

• Δύο κατηγορίες "ευστάθειας" (σχετικά με το είδος της διαταραχής που παρατηρείται)

- "διαταραχές" $\rightarrow$ επιμέρους $\rightarrow$ συμμετρικές

Ερώτηση: φραγμένη διαταραχή $\Rightarrow$ "έξοδο" φραγμένο?

- αν θα επιδράσει στην έξοδο $\rightarrow$

- πόσο κορώ-μακρά $\rightarrow$
- πόσο "μεγάλη" επιρροή είναι να γίνει ή δίκτυο

Επιμέρους διαταραχές: Εισαγωγή τροχών $x^*(t) / u^*(t)$ (Lagrange)
(π.χ. αεροκάφος)

$BIBS, - BIBO$

Συμμετρικές διαταραχές: Εισαγωγή συμμετρικών ίσορροπίας (Θεωρία Lyapunov)

"Ελευθερία" δόσεων $\rightarrow$ (?) $\rightarrow$

για το Π.Κ.Ε.: Εισαγωγή / κατάσταση $\Rightarrow$ Εισαγωγή / Έξοδος $y = Cx(t)$

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΣΗΜΕΙΟΥ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

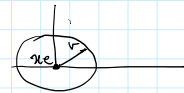
ορίσμοι:

Σημείο Ισορροπίας: (Μη Γραμμικά Συστήματα)

$\dot{x} = f(x) \sim$ αυτόνομο σύστημα

$\dot{x} = f(x, t) \sim$ μη-αυτόνομο $\rightarrow$

$x_e \stackrel{\text{op.}}{=} : f(x) = 0 \Rightarrow x_e = \dots$



- Αντικείμενο $\Sigma, I.$: $\exists r > 0 : B(x_e, r) \subset \mathbb{R}^n$
 $B(x_e, r) \equiv \{ x : \|x - x_e\| \leq r \}$

σαν $B(x_e, r) \not\subset \Sigma, I.$

Παράδειγμα:

$\dot{x} = Ax \Rightarrow Ax = 0 (\rightarrow (\lambda I - A)x_e = 0) \Rightarrow x_e = 0$ (if $\det A \neq 0$)

όμως: $A : \det A = 0 \Rightarrow Ax = 0 \sim$ άπειρες λύσεις

$\Rightarrow \text{Ker } A \equiv \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \} \subset \mathbb{R}^n$

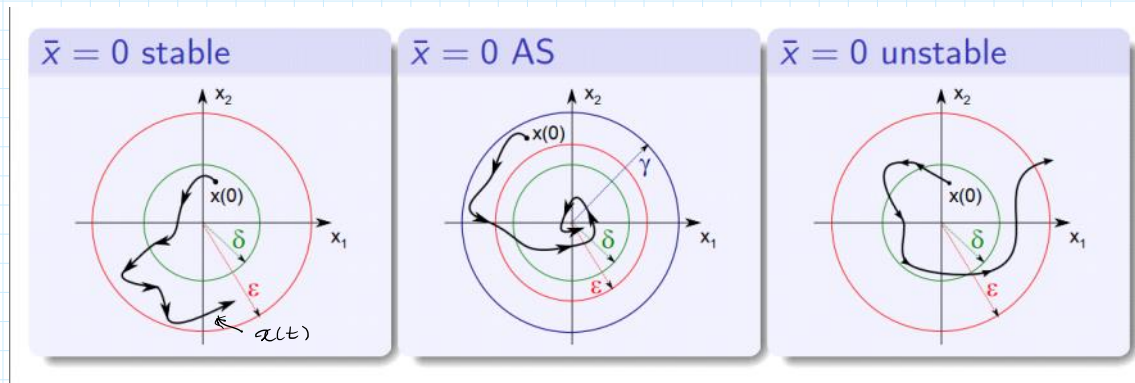
$\sim$ μη-μετρήσιμο άπειρο σύνολο μη-απομονωμένων $\Sigma, I.$

"Ενοικίαση" ευστάθειας $\Sigma, I.$

1^η Έννοια ευσταθίας Σ.Ι.

