Θεώρημα (Πλήρης Απόκριση):

$$\rightarrow x(t,t_0,x_0,u) = \phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t}\phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \Rightarrow$$

$$y(t) = C[\exp A(t-t_0)]x_0 + C\int_{t_0}^{t}[\exp A(t-\tau)]Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Για Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα:

$$\dot{x}(t) = Ax(t)+Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)+Du(t)$$

$\phi(t,t_0) = ?$

Ιδιότητες:

$\exp(\emptyset_n) = \mathbb{I}_n$

$\exp(-At) = [\exp(At)]^{-1}$

$A\exp(At) = \exp(At)\cdot A$

$\frac{d}{dt}\exp(At) = A\exp(At)$

$$\phi(t,t_0) = \exp[A(t-t_0)]$$

- $\exp(At) \overset{\circ}{=} \mathbb{1}_n + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots$

$$H(t,\tau) = C\int_{t_0}^{t}[\exp A(t-\tau^*)]B\delta(\tau^*-\tau)d\tau^* + D\delta(t-\tau) \Rightarrow H(t-\tau) = \begin{cases} 0, & t\le\tau \\ C[\exp A(t-\tau)]B, & t\ge\tau \end{cases}$$

σε πρoσέξια $\{t=\tau$

Μήτρα Συν. Μεταφ.

$$H(s) = \mathcal{L}\{C\int_{t_0}^{t}[\exp A(t-\tau^*)]\} = C\,\mathcal{L}\{\exp(At)\}B + D$$

τελικά,

$$\boxed{H(s) = C(s\mathbb{1}-A)^{-1}B + D}$$

Υπολογισμός Μήτρας Διελεύσεως

ισχύει $\dot{\phi}(t,t_0) = A(t)\phi(t,t_0)$, με $\phi(t_0,t_0) = \mathbb{I}_n$

Χρον. Μεταβαλλόμενα ← (ΡΑΡ^{-1}) δύσκολο (δεν γίνεται πάντα!!)

$\psi(t) \equiv$ θεμελιώδης μήτρα ||| στήλες λύσεις της Δ.Ε. (γραμμ. ανεξ.) ↓

1. $\phi(t,t_0) = \psi(t)\psi^{-1}(t_0)$ $\quad (\forall t, t_0)$ $\left(\dot{\psi}_i(t) = A(t)\psi_i(t)\right)$

2. άν $A(t)$ & $\int_{t_0}^{t}A(t)dt$ → αντιμεταθετές $\Rightarrow \phi(t,t_0) = \exp\left[\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right]$

→ A, B : $AB = \ominus BA$ $\quad (AB \neq BA)$

$AB+BA=\emptyset$ ←

Πράγματι, $\phi(t_0,t_0) = \exp\left[\int_{t_0}^{t_0}A(\tau)d\tau\right] = \mathbb{I}_n$

$$\Rightarrow \dot{\phi}(t,t_0) = \frac{\partial}{\partial t}\exp\left[\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right] = \exp\left[\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right]\frac{\partial}{\partial t}\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau =$$

$$= \exp\left[\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right]A(t) \quad (\text{αντιμεταθετικότητα}) \Rightarrow$$

$$\dot{\phi}(t,t_0) = A(t)\exp\left[\int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau\right] = A(t)\phi(t,t_0)$$

Παράδειγμα,

$$A(t) = \begin{bmatrix} 2 & e^{-t} \\ -e^{-t} & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{Υπολογίζουμε: } \int_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau = \begin{bmatrix} 2(t-t_0) & -(e^{-t}-e^{t_0}) \\ e^{-t}-e^{t_0} & 2(t-t_0) \end{bmatrix}$$

όμως $A(t)$ & $\int_{t_0}^{t}A(t)d\tau \equiv$ αντιμεταθετό $\forall t \in (-\infty, +\infty)$

$$\Rightarrow \phi(t,t_0) = \exp\begin{bmatrix} 2(t-t_0) & -(e^{-t}-e^{t_0}) \\ e^{-t}-e^{t_0} & 2(t-t_0) \end{bmatrix}$$

Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα

Από $\Phi(t,t_0) = \exp[A(t-t_0)]$ ← "υπολογισμός εκθετικού πίνακα"

⇒ υπολογισμό της $\underline{\exp(At)}$

– άν $\underline{A = \text{διαγώνια}}$: $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ⇒ $\boxed{\dot{x}_i(t) = \alpha_{ii} x_i, \ i = 1, \dots, n}$

$\underline{\dot{x}_1}(t) = \alpha_{11} \underline{x_1}$
↑
"αποσυζευγμένο"

$$\Rightarrow x_i(t, t_0, x_{0i}) = e^{\alpha_{ii}(t-t_0)} x_{0i}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \exp(At) = \begin{bmatrix} e^{\alpha_{11}t} & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\alpha_{nn}t} \end{bmatrix}$$

$Y(s) = H(s)U(s)$

– Άν $\underline{A \neq \text{διαγώνια}}$

1. $\mathcal{L}\{\exp(At)\} = (s\mathbb{1} - A)^{-1}$ ⇒ $\boxed{\exp(At) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbb{1} - A)^{-1}\}}$

2. Θεώρημα Cayley – Hamilton (βλ. παρακάτω)