

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΣ - ΑΝΑΚΑΤΑΣΚΕΥΑΣΙΜΟΤΗΣ - ΧΡΟΝ. ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

(Γνω. ιδιότητα)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}, C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}, D(t) \in \mathbb{R}^{p \times m} \\ u(t) \in \mathbb{R}^m \end{matrix}$$

Σημείωση: να προσδιορίσεις ή να κατασκευάσεις από μετρήσιμα είσοδους + εξόδους

ή εξόδους του συστήματος είναι:

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t C(\tau)\Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau + D(t)u(t)$$

$$\tilde{y}(t) \triangleq y(t) - \left[\int_{t_0}^t C(\tau) \dots d\tau + D(t)u(t) \right]$$

$$\text{ή } \tilde{y}(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x(t_0) \quad (\text{άποκριση μινδ. διεγέρσης})$$

ορίσμος: **ή κατάσταση** $x \equiv \mu\eta - \text{παρατηρήσιμη} \mid_{t_0}$ αν η απόκριση μινδ. διεγέρσης $\tilde{y}(t) = 0$

$$\text{δλ. "αν } C(t)\Phi(t, t_0)x = 0$$

(οι κατάστασεις x , οι οποίες με την είσοδο $u=0$, παράγουν την έξοδο $y(t)$, δεν μπορούν να διαχωριστούν από την κατάσταση $x(t_0)=0$ αφού παράγουν την ίδια έξοδο)

ορίσμος: **Μη - παρατηρήσιμος** υποχώρος $\subset \mathbb{R}^n$

$$R_0^{(t_1)} \triangleq \left\{ x : C(t)\Phi(t, t_0)x = 0 \right\}$$

$\{0\}$ $\equiv$ παρατηρήσιμος $\mid_{t_0}$ (ή (A, C) παρατηρήσιμος)

όταν η μινδ. κατάσταση $x \in \mathbb{R}^n \approx \mu\eta - \text{παρατηρήσιμη}$ είναι
ή $x(t) = 0$

$$\Rightarrow R_0^{(t_1)} = \{0\}$$

□ Άν ορίσουμε παρόμοια: $\tilde{L}(x, t_0, t_1) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, x \mapsto C(t)\Phi(t, t_0)x \approx \tilde{y}_0$, τότε $\ker \tilde{L} = R_0^{t_1}$

έαν παράδειγμα:

$$\Gamma_0 \times A_0 : \tilde{L}() : x \mapsto Ce^{At}x \Rightarrow \ker \tilde{L} = \{x : Ce^{At}x = 0\} = \{0\} \quad (\text{πλ. παρατηρήσιμος})$$

$$\Leftrightarrow \text{rank } 0 = n$$

• **Gramian παρατηρησιμότητας:**

$$W_0(t_0, t_1) \triangleq \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_0) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau \quad (n \times n)$$

$$(W_0 = W_0^T \geq 0 \quad \forall t_1 > t_0)$$

$$W_0(t_0, t_1) \triangleq \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t, \tau) C'(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau \quad (n \times n)$$

$$(W_0 = W_0^T, \geq 0, \forall t_1 > t_0)$$

Θέωρημα: x $\approx$ μη-επαρπρόσιμη $\Leftrightarrow$

$$x \in \text{Ker}(W_0(t_0, t_1))$$

Απόδειξη:

Παράδειγμα:

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\Phi(t, \tau) = \begin{pmatrix} - & - \\ & - \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C(\tau) \Phi(\tau, t_0) = \begin{bmatrix} 0 & e^{-2\tau+t_0} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow W_0(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{2t_0} \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & e^{-2\tau} \end{bmatrix} d\tau = \dots = -\frac{1}{4} e^{2t_0} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{4t_1-4t_0} \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } W_0(t_0, t_1) = 1 < 2 \Rightarrow (A, C) \equiv \text{μη-επαρπρόσιμο (πλήρως)}$$

• πώς παράγεται ο υποχώρος $R_0^{t_1} = ?$ $\text{span} \left\{ \begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix} \right\}$:

Παρατηρούμε ότι: $y(t) = C(t) \Phi(t, t_0) x_0 = \begin{bmatrix} 0 & e^{-2(t-t_0)} \end{bmatrix} x_0 = 0$ για $x_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \phi \end{pmatrix}$

Επομένως, καμία από τις μη-επαρπρόσιμες καταστάσεις $\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$ δεν είναι διαχωρίσιμη από την μηδενική κατάσταση.

