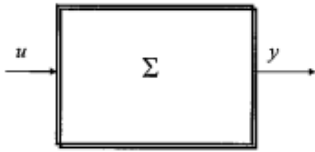
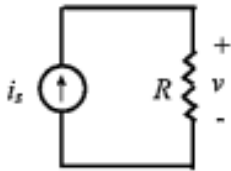


Μεταβλητές Κατάστασης και Ψροτυπά μεταβλητών κατάστασης



$$y(0) = S[u(0)]$$

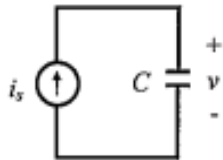
- Γραμμικά και Μη Γραμμικά Συστήματα (διαφ.)
- Στιγματικά Συστήματα



$$v(t) = R i_s(t)$$

$$y(t) = R u(t)$$

- Συστήματα με Μνήμη



$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_s(\tau) d\tau$$

$$y(t) = \underbrace{v(t_0)}_1 + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_s(\tau) d\tau$$

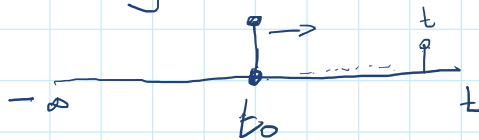
$$\{y(t) = u(t+2)\}$$

("ακτινωτά" συστήματα)

- Δυναμικά Συστήματα

$$y(t) \rightsquigarrow u[t_0, t], v(t_0)$$

$$y(t) = x(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$$



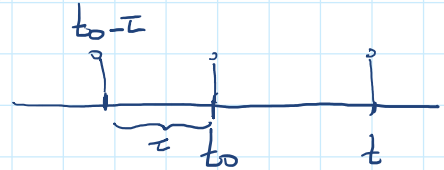
$$x(t_0) \rightsquigarrow \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} u(\tau) d\tau$$

$$x(t_0) \rightarrow \approx \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) d\tau$$

||
"κατάσταση του συστήματος | t_0 "

π, x_0 $y(t) = \frac{u(t-\tau)}{\tau}, \quad \tau > 0$

$y(t), \quad \forall t \geq t_0$



$\frac{u(t_0, t)}{\tau}$

εντός $[t_0 - \tau, t_0] \approx \frac{u[t_0 - \tau, t_0]}{\tau}$

$\Rightarrow x(t_0) \equiv u[t_0 - \tau, t_0] \equiv \text{κατάσταση συστ.}$

κατάσταση $\equiv$ σύνολο παραμέτρων, μαζί $u[t_0, t]$ χρειάζονται
για τον υπολογισμό της $y(t)$, $\forall t \geq t_0$

Καταστατικές Εξισώσεις Συστ. Συνέχους Χρόνου

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

Καταστατικές Εξισώσεις Συστ. Διάκριτου Χρόνου

$$x[n+1T] = A(nT)x(nT) + B(nT)u(nT)$$

$$y(nT) = C(nT)x(nT) + D(nT)u(nT)$$

Επίλυση Καταστατικών εξισώσεων

- Μαθηματικά Πρόβλημα: Μήτρα Κρουστικών Αποκρ.

$\Gamma \cdot X \cdot A \downarrow$
Μήτρα Συνάρτησεων Μεταφ.

$t = \emptyset \downarrow$

$$Y(s) = H(s) U(s)$$

- Για Χρον. Μεταβαλλόμενα Συστήματα
- Για $\Gamma \cdot X \cdot A$

- Χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα

(Ωστόσο των λύσεων)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ y \in \mathbb{R}^p \end{array} \right.$$

□ Αποκριση μηδενικής εισόδου

$$u(t) = 0 \quad (\text{ομογενής } A \rightarrow E)$$

(ορίσουμε) : $x(t, t_0, x_0) \rightsquigarrow 1 + \text{μοναδική λύση}$

$$\rightsquigarrow \text{λύση ως } \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\Rightarrow \text{απόκριση : } y(t) = C(t)x(t, t_0, x_0)$$

Θεώρημα 1 (4.1)

Το σύνολο των λύσεων της εξ. αποτελεί ένα διανυσματικό χώρο n -διαστάσεων

Απόδειξη: (σχέδιο)

"Έστω V το σύνολο των λύσεων στο U
Έστω $x_1, x_2 \in V$ ($\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) και