Ορισμός: Το Σ.Ι. $x_c = 0 \equiv$ **Ευσταθία / Lyapunov** αν για $\delta(\varepsilon, t) > 0$, $\exists \varepsilon > 0$

έτσι ώστε : αν $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$



Ορισμός:

$x_c \equiv$ **Αυτοματικά Ευσταθία** αν : 1) Ευσταθία $\wedge$

2) $\exists \delta > 0 : \|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$
 "ηθροχή εγκυκλώσεως"

Κριτήρια Ευσταθίας

Γ. $x \in A \Rightarrow$ ιδιοτιμές της μήτρας A

Παρατήρηση: **ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ** για γραμμικά χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα!

Παράδειγμα:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cos^2 t & 1 - \frac{3}{2} \sin t \cos t \\ -1 - \frac{3}{2} \sin t \cos t & -1 + \frac{3}{2} \sin^2 t \end{pmatrix} x$$

$$\Sigma \text{Ι } x=0, \text{ ιδιοτιμές: } -\frac{1}{4} \pm j\frac{\sqrt{7}}{4} \rightarrow (\text{αεξ. του } t) \Rightarrow \text{Re} \lambda(A) < 0$$

• Είναι ευσταθία ??

Παρατηρούμε ότι αν: αρχ. συνθήκη: $(-\alpha, 0) |_{t=0}, \alpha \in \mathbb{R}$:

$$x(t) = \begin{pmatrix} -\alpha e^{\frac{1}{2}t} \cos t \\ \alpha e^{\frac{1}{2}t} \sin t \end{pmatrix} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = +\infty, \forall \alpha \neq 0$$

$\Rightarrow x=0 \neq$ **Ευσταθία**

ΘΕΩΡΙΑ LYAPUNOV

→ 1^η μέθοδος (φωτισμοποίηση)

→ 2^η μέθοδος (γενικά μη-γραμμικά συστήματα)

1η Μέθοδος Lyapunov

≡ "τέλες βεβαιώνει μέσω γραμμικοποίησης"

Μη Γραμμικό Σύστημα

$$\begin{cases} \dot{a} = f(x) \\ \bar{a} = g = \Sigma I. \end{cases} (\Sigma)$$

Γραμμικοποίηση

$$(\Sigma_f) : \begin{cases} \dot{\delta x} = A \delta x \\ A \equiv D_x f(x) \big|_{x=0} \end{cases}$$

Θεώρημα: (Lyapunov - 1η μέθοδος)

Το $\Sigma, I, \bar{x} = 0$ (Σ) : i) Αν για ο δισκός το $\Sigma_f : \text{Re}[\lambda_i(A)] < 0$

⇒ είναι **Ασφαλή Βασισμένο**

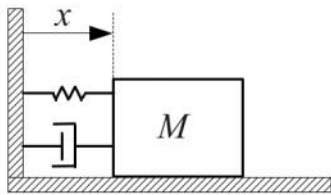
ii) Αν υπάρχει μια δισκός το $A \big|_{\Sigma_f : \text{Re}[\lambda_i(A)] > 0}$

⇒ **Δεσμένο**

• Όταν $x=0 = \Sigma, I = 0$ ⇒ Ασφαλή Βασισμένο ⇒ Γενική περίπτωση εξελεγχόμενης

Παράδειγμα "δυναμίας" της 1ης μεθόδου

Lyapunov direct method: a first example



Model

$$M\ddot{x} = - \underbrace{b\dot{x}|\dot{x}|}_{\text{NL damping}} - \underbrace{(k_0x + k_1x^3)}_{\text{NL elastic force}}$$

$b, k_0, k_1 > 0$

Defining $x_1 = x, x_2 = \dot{x}_1$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{b}{M}x_2|x_2| - \frac{k_0}{M}x_1 - \frac{k_1}{M}x_1^3 \end{cases} \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ is stab./AS/ES?}$$

$$D_x f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_0}{M} - \frac{3k_1}{M}x_1^2 & -\frac{2b}{M}x_2 \text{sgn}(x_2) \end{bmatrix} \Rightarrow D_x f \big|_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_0}{M} & 0 \end{bmatrix}$$

Eigenvalues: $\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{k_0/M}$

No conclusion on $\bar{x} = 0$ using the linearized system

2η Μέθοδος Lyapunov : (Βεβαιώνει ΧΩΡΙΣ να ρωτάει οι Α, Ε.)

