

Συστήματα Συνεχούς Χρονου

• η άκαθοστη είσοδος που απαιτείται για να μεταφερθεί η κατάσταση από το x_0 στο x_1 , δεν είναι εύκολο να προσδιοριστεί ανήσχετο από των μετασχ. $\mathcal{L}$!
("Είκοτες ἀνεκονίσαν")

ΠΡΟΣΙΤΟΤΗΣ - ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΣ - ΧΡΟΝ. ΜΕΤΑΒΑΛΟΜΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m$$

(Δύση): $x(t, t_0, x_0) \stackrel{\text{op}}{=} \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad t \in (a, b)$

Στόχος 1. να βρούμε $u(t)$ που να μεταφέρει την $x_0|_{t_0} \rightarrow x_1|_{t_1}$, $t_1 > t_0$

$$x_1 \equiv \Phi(t_1, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

2. να περιγράψουμε τις ιδιότητες του υποχώρου που περιέχει όλα τα x_1

Θα πρέπει να :

$$\exists u(t)_{[t_0, t_1]} : x_1 - \Phi(t_1, t_0)x_0 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$\tilde{x}_1 \stackrel{\text{op}}{=} x_1 - \Phi(t_1, t_0)x_0$$

$$u(t) : x(t_0)|_{t_0} \rightarrow \tilde{x}_1|_{t_1} \quad (\text{δία } u(t))$$

Όρισμός : η κατάσταση $x_1 \equiv \text{προσίο} / t_1$ (έλεγχιμη - από-τιν αρχή) αν $t_0 < t_1$, $\exists u(t) : x(t)|_{t_0} \rightarrow x_1|_{t_1}$

$$\Rightarrow \exists u : x_1 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \quad (x(t_0) \equiv \emptyset)$$

• χρόνοι t_0, t_1 αυθαίρετοι $\leadsto$ χρον. μεταβαλλόμενα

ορίσμός : Υποχώρος Προσίοσεων

$$\mathcal{R}_r^{t_1} \triangleq \left\{ x_1 : x_1 \equiv \text{προσίο στο χρόνο } t_1 \right\}$$

(Σ) = πλήρης προσίο όταν όλη οι καταστάσεις $\equiv$ προσίο $|_{t_1}$

$$\text{δυσ. } \forall x_1 \in \mathbb{R}^n \approx \text{προσίο} / t_1$$

$$\Rightarrow \mathcal{R}_r^{t_1} \equiv \mathbb{R}^n$$

Πρόσμοια,

ορίσμός : Ελέγξιμη (-σύν-αρχη) κατάσταση x_0 , αν $t_1 > t_0$, $\exists u(t), t \in [t_0, t_1]$

$$\text{που να μεταφέρει τη } x(t_0) \equiv x_0 \leadsto x(t_1) \equiv \emptyset$$

τότε, θα πρέπει να $\exists u(t) :$

Που να μεταφερει $\Psi, \alpha(t_0) = x_0 \rightarrow \alpha(t_1) = x$

επει, θα ηπενει να $\exists u(t)$:

$$(\text{ηύρη}) : \phi - \phi(t_1, t_0) x_0 = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau, \quad \text{η δαδως}$$

$$(\times \phi'(t_1, t_0)) \Rightarrow -x_0 = \int_{t_1}^{t_0} \phi(t_0, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau$$

από την ιδιότητα:
($\phi(t_0, t_1) \phi(t_1, \tau) = \phi(t_0, \tau)$)

ορισμός: Υποχωρος Ελεγχσιμότητας

$$\mathcal{R}_c^{t_0} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x_0 : x_0 = \text{ελεγχσιμη} \mid t_0 \right\}$$

... (Σ) = ηληως ελεγχσιμο $\forall x_0 = \text{ελεγχσιμο}$

$$\mathcal{R}_c^{t_0} = \mathbb{R}^n$$

Παρατηρηση:

1. Αρ θεωρούμε την παρακάτω απεικόνιση, για κάποιο t_1 :

$$L : u \mapsto x_1, \quad L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \equiv L(u, t_0, t_1)$$

προκινει (από τις παραπάνω σχέσεις) ότι, η $\text{Im}(L) = \mathcal{R}_+^{t_1}$, καθώς το x_1 ηπροβιζό/ t_1

δη $\exists t_0, u : x_1 \in \text{Im}(L)$

• επίσης (Σ) $\equiv$ ηπροβιζό (ηληως) όταν $\text{Im}(L) = \mathbb{R}^n$

Εσκόζερα,

- $x = \text{ηπροβιζό} \mid t_1$, δη $\exists t_0, u$ ηη:

$$x \in \text{Im}(L)$$

$$(x = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau)$$

- $x = \text{ελεγχσιμο} \mid t_0$, δη u ηη.