"Έστω V το σύνολο των λύσεων στο U
Έστω $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) και

$$\varphi_1, \varphi_2 \in V \quad \text{τότε: } \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 \in V$$

$$\begin{aligned} \text{δίνου: } \frac{d}{dt} [\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2] &= \alpha_1 \frac{d}{dt} \varphi_1(t) + \alpha_2 \frac{d}{dt} \varphi_2(t) \\ &= \alpha_1 A(t) \varphi_1(t) + \alpha_2 A(t) \varphi_2(t) \\ &= A(t) [\alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t)] \end{aligned}$$

$$\forall t \in U$$

Άρα $V \equiv$ γραμμ. υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow V \equiv$ διανυσματικός χώρος

Παράδειγμα:

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Πρόκειται εύκολα (!) } \begin{cases} \varphi_1(t) = (e^{-t}, 0)^T \\ \varphi_2(t) = (\frac{1}{2} e^t, e^{-t})^T \end{cases}$$

Λύσεις στο
διάνυσμα $U = (-\infty, +\infty)$

Ακόμη, $\varphi_1, \varphi_2 \equiv$ γραμμ. ανεξάρτητες (να είναι αυτό)

$\Rightarrow \{\varphi_1, \varphi_2\} \equiv$ βάση του χώρου των λύσεων

$\Rightarrow \forall$ λύση της εξίσωσης με $A(t)$ είναι της μορφής:

$$\varphi(t) = \alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t)$$

$$= (\alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 \frac{1}{2} e^t, \alpha_2 e^{-t})$$

$$\text{με } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

Θεώρημα 2: (4.2)

Οι λύσεις $x_i(t)$, $i=1, 2, \dots, n$ ως εξ. (1) με

αρχ. συνθήκες τα **συμμόν**: $x_1(t_0) = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$

$$x_2(t_0) = [0 \ 1 \ \dots \ 0]^T$$

$$x_n(t_0) = [0, \dots, 1]^T$$

αναπαράγουν **Βάση** του διανυσματικού χώρου των λύσεων της Δ.Ε.ξ. (1)

Ορισμός (4.1):

Η **Μήτρα** $\Phi(t, \tau)$ με συνάρτηση ως προς

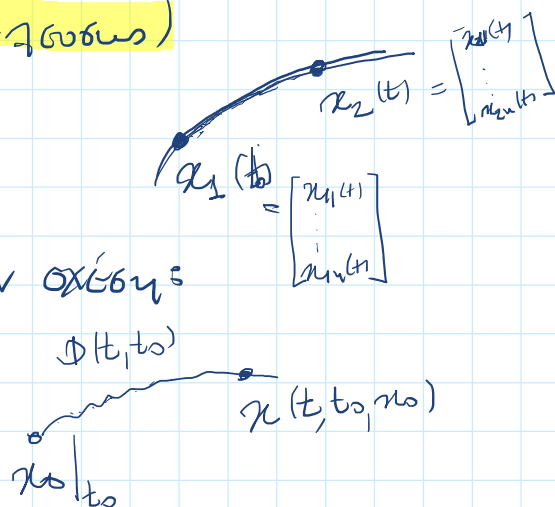
$x_i(t, \tau, x_i(t_0))$ οι αρχ. συνθήκες τα $x_i(\tau)$

ονομάζονται **Μήτρα Μεταβάσεως (Διέξωδους)**

Θεώρημα 3: (4.3)

Οι λύσεις της εξ. (1), δίνονται από την σχέση:

$$x(t, t_0, x_0) = \Phi(t, t_0) x_0$$



Παράδειγμα: (4.2) $\dot{x} = A(t)x$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}$$

Πράξεις: $\dot{x}_1(t) = -x_1(t) + e^{2t} x_2(t) \quad (\alpha)$

$\dot{x}_2(t) = -2x_2(t) \quad (\beta)$

$(\beta) \Rightarrow \boxed{x_2(t, t_0, x_{01}, x_{02}) = e^{-2(t-t_0)} x_{02}}$

$(\alpha) \Rightarrow \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + e^{2t} x_{02}$

$(\alpha) \Rightarrow \boxed{x_1(t, t_0, x_{01}, x_{02}) = e^{-(t-t_0)} x_{01} + (1 - e^{-(t-t_0)}) e^{2t_0} x_{02}}$

Τότε, η μήτρα μεταβάσεων:

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} x_1(t, t_0, 1, 0) & x_1(t, t_0, 0, 1) \\ x_2(t, t_0, 1, 0) & x_2(t, t_0, 0, 1) \end{bmatrix}$$