Πρόταση: Βεβαιώνει ηθικού συστήματος → Torricelli, → Lagrange, Lyapunov → Lyapunov

Βλέπει βέβαια της 2ης μεθόδου Lyapunov :

Βάζουμε πίσω τις 2 μεθόδους Lyapunov:

Εξίσωση $\rightarrow$ Ενέργεια $\downarrow$, όταν είναι θετική $\equiv \Sigma \cdot I$.

"Συνάρτηση Ενέργειας": $V(x)$

Π.κ. (προσφέρω παράδειγμα)

$$V(x) = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{x}^2}_{\text{κινητική}} + \underbrace{\int_0^x (k_0 x + k_1 x^2) dx}_{\text{δυναμική}} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k_0 x^2 + \frac{1}{4} k_1 x^4$$

• **Επίκλιση (μικτή) ενέργεια** $\rightarrow$ όταν $(x=0, \dot{x}=0)$, στο $\Sigma \cdot I$.

• Ασυμπτωτική Εξίσωση $\equiv$ μιν. ενέργεια $\rightarrow \emptyset$

• Αξία $\equiv$ μιν. ενέργεια $\uparrow$

Όταν η παράγωγος της μιν. ενέργειας $\downarrow \Rightarrow$ μιν. ενέργεια $\downarrow$

$\hookrightarrow \dot{V}(x)$ / μεταβολή της μηχανικής ενέργειας πάνω στις τροχιές (αξίες) του συστήματος

(μθηματική διατύπωση):

ορισμός: μία συνάρτηση $V(x) \equiv$ (τοπικά) θετικά ορισμένη.

1) $V(\emptyset) = \emptyset$

2) $V(x) > 0, \forall x \neq \emptyset$

$\forall x \in \mathcal{B}(x_e, r)$

(καθολικά) θετικά ορισμένη

$\forall x \in \mathbb{R}^n$

• $V =$ **μοναδικό** **επίκλιση** ($\Sigma \cdot I$)

• **Πρόταση**: αν $V(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, θετικά ορισμένη $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow d(x, y) \approx d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

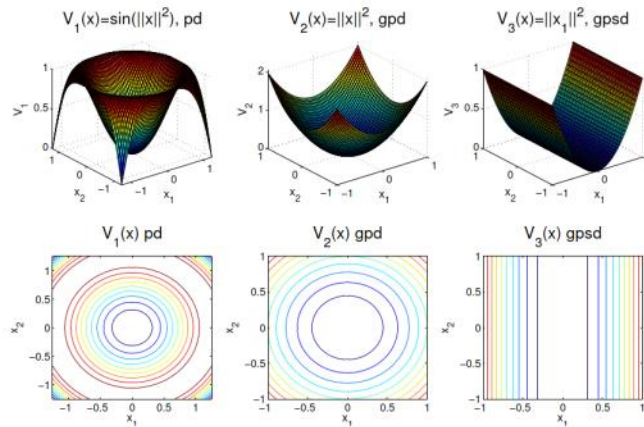
$$d(x, y) = \begin{cases} V(x) + V(y) & \text{όταν } x \neq y \\ \emptyset & x = y \end{cases}$$

απόσταση και **απόσταση** στο $\mathbb{R}^n$

□ απόσταση σημείο x από το $y = \emptyset$:

$d(x, \emptyset) \equiv V(x) \equiv \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Examples of positive definite functions



Level surfaces: $V_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) = \alpha\}$

