμή $\tau_0$ και την $u_{[\tau_0,\tau]}$. Αυτό θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί αν υπήρχε μία απεικόνιση $S^*$: $\Re^n xU\rightarrow\Re^n$ τέτοια ώστε

$$x(\tau)=S^*[x(\tau_0),u_{[\tau_0,\tau]}]$$

Τα συστήματα για τα οποία ισχύουν αυτά ονομάζονται *δυναμικά* (dynamic systems)

© George Bitsoris

## Ορισμός 2.4

Ενα σύστημα λέγεται *δυναμικό* αν υπάρχει μία συνάρτηση $x(\tau)$, $x: T \to \Re^n$ , μία απεικόνιση $S^*$: $\Re^n x U \to \Re^n$ και μία άλλη συνάρτηση $g$: $T x \Re^n x \Re^m \to \Re^p$ τέτοιες ώστε

$$x(\tau) = S^*[x(\tau_0, u_{[\tau_0,\tau]}] \tag{2.13}$$

$$y(\tau) = g[\tau, x(\tau), u(\tau)] \tag{2.14}$$

γιά κάθε $\tau_0 \in T$ και $\tau > \tau_0$.

Οι συνιστώσες $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ του διανύσματος $x$ λέγονται *μεταβλητές καταστάσεως* (state variables) του συστήματος ενώ η $x(\tau_0)$ υποδηλώνει την κατάσταση του συστήματος την χρονική στιγμή $\tau_0$

## Παράδειγμα 2.14

Θεωρούμε πάλι το σύστημα του Παραδείγματος 2.13 που περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση

$$f(t) = my^{(2)}(t) \tag{2.15}$$

Ολοκληρώνοντας δύο φορές αυτή την διαφορική εξίσωση και θέτοντας $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ και $u = f$ καταλήγουμε στις εξισώσεις

$$x_1(t) = x_1(t_0) + x_2(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau d\tau \tag{2.16α}$$

$$x_2(t) = x_2(t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau \tag{2.16β}$$

$$y(t) = x_1(t) \tag{2.17}$$

Θεωρώντας τις $x_1$ και $x_2$ ως μεταβλητές καταστάσεως του συστήματος οι εξισώσεις αυτές γράφονται υπό την μορφή των εξισώσεων (2.13) και (2.14) όπου

$$S^*[x(t_0, u_{[t_0,t]}] = \begin{bmatrix} x_1(t_0) + x_2(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau d\tau \\ x_2(t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau \end{bmatrix}$$

$$g[t, x(t), u(t)] = x_1(t)$$

Συνεπώς το σύστημα που περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση (2.10) είναι δυναμικό.

**Παράδειγμα 2.15**

Ενα σύστημα διακριτού χρόνου περιγράφεται από την σχέση εισόδου-εξόδου

$$y[n] = \begin{cases} u[-n] & αν \quad n \geq 0 \\ 0 & αν \quad n < 0 \end{cases}$$

Η κατάσταση του συστήματος μία χρονική στιγμή $n_0$ θα πρέπει να υπάρχει $x[n_0]$ περιέχει όλες τις αναγκαίες πληροφορίες ώστε σε υνδυασμό με την είσοδο για $n \geq n_0$ να είναι δυνατός ο προσδιορισμός της εξόδου για κάθε $n \geq n_0$. Είναι φανερό ότι στην συγκεκριμένη περίπτωση

$$x[n_0] = u_{(-\infty, n_0]}$$

Επειδή η $u_{(-\infty, n_0]}$ δεν μπορεί να εκφρασθεί υπό την μορφή διανύσμαατος πεπερασμένης διαστάσεως, το σύστημα δεν είναι δυναμικό.

## 2.3.5α Οι καταστατικές εξισώσεις συνεχούς χρόνου

Οι εξισώσεις (2.13)-(2.14) οι οποίες στην περίπτωση δυναμικών συστημάτων συνεχούς χρόνου γράφονται

$$x(t) = S^*[x(t_0), u_{[t_0, t]}] \tag{2.18}$$

$$y(t) = g[t, x(t), u(t)] \tag{2.19}$$

παίρνουν την μορφή διαφορικών εξισώσεων στην περίπτωση που το διάνυσμα καταστάσεως $x$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση για οποιαδήποτε κατά τμήματα συνεχή είσοδο $u$. Αποδεικνύεται ότι τότε υπάρχει μια συνάρτηση $f$: $T x \mathfrak{R}^n x \mathfrak{R}^m \to \mathfrak{R}^n$ τέτοια ώστε

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), u(t)]$$

Αρα στην περίπτωση αυτή το σύστημα περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\dot{x}(t) = f[t, x(t), u(t)]$$

© George Bitsoris

$$y(t) = g[t, x(t), u(t)]$$

Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται *καταστατικές εξισώσεις* (state equations) συνεχούς χρόνου.

**Παράδειγμα 2.16**

Ας θεωρήσουμε πάλι το σύστημα του παραδείγματος 2.14 που όπως είδαμε είναι δυναμικό και περιγράφεται ισοδυνάμως από τις εξισώσεις (2.16) και (2.17). Παραγώγιση της εξίσωσης (2.16α) δίνει την σχέση

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau$$

απ'όπου, λόγω της (2.16β) προκύπτει ότι

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

Ομοίως, παραγωγίζοντας την (2.16β) έχουμε

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{m}u(t)$$

Συνεπώς οι καταστατικές εξισώσεις του συστήματος είναι οι

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ \frac{1}{m}u(t) \end{bmatrix}$$

και

$$y(t)=x_1(t)$$

### 2.3.5β Συστήματα διακριτού χρόνου

Θεωρούμε ένα δυναμικό σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από τις σχέσεις

$$x[n] = S * [x[n_0], u_{[n_0, n-1]}] \qquad (2.20)$$

$$y[n] = g[n, x[n], u[n]] \qquad (2.21)$$

Θέτοντας στην (2.300a) όπου $n_0$ το $n$ και όπου $n$ το $n+1$ προκύπτουν οι σχέσεις

$$x[n+1] = S * [x[n, u_{[n,n]}] \tag{2.22}$$

$$y[n] = g[n, x[n], u[n]] \tag{2.23}$$

Τέλος, θέτοντας

$$f[n, x[n], u[n]] = S * [x[n, u_{[n,n]}]$$

όπου $f{:}\, T x \Re^n x \Re^m \to \Re^n$ τότε οι εξισώσεις (2.22)-(2.23) παίρνουν την μορφή

$$x[n+1] = f[n, x[n], u[n]]$$

$$y[n] = g[n, x[n], u[n]]$$

Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται *καταστατικές εξισώσεις* διακριτού χρόνου.

**Παράδειγμα 2.17**

Ενα σύστημα διακριτού χρόνου περιγράφεται από την σχέση εισόδου-εξόδου

$$y[n] = \max\{2u[n-1], u[n]\}$$

Για τον προσδιορισμό των καταστατικών εξισώσεων, θέτουμε

$$x[n] = u[n-1]$$

απ'όπου προκύπτει ότι

$$x[n+1] = u[n]$$

και

$$y[n] = \max\{2x[n], u[n]\}$$

Οι δύο τελευταίες σχέσεις αποτελούν τις καταστατικές εξισώσεις του συστήματος.

© George Bitsoris