Άρα $\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} & 1 - e^{-(t-t_0)} e^{2t_0} \\ 0 & e^{-2(t-t_0)} \end{bmatrix}$

Ορισμός: Μία μήτρα

$$\Psi(t) = [\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)]$$

με στοιχεία $\psi_i(t)$, $i=1, 2, \dots, n$, όπου $\psi_i(t)$ είναι

n -γραμμ. ανεξάρτητες λύσεις ως εξ. (1)

ονομάζεται **θεμελιώδης μήτρα** ως εξ. (1)

Παράδειγμα:

$$\begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα:

$$\tilde{A}(t) = \begin{pmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζω τις λύσεις, θεωρώ ότι

$$\begin{cases} x_1(t, t_0, x_{01}, x_{02}) = e^{-(t-t_0)} x_{01} + \\ \quad + (1 - e^{-(t-t_0)}) e^{2t_0} x_{02} \\ x_2(t, t_0, x_{01}, x_{02}) = e^{-2(t-t_0)} x_{02} \end{cases}$$

τις τιμές: $t_0 = 0, x_{01} = 1, x_{02} = 1$

$$\text{τότε } \psi_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-2t} \end{bmatrix}^T$$

στη συνέχεια, τις τιμές: $t_0 = 1, x_{01} = 0, x_{02} = -1$

$$\text{τότε } \psi_2(t) = \begin{bmatrix} -(1 - e^{-(t-1)}) e^2 & -e^{-2(t-1)} \end{bmatrix}^T$$

$$\text{Τέλος, } \psi(t) = \begin{bmatrix} 1 & -(1 - e^{-(t-1)}) e^2 \\ e^{-2t} & -e^{-2(t-1)} \end{bmatrix} \equiv \text{θεμελιώδης μίτρα}$$

□ Παρατήρηση: η εξ. (1) έχει άλλες θεμελιώδεις μίτρες, αλλά μία μοναδική μίτρα μετράβασης
(να αξιοποιήσει...)

Θεώρημα (4.4):

"Αν $\psi(t) \equiv$ θεμελιώδης μίτρα της (1) τότε

$$\det \psi(t) \neq 0, \quad \forall t_0 \in (-\infty, +\infty)$$

$$\Rightarrow \exists \text{ πάντα } \psi(t)^{-1}$$

$$\Rightarrow \exists \text{ πάντα } \Psi(t)^{-1}$$

Παράδειγμα: (Χρον. Μεταβολ. Συστήματα)

Ερώτημα:

Είναι δυνατόν μία μήτρα να έχει μεμονωμένα ορίζοντα σε κάποιο σύστημα ή ταυτόχρονα οι δυνάμεις της να είναι γραμμ. ανεξαρτητές ;

• Ναι, (όταν το σύστημα είναι χρον. μεταβαλλόμενο)

Παράδειγμα:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- δύναμη γραμμ. ανεξαρτητές

$$+ \det \Phi(t) = 0, \quad \forall t \in (-\infty, \infty)$$

$\Rightarrow$ Δεν μπορεί να είναι θεμελιώδης μήτρα

Θεώρημα (4.5):

Αν $\Psi(t)$ μία θεμελιώδης μήτρα και $\Phi(t, t_0)$ η μήτρα μεταβάσεως της εξ. (1), ισχύει:

$$\Phi(t, t_0) = \Psi(t) \Psi^{-1}(t_0), \quad \forall t_0 \in (-\infty, +\infty)$$

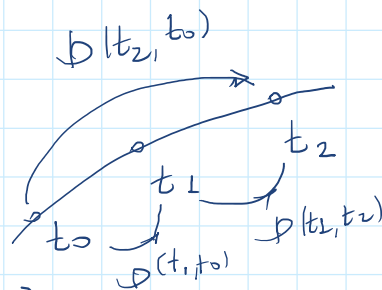
(τρόπος υπολογισμού της μήτρας μεταβάσεως χρον. μεταβ. συστημάτων)

Ιδιότητες ως $\Phi(t, t_0)$

$$1. \Phi(t_0, t_0) = \mathbb{I}$$

$$2. \Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t)$$

$$3. \Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0)$$



$$\forall t_1, t_2 \in (-\infty, +\infty) : \chi(t_2, t_0, x_0) = \Phi(t_2, t_0) x_0$$

$$\square \chi(t_2, t_0, x_0) = \Phi(t_2, t_0) x_0 = \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0) x_0$$

$$\text{Άρα } \chi(t_2, t_0, x_0) = \Phi(t_2, t_1) \chi(t_1, t_0, x_0)$$

□ Αποκριση μηδενικής καταστάσης (Υπον. Μεταφοράς.)
 Ίσως.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$\wedge \chi(t_0) = 0$$