- they do not intersect

Έστω $V(x, t) \equiv$ θετική ορισμένη. (p.d.f.) / (converge) $\sim$ l.p.d.f

Υπολογισμός $\dot{V}(x, t)$:

$$\dot{V}(x, t) = \frac{d}{dt} V(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \cdot f(x, t) \quad (\text{μιν-αδικοποιη} \text{ συστήματα})$$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x)$$

όρα $\dot{V}(x) = \nabla V(x) f(x) \quad (\text{αυτονομή} \text{ συστήματα})$

• η μεταβολή της $V(x, t)$ έχει μέτρο των ροών του διανυσματικού πεδίου $\dot{x} = f(x, t)$

οποιαδήποτε "ραβδόμοιο lie" της $V(x, t)$ ----

Θεώρημα (Lyapunov) (2η μέθοδος)

1. Το Σ.Ι. x_c είναι επίκεντρο / Lyapunov άρ.

$$\exists V(x, t) : \text{ l.p.d.f. } \text{ και } \dot{V}(x, t) \leq 0, \quad \forall x \in B(x_c, r)$$

2. άρ $V(x, t) \equiv$ l.p.d.f., $\dot{V}(x, t) < 0$ (φθίνουσα)
 $\dot{V}(x, t) < 0 \quad \forall x \in B(x_c, r)$
 $\Rightarrow x_c =$ ομοιόμορφα επίκεντρο

$$\Rightarrow x_c = \text{ομοιόμορφα εβραδός}$$

$$3. \text{ αν } V(x, t) = l.p.d.f \quad \& \quad \dot{V}(x, t) < 0 \quad (l.p.d.f.)$$

$$\Rightarrow x_c = \text{ασυμπτωτικά εβραδός} \quad \forall x \in B(x_c, r)$$

$$4. \text{ αν } V(x, t) = p.d.f, \quad \& \quad \dot{V}(x, t) < 0$$

$$\Rightarrow x_c = \text{καθαρά ασυμπτ. εβραδός}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Παρατηρήσεις:

1. **Ανεγκρίτες** συνάρτησες (οχι ικανές)

2. "Αν δώ $\exists V(x, t) \dots ? \Rightarrow \text{ΚΑΝΕΝΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ}$

$\sim$ "ΑΑΑΑΑ ΕΑΝΤΩΤΗ $V(x, t)$.

3. **Δέρ υπάρχει συστηματική συνάρτησες υπολογισμός $V(x, t)$**

$$V(x, t) \stackrel{p}{=} \text{συνάρτησες Lyapunov} = \{ (l.p.d.f + \dot{V}(x, t) \leq 0) \}$$

$$V(x, t) = \{ (l.p.d.f) \} = \text{"υποψήφιος" συν. Lyapunov}$$

4. "**Προσέγγιση Εαυτοσυνάρτησες**" του **L.I.** $x_c : B(x_c, \delta)$

Παράδειγμα:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_2^3$$

$$L.I. \equiv x_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

"Εστω $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ ("υποψήφιος") $\Rightarrow p.d.f$ (νί εναρμόγος)

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1[-x_1 + x_2] + 2x_2[-x_1 - x_2 + x_2^3] \\ &= \dots = -2x_1^2 - 2x_2^2(1 + x_2^2) \end{aligned}$$

$$\forall x \neq 0 \Rightarrow \dot{V}(x) < 0 \Rightarrow x_c = 0 = \text{ασυμπτωτικά εβραδός}$$

ορίσμος: **πρόσέγγιση εαυτοσυνάρτησες** $B(x_c, \delta) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \text{αν } x(0) \in B(x_c, \delta) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \| \varphi(t, x(0)) \| = 0 \}$

Η 2η μέθοδος Lyapunov για γραμμικά συστήματα :

$$\dot{x} = Ax$$

(Υπόθεση)

□ Θεωρούμε Ορισμένες Μητρώα

$$\text{Ένας } M \in \mathbb{R}^{n \times n} \equiv \text{psd} \quad \text{αν} \quad x \neq 0 \Rightarrow x^T M x > 0$$