$$\phi(t_1, t_0) x \in \text{Im}(L)$$

$$(-\phi(t_1, t_0) x = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau)$$

Αρα,

$$(Σ) \equiv (\text{ηληως}) \text{ ηπροβιζό} \Leftrightarrow (\text{ηληως}) \in \text{ελεγχσιμο}$$

Ομως, ΠΡΟΣΟΧΗ:

• Στα Διεισδυτικά Χρόνου Συστήματα: προσιτότητα $\Rightarrow$ ελεγχσιμότητα
 αλλά η ελεγχσιμότητα συνεπάγεται την προσιτότητα

ΜΟΝΟ

Υπάρ

$$\text{ζεύγη } \Phi(k, k_0) = \eta$$

(που δεν ισχύει πάντοτε!)

(στα συστήματα συνεχούς χρόνου, η $\Phi(t, \tau)$ είναι πάντοτε μη-διάφορα)

Για να μετρήσουμε την $\text{Im}(L)$ πιο εύκολα, χρησιμοποιούμε τον πίνακα

ορισμός Πίνακας Gramian προσιτότητας:

$$W_r(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) B^T(\tau) \Phi^T(t_1, \tau) d\tau$$

$$W_r = W_r^T \geq 0$$

Ισχύει: $\text{Im}(L) = \text{Im}(W_r(t_0, t_1))$ (για να προσδιορίσουμε την $\text{Im}(L)$)
 (ανάλογα)

Θεώρημα: $\exists u(\cdot) : x(t_0) \rightsquigarrow x(t_1) = x_1, \quad t_0 < t_1$
 $\Leftrightarrow \exists t_0 < t_1 : x_1 \in \text{Im}(W_r(t_0, t_1))$

Πιο συγκεκριμένα η εικόνα x που μπορεί να εντύπεται την μεταφορά είναι:

$$u(t) = B^T(t) \Phi^T(t_1, t) \eta_1, \quad \text{όπου } \eta_1 \equiv \text{αύρα ως}$$

$$W_r(t_0, t_1) \eta_1 = x_1, \quad t \in [t_0, t_1]$$

Πρόταση: $(Z) \equiv \text{προσιτός} \mid t_1 \Leftrightarrow \exists t_0 < t_1 : \text{ζεύγη } W_r(t_0, t_1) = \eta$

Το παραπάνω μας επιτρέπει να αναδοξώμε το παρακάτω θεώρημα με το οποίο υπολογίζουμε τις εικόνες που λαμβάνουν την μεταφορά μέσω καρέσσας σε μία άραμη:

Θεώρημα:

$\exists u$: μεταφέρει την $x_0 \mid t_0$ στην κατάσταση $x_1 \mid t_1, \quad t_1 > t_0$

$$\Leftrightarrow x_1 - \Phi(t_1, t_0) x_0 \in \text{Im}(W_r(t_0, t_1))$$

και επιπλέον: $u(t) = B^T(t) \Phi^T(t_1, t) \eta_1$

$$\text{όπου } \eta_1 \in \mathbb{R}^1 \equiv \text{αύρα ως } W_r(t_0, t_1) \eta_1 = x_1 - \Phi(t_1, t_0) x_0$$

Παράδειγμα: $A(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$

έτσι υπολογίζουμε $\Phi(t, \tau) = \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & \frac{1}{2}[e^{t+\tau} - e^{-t+\tau}] \\ 0 & e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}$

$$\Phi(t, \tau)B(\tau) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow W_F(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \begin{pmatrix} e^{-2\tau} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} (t_1 - t_0)e^{-2t_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

αξία $W_F(t_0, t_1) < 2 \Rightarrow (\Sigma) \neq \text{ηγετικό} \mid t_1$

Από τα ανωτέρω και χρησιμοποιώντας τον Gramian πίνακα, μπορούμε να αποδείξουμε:

Θεώρημα: $(\Sigma) = \text{ελέγχσιμο}$ $\Leftrightarrow \exists t^* > t_0$:

η γραμμή ως $\Phi(t_0, \cdot)B(\cdot) \equiv \text{γραμμή ανεξάρτητη} \mid [t_0, t^*]$

($\Rightarrow$ η δριγμια ως $W_F(t_0, t_1) \neq 0 \Rightarrow \exists u(t_1), \dots$)
 $\hookrightarrow$ αξία $W_F(t_0, t_1) = \eta$ ----

Ορισμός: Gramian Ελέγχσιμότητας

$$W_C(t_0, t_1) \triangleq \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^T(t_0, \tau) d\tau$$