Θεώρημα 4:

Αν $x(t_0) = 0$ τότε η λύση ως Δ.Ε. είναι:

$$x(t, t_0, 0, u) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau$$

Τότε, η απόκριση (Έξοδος) δίνεται από τον:

$$y(t) = C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau + D(t) u(t)$$

Παράδειγμα: (4.4)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + 3 u(t)$$

6ε περίπου $t=t_0$ και

"Έστω είσοδος $u(t) = 2\delta(t-t_0)$ (βυμβόλη)

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & (1-e^{-(t-\tau)})e^{2\tau} \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 2\delta(\tau-t_0) d\tau + 6\delta(t-t_0)$$

$$= \begin{bmatrix} 2[-1 \ 1] \int_{t_0}^t \begin{bmatrix} (1-e^{-(t-\tau)})e^{2\tau} \\ e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau + 6 \end{bmatrix} \delta(t-t_0)$$

$$= \begin{bmatrix} 2[-1 \ 1] \begin{bmatrix} \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t_0} + \frac{1}{3}e^{-(t-3t_0)} \\ \frac{1}{2}(1-e^{-2(t-t_0)}) \end{bmatrix} + 6 \end{bmatrix} \delta(t-t_0)$$

$$y(t) = \left[-\frac{1}{3}e^{2t} + e^{2t_0} - \frac{2}{3}e^{-(t-3t_0)} - e^{-2(t-t_0)} + 7 \right] \delta(t-t_0)$$

□ Πλήρης Αποκριση (Χρον. Μεταφραζ. Ίσοι.)

Θεώρημα :

Η άδην της Δ.Ε.Σ., $x(t, t_0, x_0, u)$ δίνεται ως :

$$x(t, t_0, x_0, u) = \underbrace{\Phi(t, t_0) x(t_0)}_{(A \cdot M \cdot E_0)} + \underbrace{\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau}_{(A \cdot M \cdot K_0)}$$

Η η (πλήρης) απόκριση, υποδηλώνεται ως :

$$y(t) = C(t) \Phi(t, t_0) x(t_0) + C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau + D(t) u(t)$$

Θεώρημα (Πηχης Αξιοκραση):

$$\rightarrow x(t, t_0, x_0, u) = \phi(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \Rightarrow$$

$$y(t) = C \left[\exp A(t-t_0) \right] x_0 + C \int_{t_0}^t \left[\exp A(t-\tau) \right] B u(\tau) d\tau + D u(t)$$

Για Γραμμικά Χρονικά Ανεξάρτητα Συστήματα:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t)$$

$$\phi(t, t_0) = ?$$

$$\phi(t, t_0) = \exp [A(t-t_0)]$$

$$\circ \exp(At) \cong \mathbb{I}_n + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots$$

Identities:

$$\begin{cases} \exp(0) = \mathbb{I}_n \\ \exp(-At) = [\exp(At)]^{-1} \\ A \exp(At) = \exp(At) A \\ \frac{d}{dt} \exp(At) = A \exp(At) \end{cases}$$

$$H(t, \tau) = C \int_{t_0}^t \left[\exp A(t-\tau^*) \right] B \delta(\tau^* - \tau) d\tau^* + D \delta(t - \tau) \Rightarrow H(t, \tau) = \begin{cases} 0, & t \leq \tau \\ C \left[\exp A(t-\tau) \right] B, & t > \tau \end{cases}$$

↑
δεν υπάρχει t=τ

Μίντρα Συστ. Μεταφ.

$$H(s) = \mathcal{L} \left\{ C \int_{t_0}^t \left[\exp A(t-\tau) \right] \right\} = C \mathcal{L} \left\{ \exp(At) \right\} B + D$$

τελικά, $H(s) = C(s\mathbb{I} - A)^{-1} B + D$

Υπολογισμός Μίντρας Διατάξεως

Έχει: $\dot{\phi}(t, t_0) = A(t) \phi(t, t_0)$, με $\phi(t_0, t_0) = \mathbb{I}_n$ { $\psi(t) \equiv$ μετασχηματισμός μίντρα $\mathbb{I}_n$
 για να λύσει τις Δ.Ε. (συμπ. αλγ.)