(θετ. ορισμένος)

$$= \text{psd} \quad \text{αν} \quad x \neq 0 \Rightarrow x^T M x \geq 0$$

(θετ. ημ-ορισμένος)

$$= \text{nd} \quad \text{αν} \quad x \neq 0 \Rightarrow -M \equiv \text{psd}$$

(αρ. ορισμένος)

Γραμμικός Μεγός : $M = \underbrace{\frac{M+M^T}{2}}_{\text{συμμετρικό μέρος}} + \underbrace{\frac{M-M^T}{2}}_{\text{αντι-συμμετρικό μέρος}} \quad (\Rightarrow \text{M συμμετρικός})$

ή μητρώα M διασπάται :

• η γραμμική μορφή του αντισυμμετρικού μέρους είναι μηδέν.

(άρα μπορούμε να υποθέσουμε πάντα ότι $M \equiv$ συμμετρικός)

$$\square \text{ αν } M > 0 (\equiv \text{psd}) \Rightarrow V(x) = x^T M x = \text{pdf}$$

$$M \geq 0 (\text{psd}) \Rightarrow V(x) = x^T M x = \text{psdf}$$

□ Ένας συμμετρικός M έχει πραγματικούς διαστής

□ Αν $M > 0$, τότε $\lambda_{\min}(M)$, $\lambda_{\max}(M)$ είναι ελάχιστη & μέγιστη διαστής

$$\text{Ισχύει: } \lambda_{\min}(M) \|x\|^2 \leq x^T M x \leq \lambda_{\max}(M) \|x\|^2$$

Γενικά, $\|M\| = \lambda_{\max}(M) \approx$ νόρμα του χώρου των θ. ορισμένων μητρώων
Επίσης, $\|Mx\| \leq \|M\| \cdot \|x\|$

Γραμμικά Συστήματα $\dot{x} = Ax$

$$\dot{x} = Ax$$

(i) (ii)

"Υποψήφια" εν. Lyapunov : $V(x) = x^T P x$, $P = P^T$, $P > 0$

$$\Rightarrow V(x) \equiv \text{pdf}$$

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + P A) x$$

Αν $A^T P + P A < 0$ θα $\exists Q : 0 = 0^T, Q > 0$.

$$A^T P + P A = -Q \quad (\text{Εξίσωση Lyapunov})$$

$$\Rightarrow \dot{V}(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

τότε $V(x) \equiv$ συνάρτηση Lyapunov και έχει το θ. Lyapunov

Πρόταση:

Ικανή + Αρκεία συνθήκη για ασυμπτωτική ευστάθεια του $x=0$ ενός

Γ, X, A είναι: $\forall$ συμμετρικός, $Q > 0$, ο μοναδικός πίνακας P

ο οποίος πληροί την εξίσωση Lyapunov $A^T P + P A = -Q$ είναι συμμετρικός, $P > 0$.

Τότε, $V(x) = x^T P x \equiv$ συν. Lyapunov θ ισχύει $\dot{V}(x) = -x^T Q x < 0$

Αρα, για Γ, X, A μπορούμε πάντα να εληγήσουμε: $V(x) \equiv x^T P x$

ο "αντίστροφος" Lyapunov θ : αν $x=0 \equiv$ ασυμπτωτική ευστάθεια, τότε
 $\exists$ συν. Lyapunov $V(x) = x^T P x = \dots$
 (αποδεικνύεται ΜΟΝΟ για ειδικές περιπτώσεις!)

Αλγόριθμος: (απόδειξη της ασυμπτωτικής ευστάθειας)

1. Επιλέγω $Q > 0, Q = Q^T$ (π.χ. $Q = I$)

2. Λύνω $A^T P + P A = -Q$

3. το Γ, X, A , ελέγχεται ($x=0$), είναι ασυμπτωτική ευσταθής

αν και μόνο αν $P > 0$

Παράδειγμα:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 4x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= -8x_1 - 12x_2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$1. Q = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ Έστω } P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \quad (p_{12} = p_{21})$$

$$A^T P + P A = -Q$$

(Υπολογίζω τον πίνακα P από την εξ. Lyapunov και αποδεικνύω ότι είναι συμμετρικός θ θα.)