$(\Sigma) = \text{ελέγχσιμο} \mid t_0 \Leftrightarrow$ αξία $W_C(t_0, t_1) = \eta$

(από τον ορισμό) προκύπτει:

$$W_F(t_0, t_1) = \Phi(t_1, t_0) W_C(t_0, t_1) \Phi^T(t_1, t_0)$$

και επειδή $\Phi(t_1, t_0) \equiv \text{μη-ιδιόμορφη} \forall t_0, t_1 \Rightarrow$ αξία $W_F(t_0, t_1) = \text{αξία } W_C(t_0, t_1)$, $\forall t_0, t_1$

άρα,

$(\Sigma) = \text{ηγετικό} \Leftrightarrow (\Sigma) = \text{ελέγχσιμο}$

Συστήματα Συνεχούς Χρόνου, Χρονικά Αμετάβλητα

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad \text{όπου } \Phi(t - t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

$$t - t_0 = T \quad (x, A)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad \text{where: } \phi(t-t_0) = e^{A(t-t_0)}, \quad t-t_0 = T \quad (x, A.)$$

Ορισμός:

$$\text{Θαυρώ } \begin{cases} t_0 = \emptyset \\ t = T \end{cases} \rightarrow T, x_0 A$$

$$\text{Γράμμη Προβιζόμενες } W_r(\emptyset, T) = \int_0^T e^{A(T-z)} B B^T e^{A^T(T-z)} dz$$

Εστω ο ηχηρ πινάκας ελεγχόμενες-απο-ελεγχόμενες (ηροδόμενες) που όριζόμε ως :

$$C = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Αποδεικνύεται ότι :

$$\text{Im}(W_r(\emptyset, T)) \equiv \text{Im}(C)$$

(η εικόνα είναι ανεξάρτητη του T)

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{At} B = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W_r(\emptyset, T) = \int_0^T \begin{bmatrix} T-z \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T-z & 1 \end{bmatrix} dz = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} T^3 & \frac{1}{2} T^2 \\ \frac{1}{2} T^2 & T \end{bmatrix}$$

$$\det W_r(\emptyset, T) = \frac{1}{12} T^4 \neq 0 \Rightarrow \text{rank } W_r(\emptyset, T) = 2$$

Παράγωγα,

$$C = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank } C = 2$$

$$\text{Im}(W_r(\emptyset, T)) = \text{Im}(C) = \mathbb{R}^2$$

$$\text{Άσκηση: } \text{αν } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow ?$$

Σχεση Προβιζόμενες-Ελεγχόμενες

Από την σχέση:

$$\phi(t_1, t_0) x_0 = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau$$

γνωρίζουμε ότι $x_0 \equiv \text{ελέγχω αν } \exists u(t), t \in [0, T] :$
(-ελέγχω-αρχή)

$$\Gamma_{\infty} A_{\infty} : -e^{AT} x_0 = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B u(\tau) d\tau = L(u, \phi, T)$$

ή, $\exists u \in \mathcal{U}_{[0,T]}$:

$$\begin{aligned} e^{AT} x_0 &\in \text{Im}(W_r(\phi, T)) \\ e^{AT} x_0 &\in \text{Im}(C) \end{aligned}$$

(θα χρειαστείτε την πρόταση :)

Πρόταση :

"Αν $x \in \text{Im}(C) \Rightarrow Ax \in \text{Im}(C)$ δηλαδή

ο υπόχωρος προκύπτει R είναι ένας **A-αμεταβαντος** υπόχωρος

Υπενθύμιση: **Αμεταβαντος** Υπόχωρος (από κάποια απεικόνιση F)

Έστω απεικόνιση $F : X \rightarrow Y$ (γραμμ. μετασχηματισμός)

Έστω $W \subset X \equiv F$ -αμεταβαντος όταν

$$FW \subset W$$

$$(\forall w \in W \Rightarrow Fw \in W)$$

i) $W \equiv F$ -αμεταβαντος $\Rightarrow \{\emptyset\} \equiv F$ -αμεταβαντος

ii) $W \equiv F$ -αμεταβαντος $\Rightarrow \text{Im } F \equiv F$ -αμεταβαντος

$\Rightarrow \text{Ker } F \equiv F$ -αμεταβαντος

(να αποδείξετε! (γραμμ. άλγεβρα))

Εάν δικά μας περίπτωση: $\begin{cases} F \approx A \\ W \approx \mathbb{R}^n \end{cases}$

Απόδειξη (πρόσβασης)