Θέωρημα:

$$(I) = \text{επαρπρόσιμο} \Big|_{t_0} \Leftrightarrow \exists t^* > t_0.$$

$$\eta \text{ είναι } C(\cdot) \Phi(\cdot, t_0) \equiv \text{γραμμ. ανεξάρτητες}$$

Θέωρημα: $(A, C) \equiv$ (πλήρως) $\text{επαρπρόσιμο} \Big|_{t_0} \Leftrightarrow$

$$\text{rank } W_0(t_0, t_1) = n$$

Πρόταση,

Ορισμός: μια κατάσταση x = μη-ανακατασκευάσιμη / t_1 αν $\forall t \leq t_1$, η άνοδος μηδεν. διέγερσης
 $C(t) \Phi(t, t_1) x = 0, \quad \forall t \leq t_1$

Ορισμός: ο υπόχωρος μη-ανακατασκευάσιμων / t_1 είναι:

$$R_{cn}^{t_1} \triangleq \{ x : \text{μη-ανακατασκευάσιμη} / t_1 \}$$

Ορισμός: ο Gramian ανακατασκευάσιμων είναι ο $n \times n$ πίνακας,

$$W_{cn}(t_0, t_1) \triangleq \int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(\tau, t_1) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_1) d\tau$$

Θεώρημα: Το (Z) είναι πλήρως ανακατασκευάσιμο / t_1

(i) αν $\nexists$ μόνο αν: $\exists t_0 < t_1$: τότε $W_{cn}(t_0, t_1) = n$

(ii) αν $\nexists$ μόνο αν: $\exists t_0 < t_1$: ο βέλος του
 $C(t) \Phi(t, t_1) \approx$ γραμμικά ανεξάρτητα

Συστήματα Χρονικά Αποσβάντα

Για το σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

$$y(t) = C e^{At} x(0) + \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t)$$

$$\text{Ισχύει: } \Phi(t, \tau) \equiv \Phi(t - \tau, 0) \equiv e^{A(t-\tau)}$$

(μπορούμε να θεωρήσουμε ότι πάντα $t_0 = 0$)

• Μη-παράσιμνη κατάσταση x αν $\forall t \geq 0$,

$$C e^{At} x = 0$$

(άνοκρ. μηδεν. διέγερσης $= 0$, $\forall t \geq 0$)

• Μη-παράσιμνος υπόχωρος $R_0 \triangleq \{ x \in \mathbb{R}^n : C e^{At} x = 0 \}$

$$(Z) \text{ παράσιμνος} \Leftrightarrow R_0 = \{0\}$$

Gramian παράσιμνωσης.

$$W_0(0, T) \triangleq \int_0^T e^{A^T \tau} C^T C e^{A\tau} d\tau$$

Θέωρημα :

(A, C) παρατηρήσιμο $\Leftrightarrow \eta$ είναι του $C e^{At} = \text{γραμμή ανεξάρτητα}$

Πρόταση : $\text{Ker}(W_0(\phi, T)) = \text{Ker}(O)$, $\forall T > 0$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Θέωρημα : x = μη-παρατηρήσιμη $\Leftrightarrow$

$$x \in \text{Ker}(O)$$

Πρόταση : (A, C) παρατηρήσιμο $\Leftrightarrow$

$$\text{rang}(O) = n$$

Είναι :
 $\text{Ker}(O) = \{\phi\} \Leftrightarrow$
 $\text{rang}(O) = n$

Παράδειγμα :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \end{pmatrix}$$

$$W_0(\phi, T) = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} T & \frac{1}{2}T^2 \\ \frac{1}{2}T^2 & \frac{1}{3}T^3 \end{bmatrix}$$

$$\det(W_0(\phi, T)) = \frac{1}{12} T^4 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } W_0(\phi, T) = n \Rightarrow (A, C) \text{ παρατηρήσιμο}$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang } O = n \Rightarrow (A, C) \text{ παρατηρήσιμο}$$

$$\left(\text{Ker } O = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{Ker}(W_0(\phi, T)) \right)$$