$$A^T P + P A = -Q$$

(Υπολογίζω τον πίνακα P από τών εξ. Lyapunov και αποδεικνύω ότι είναι συμμετρικός & θετ.)

$$\text{Sυλ.} \quad \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -8p_{12} & -8p_{22} \\ 4p_{11} - 12p_{12} & 4p_{12} - 12p_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -8 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dots \begin{cases} -8p_{12} - 8p_{12} = -1 \\ -8p_{22} + 4p_{11} - 12p_{12} = 0 \\ 4p_{11} - 12p_{12} - 8p_{22} = 0 \\ 4p_{12} - 12p_{22} + 4p_{12} - 12p_{22} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P > 0 \text{ και άρα } \Rightarrow \eta = 0 = \text{Ακριβής Εξίσωση}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0,0477 \\ \lambda_2 = 0,3273 \end{cases}$$

Άσκηση: Ισχύει η άνωτέρω πρόταση για χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα;

Κριτήρια Ασυντήρητη και Εξασθενής Εξίσωσης

Πρόταση: 'Αν $V(x) = x^T P x$, $P > 0$, Sυλ. $\dot{V}(x) = -x^T Q x$, $Q > 0$

Sυλ. $x=0 \equiv$ Ασυντήρητη Εξίσωση

Τότε,

$$a) \lambda_{\min}(P) \|x\|^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max}(P) \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$b) \dot{V}(x) \leq -\lambda_{\min}(Q) \|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow a) + (b) \Rightarrow x=0 \equiv \text{Κριτήριο Εξασθενής Εξίσωσης}$$

$$\gamma = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} = \text{Εξασθενής Εξίσωση}$$

(Προηγούμενο παράδειγμα) - (Ενδιάμεση)

$$P = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0,0477$$

(1 πολυγωνικό παζαριόβραχο) - (5 τετραγώνια)

$$P = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0.0477 \\ \lambda_2 = 0.3273 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} = 1.5276 \equiv \text{ταχύτητα σύγκλισης}$$

αυτός ουσιαστικά σημαίνει: $\forall x(0) \in \mathbb{R}^2$, $\|x(1)\| \leq c \|x(0)\| e^{-1.5276t}$, $c > 0$

Η 1η Μέθοδος Lyapunov

≡ "είσοι εστάθην μέσω γραμμικοποίησης"

Μη Γραμμικό Σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ \bar{x} &= 0 = \Sigma I_0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \end{array} \right\}$$

Γραμμικοποίηση

$$\begin{aligned} (\Sigma_f) : \dot{x} &= A x \\ A &\equiv D_x f(x) \Big|_{x=0} \end{aligned}$$

Θεώρημα: (Lyapunov - 1η μέθοδος)

Το $\Sigma, I_0, \bar{x} = 0$ τω $(\Sigma) : \dot{x} = f(x)$ αν $\exists$ A $\text{Re}[\lambda_i(A)] < 0$

$\Rightarrow$ είναι **Ασπ. Ευσταθές**

ii) αν υπάρχει μια λύση τω A $\text{Re}[\lambda_i(A)] > 0$

$\rightarrow$ **Χετ. Ευσταθές**

• Όταν $x=0 = \Sigma, I_0 \equiv A$ ασπ. Ευσταθές $\Rightarrow$ Ευσταθές πέρα από ελεγχόμενα

Απόδειξη:

Γ.Χ.Α. : $A^T P + P A = -Q$, $\exists Q = Q^T, > 0 \Rightarrow V(x) = x^T P x$ (Υποτίθεται 6. Lyapunov)

$$(M.F.E) : \dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T P f(x) + f(x)^T P x$$

$$\downarrow : f(x) = A x + g(x) \quad \text{όπου} \quad A \equiv D_x f(x) \Big|_{x=0}$$