"Αν $x \in \text{Im}(C) \Rightarrow \exists$ διάνυσμα $\alpha : [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \alpha = x$

$$\Rightarrow Ax = [AB, A^2B, \dots, A^nB] \alpha$$

(θ. Cayley - Hamilton) : A^n μπορεί να εκφραστεί σαν γραμμ. συνδυασμός των $A^{n-1}, \dots, A, I$

που σημαίνει $Ax = C\beta$, για κάποιο β

$$\text{"Άρα, } Ax \in \text{Im}(C)$$

■

Θεώρημα :

- i) $\kappa \equiv \text{προβιζή} \iff \kappa \equiv \text{ελέγξιμη}$
- ii) $R_r = R_c$
- iii) $(A, B) \equiv \text{προβιζό} \iff (A, B) \text{ ελέγξιμο}$

$\Gamma, X, A,$

- Θεώρημα : το $(A, B) \equiv \text{προβιζό}$ (έλεγχ- από- την- άρχη), αν & μόνο αν :
- i) $\text{rank } W_r(\emptyset, T) = n$
 - ii) η φράση του $e^{At} B \equiv \text{φράση ανεξάρτητη}$
 - iii) $\text{rank } \mathcal{C} = n$
 - iv) $\text{rank } [sI - A, B] = n, \quad \forall s = \text{ιδιοτιμία } A, i = 1, \dots, n$
 - v) όλας οι ιδιοτιμίες του πίνακα A , είναι ελέγξιμες ($\hookrightarrow$ πιο κάτω !)

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- i) $(A, B) \equiv \text{ελέγξιμο}$ δώτα : $W_r(\emptyset, T) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}T^3 & \frac{1}{2}T^2 \\ \frac{1}{2}T^2 & T \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rank } W_r(\emptyset, T) = 2 = n$
- ii) $e^{At} B = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow 2 \text{ φράσεις} \equiv \text{φράση ανεξάρτητη}$

$$(\text{δώτα : } \alpha_1 t + \alpha_2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0)$$

$$\text{iii) rank } \mathcal{C} = \text{rank } [B \quad AB] = \text{rank } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 = n$$

$$\text{iv) rank } [sI - A, B] = \text{rank } \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & 1 \end{bmatrix} = 2 = n, \quad s_i = \emptyset, i = 1, 2$$

$\downarrow$
ιδιοτιμία A

$$(\text{παρόμοια, οι φράσεις του } (sI - A)^{-1} B = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} & 0 \end{pmatrix} \text{ είναι φράση ανεξάρτητη})$$

Σχέση με την ιδιο-δομή του (Σ)

Ορισμός : μια ιδιοτιμία λ_i $\equiv$ ελέγξιμη αν το αντίστοιχο χρυσό διανυσμα v_i ικανοποιεί την σχέση :

$$v_i^T B \neq 0$$

$$(v_i^T A = \lambda_i v_i^T)$$

έκθεση των σχέσεων:

$$V_i^T B \neq 0$$

$$(V_i^T A = \lambda_i V_i^T)$$

Θεώρημα 1: (Z) είναι έγκυρο $\Leftrightarrow$ όλες οι ιδιοτιμές είναι εατέρες

Υπόθεση: λ = ιδιοτιμή, $\exists v \neq 0: Av = \lambda v$ (v = ιδιοδιάνυσμα)
(Γραμμ. Αλγεβρα)
οπότε: $(A - \lambda I)v = 0 \Rightarrow (A - \lambda I) = 0$

$$(ή αλλιώς: $(A - \lambda I)^{-1} (A - \lambda I)v = (A - \lambda I)^{-1} \cdot 0 \Rightarrow$$$

$$0 = \det(A - \lambda I) = p(\lambda) = \text{χαρακ. πολ. } A$$

(φυσική ερμηνεία)

(ιδιοτιμές λ = ρίζες χ.π. του A)

$$v = 0)$$

Πρόταση:

Το σύνολο (Z) είναι (πλήρως) έγκυρο αν και μόνο αν δεν υπάρχει άρνητο

ιδιοδιάνυσμα του A που να είναι ορθόγωνο με όλες τις στήλες του B .

Υποθέτουμε ιδιοδιανόμενες να απαιτούν σε ιδιοτιμές (Γραμμ. Αλγεβρα) !!