ο ϕ_v όμως $C = [0 \ 1]$ τότε $C e^{At} = [0 \ 1]$ και ο Gramian παρατηρησιμότητας :

$$W_0(\phi, T) = \int_0^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}$$

Τότε, $\text{rang } W_0(\phi, T) = 1 < 2 = n \Rightarrow (\Sigma) \text{ όχι (πάλι) παρατηρήσιμο}$

Τότε, γιατί οι μη-παρατηρήσιμες καταστάσεις $x \in \text{Ker}(W_0(\phi, T))$ και άρα θα είναι ως

$$\text{μορφή : } \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{Παρόμοια, ο πίνακας παρατηρησιμότητας } O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Παρατηρήστε ότι : } \text{Ker}(O) = \text{Ker}(W_0(\phi, T)) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Σχέση με δωδμεν A

ορισμός: A δωδμεν $A \equiv$ παρατηρήσιμη, αν το αντίστοιχο

$$\text{δεξίω} \text{ δωδμεν } v_i : C v_i \neq 0$$

Θεώρημα: $(A, C) =$ παρατηρήσιμο $\Leftrightarrow$ όλες οι δωδμεν $A \equiv$ παρατηρήσιμες

ή αντίστροφα (μέ των εξεξυμμεν) ίσχυει:

Πρόταση: Το δωδμεν (A, C) είναι (πληρως) παρατηρήσιμο αν και μόνο αν

δεν υπάρχει δεξίω ιδιοδάνμεν του πίνακα A , που να είναι άρδχίω με όλες τις γραμμές του πίνακα C .

Παράδειγμα:

Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = (0 \ 1 \ 0)$

Να υπολογισούν οι εξεξυμμεν και παρατηρήσιμη δωδμεν

- δωδμεν $A : \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$

Τότε, δεξίω ιδιοδάνμεν (παρατηρήσιμους): $v_1 = (1 \ 1 \ 1)^T$
(να επληρωθούν!)

$$v_2 = (1 \ 0 \ -1)^T$$

$$v_3 = (1 \ 1 \ -1)^T$$

αριστερά ιδιοδάνμεν (εξεξυμμεν): $\hat{v}_1 = (\frac{1}{2} \ 0 \ \frac{1}{2})^T$

$$\hat{v}_2 = (1 \ -1 \ 0)^T$$

$$\hat{v}_3 = (-\frac{1}{2} \ 1 \ -\frac{1}{2})^T$$

Αρα, επειδι $\hat{v}_1 B = [1 \ 1] \neq \emptyset \Rightarrow \lambda_1 = 0 \equiv$ εξεξυμμεν

πάρμοιω $C v_1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \equiv$ παρατηρήσιμη

$\hat{v}_2 B = [0 \ -1] \neq \emptyset \Rightarrow \lambda_2 = -1 \equiv$ εξεξυμμεν

$C v_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -1 \equiv$ μη-παρατηρήσιμη

$$\square \hat{v}_3 B = [0, 0] = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = -2 \equiv \text{μη-ελέγξιμη}$$

$$Cv_3 = 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = -2 \equiv \text{ναρκαυρήσιμη}$$

Λεξικότητα Ελεγχσιμότητας - Παρκαυρήσιμότητας

Έστω Γραμ. (Συνέχως Χρόνου)

$$(Z) : \begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

ορίσμε:

$$\text{Το σύστημα : } (Z') : \begin{cases} \dot{x}_d(t) = A^T(t)x_d(t) + C^T(t)u_d(t) \\ y_d(t) = B^T(t)x_d(t) + D(t)u_d(t) \end{cases}$$

ορίζεται **δυναμικό** τω (Z)

Θεώρημα : $\text{dr}(Z) = \text{ελέγξιμο (παρκαυρήσιμο)} \iff (Z') = \text{παρκαυρήσιμο (ελέγξιμο)}$

δυναμικότητα $\sim$ χώρο καταστάσεων $\mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} R_r & \text{δυναμικός} & R_o \\ I_m(c) & \text{---} & \text{Ker}(D) \end{pmatrix}$$