$g(x) = \text{όροι υψηλ. τάξης (Taylor)}$

$$A_v \text{ ίσως} : \begin{cases} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0, & \text{όταν } \|x\| \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{V}(x) &= x^T P (A x + g(x)) + (x^T A^T + g(x)^T) P x = \\ &= x^T (A^T P + P A) x + 2 x^T P g(x) = -x^T Q x + 2 x^T P g(x) \end{aligned}$$

Άρα, αν το έχει $\forall \gamma > 0, \exists r > 0 : \|g(x)\| < \gamma \|x\|, \forall x \in B(0, r)$

$\Rightarrow \forall x \in B(0, r) :$

$$\dot{V}(x) \leq -x^T Q x + |2 x^T P g(x)| \leq -x^T Q x + 2 \|x\| \cdot \|P\| \cdot \|g(x)\|$$

$$< -x^T Q x + 2 \gamma \lambda_{\max}(P) \|x\|^2 \leq$$

$$\leq -[\lambda_{\min}(Q) - 2 \gamma \lambda_{\max}(P)] \|x\|^2$$

Όταν γ μικρό : $\lambda_{\min}(Q) - 2 \gamma \lambda_{\max}(P) > 0 \Rightarrow \dot{V}(x) \leq 0$

$\Rightarrow$ (LaSalle) : $D_e = \{x : V(x) < e\} \ni B(0, r) \equiv \text{περίσφι εξελεγχόμενα } x=0$

□

Εφαρμογή: (Ασκήσεις) (πάλι με Γραμμικά συστήματα (Σ))

- δίνονται $f: f(x) = Ax + g(x)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, f(x)|_{x=0}$
- επιλογή $Q: A^T P + PA = -Q \sim P$
- υπολογισμός $\gamma: \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} > \gamma$
- $B(0, r): \forall x \in B(0, r) \Rightarrow \|g(x)\| < \gamma \|x\| \Rightarrow$
 $D_c = \{x: V(x) = x^T P x < c\} \supset B(0, r) \equiv$ περιοχή ευσταθίας

Παράδειγμα:

$$(Σ): \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_1^3 - 2x_2 \end{cases} \quad (x=0 = A.S. + \text{η περιοχή ευσταθίας})$$

- Αποδοκιμάζουμε με γραμμικοποίηση

$$\delta \dot{x}_1 = \delta x_2$$

$$\delta \dot{x}_2 = -\delta x_1 - \underbrace{3x_1^2 \delta x_1}_{g(x)} - 2\delta x_2$$

$$\Rightarrow f(x) = Ax + g(x)$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \Rightarrow x=0 = A.S.$$

- Εντοπίζουμε Περιοχή Ευσταθίας

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1^3 \end{bmatrix} \quad (\Rightarrow g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1^3 \end{pmatrix})$$

$$\text{Επιλέγουμε } Q = I \Rightarrow \text{αύξανε } A^T P + PA = -Q, \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$-2p_{12} = -1$$

$$-p_{22} + p_{11} - 2p_{12} = 0$$

$$2p_{12} - 4p_{22} = -1$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \text{δίνουμε } P: 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cdot \text{Επιλέγουμε } \gamma: \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} > \gamma$$

$$\lambda_{\max}(P) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lambda_{\min}(Q) = 1$$

$$\lambda_{\min}(Q)$$

$$1$$

$$2\alpha_{\max}(P)$$

$$\alpha_{\min}(Q) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_{\min}(Q)}{2\alpha_{\max}(P)} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} > \gamma, \text{ Έστω: } \gamma = \frac{1}{4}$$

$$\text{Έστω } r : x \in B(\phi, r) \Rightarrow \|g(x)\| < \gamma \|x\|$$

$$\|g(x)\| < \gamma \|x\| \Rightarrow \left\| \begin{bmatrix} \phi \\ -x_1^3 \end{bmatrix} \right\| < \frac{1}{4} \|x\| \Rightarrow |x_1^3| < \frac{1}{4} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\forall x, \forall D_e = \left\{ x = [x_1 \ x_2]^T : \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} < 1 \right\} \supset B(\phi, r)$$

Είναι πρώτη εξίσωση

(• $D_e \equiv \text{εφαρμογή}$)