Παρατήρηση:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, p(\lambda) = \det(\quad) = (\lambda - 3)(\lambda + 2) \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Να βρούμε ιδιοδιανόμενες λ_i : να βρούμε $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ώστε:

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Ιδιοδιάνυσμα ως ιδιοτιμή $\lambda_1 = 3$: έστω $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$(A - 3I)v = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2-3 & -4 \\ -1 & -1-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -v_1 - 4v_2 = 0 \\ -v_1 - 4v_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ή } v_2 = t \Rightarrow v_1 = -4t$$

κάθε ιδιοδιάνυσμα $\lambda_1 = 3$, ως μορφή: $\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \equiv \text{βάση} \sim \text{παραβολή των ιδιοτιμών} \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$
(ιδιοτιμές ως ιδιοτιμές λ_1)

Ιδιοδιάνυσμα ως $\lambda_2 = -2$:

$$\text{βρίσκουμε: } 4v_1 - 4v_2 = 0 \quad \text{ή } v_2 = t, v_1 = t \Rightarrow$$

$$-v_1 + v_2 = 0$$

$$\text{ή } \text{κάθε ιδιοδιάνυσμα } \lambda_2 = -2 \sim \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$-v_1 + v_2 = 0$$

$$\text{Άρα κάθε ιδιοδιάνυσμα} / \lambda_2 = -2 \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ είναι βάση του διανύσματος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = -2$.

Άσκηση: Υπολογίστε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix}$$

□ **Τι συμβαίνει όταν $\text{rank}(A) < n$**

(Ακριβή περίπτωση):

$$\text{rank}(A) = 0 \Rightarrow B = \emptyset \Rightarrow x(t, x_0) = e^{At} x_0 + \phi$$

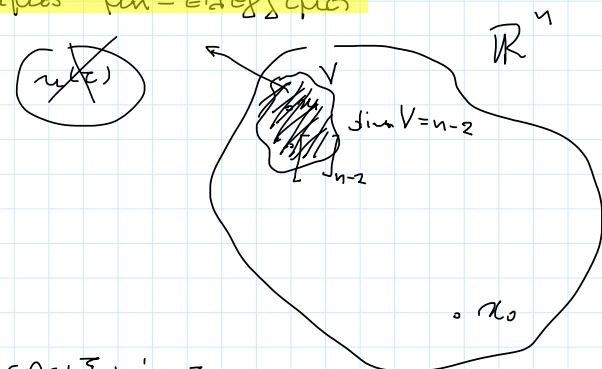
ή $u(t)$ δα επινοώζον τίν συμπεριφορά **καμμένος** ιδιοτιμής

• $0 < \text{rank}(A) < n \approx$ "μερικός εαεξζυμω"

∃ ιδιοτιμές εαεξζυμω ∩ ιδιοτιμές μη-εαεξζυμω

$$\lambda_i \sim e^{\lambda_i t} x_0 + \int$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$



"δύο ειδος εαεξζυμωτες" = διάσταση υπόχωρου εαεξζυμωτες
(η-ιδιοτιμής μη-εαεξζυμω)

$$\square \text{ Για } x \in V \subset \mathbb{R}^n : \nexists u(t) : x_0 \rightarrow x \in V$$

□ **Διάκριτος Χρόνος Συστήματα**
(παράδειγμα...)

Θεώρημα: Για το σύστημα $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ (Σ')

i) Αν η κατάσταση x είναι προσέγγιση $\Rightarrow x$ είναι εαεξζυμω

ii) $R_r \subset R_c$

iii) Αν (Σ') πλήρως προσέγγιση $\Rightarrow$ (Σ') πλήρως εαεξζυμω

Επιπλέον, αν $A \equiv$ μη-ιδιάζων $\Rightarrow$ (i), (iii) γίνεται "αν & μόνο αν"

iii) αν (2') Πάντως προκύπτει $\Rightarrow$ (2') Πάντως ελέγχεται

Επιπλέον, αν $A \equiv \mu\eta\text{-ιδιάζων} \Rightarrow$ (i), (iii) γίνεται "αν & μόνο αν"

Απόδειξη:

(i) αν x προκύπτει $\Rightarrow x \in \text{Im}(C)$, αλλά $\text{Im}(C) \equiv A\text{-αμεταβλητός υπόχωρος} \Rightarrow A^{\eta}x \in \text{Im}(C)$
αρκ. $x \equiv \text{ελέγχεται}$

αν $A \mu\eta\text{-ιδιάζων} \Rightarrow A^{-\eta}$ υπάρχει. Αν $x \equiv \text{ελέγχεται}$ (δυν. $A^{\eta}x \in \text{Im}(C)$) $\Rightarrow$

$x \in \text{Im}(C)$ δυν. $x \equiv \text{προκύπτει}$

□

$$z)dz + D \quad \text{with}$$

$$(\bar{Z}) \quad \text{realizability} \Leftrightarrow R_0$$

in realizability.

$$W_0(\cdot, \tau) \stackrel{op}{=} \int_0^\tau e^{A\tau} C^T C e$$

□