Χρον. Μεταβλητότητα (PAP⁻¹) δίνεται (δεν γίνεται πάντα!!)

$$1. \phi(t, t_0) = \psi(t) \psi^{-1}(t_0) \quad \left(\psi(t) = A(t) \psi(t) \right)$$

$$2. \text{αν } A(t) \text{ } \ni \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \rightarrow \text{αριμεταθετός} \Rightarrow \phi(t, t_0) = \exp \left[\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right]$$

Πράγματι, $\phi(t_0, t_0) = \exp \left[\int_{t_0}^{t_0} A(\tau) d\tau \right] = \mathbb{I}_n$ ($\equiv A, B, : AB = -BA$
 $AB + BA = 0$)

$$\Rightarrow \phi(t, t_0) = \frac{\partial}{\partial t} \exp \left[\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right] = \exp \left[\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right] \frac{\partial}{\partial t} \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau =$$

$$= \exp \left[\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right] A(t) \quad (\text{αριμεταθετικός}) \Rightarrow$$

$$\dot{\phi}(t, t_0) = A(t) \exp \left[\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right] = A(t) \phi(t, t_0)$$

Γράφοντας,

$$A(t) = \begin{bmatrix} 2 & e^{-t} \\ -e^{-t} & 2 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε: $\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau = \begin{bmatrix} 2(t-t_0) & -(e^{-t} - e^{-t_0}) \\ e^{-t} - e^{-t_0} & 2(t-t_0) \end{bmatrix}$

Όμως $A(t) \ni \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \equiv \text{αριμεταθετός} \quad \forall t \in (-\infty, +\infty)$

$$\Rightarrow \Gamma(t, t_0) = \exp \begin{bmatrix} 2(t-t_0) & -(e^{-t} - e^{-t_0}) \\ e^{-t} - e^{-t_0} & 2(t-t_0) \end{bmatrix}$$

όμως $A(t) \ni \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \equiv \text{αριθμητικός} \quad \forall t \in (-\infty, +\infty)$

$$\Rightarrow \phi(t, t_0) = \exp \begin{bmatrix} 2(t-t_0) & -(e^{-t} - e^{t_0}) \\ e^{-t} - e^{t_0} & 2(t-t_0) \end{bmatrix}$$

Χρόνια Αμετάβλητα Συστήματα

Από $\phi(t, t_0) = \exp[A(t-t_0)] \leftarrow \text{"υπολογισμός άμεσων ριζών"}$

$\Rightarrow$ υπολογισμός ως $\exp(At)$

- αν $A = \text{δωδιαγώνια}$: $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ 0 & & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{x_i^*(t) = \alpha_{ii} x_i, \quad i=1, \dots, n}$

$$\Rightarrow x_i(t, t_0, x_{0i}) = e^{\alpha_{ii}(t-t_0)} x_{0i}, \quad i=1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \exp(At) = \begin{bmatrix} e^{\alpha_{11}t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\alpha_{nn}t} \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}_1(t) = \alpha_{11} x_1$$

↑
"αποσυνδεδεμένο"

- αν $A \neq \text{δωδιαγώνια}$

$$1. \quad \mathcal{L}\{\exp(At)\} = (s\mathbb{I} - A)^{-1} \Rightarrow \boxed{\exp(At) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbb{I} - A)^{-1}\}}$$

2. Θεώρημα Cayley - Hamilton (επαγωγή)

Θεώρημα Cayley-Hamilton

Κάθε τετραγωνικός πίνακας ικανοποιεί την χαρακτηριστική του εξίσωση:

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad P(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{I} - A) \Rightarrow P(A) = 0$$

- Χρήση για τον υπολογισμό της συνάρτησης:
- $$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t^k}{k!} \right) A^k, \quad t \in (-\infty, \infty)$$
- γράφεται: $f(A) = e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t) A^i$
- $f(\lambda)$ πολυώνυμο $\beta_0, \beta_1, \dots$
 $f(A) = \beta_0 \mathbb{I} + \beta_1 A + \dots + \beta_{n-1} A^{n-1}$
 είτε: $f(\lambda) = p(\lambda)q(\lambda) + g(\lambda)$
 με $\deg g(\lambda) \leq n-1$
 ενώ $p(A) = 0 \Rightarrow f(A) = g(A)$

Υπολογισμός των $\alpha_i(t)$

έστω $\left\{ \begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda \mathbb{I} - A) = \prod_{i=1}^p (\lambda_i - \lambda)^{m_i} \quad (m_i \text{ null/zerοes}) \\ f(\lambda), g(\lambda) &= \text{αυθαίρετες συναρτήσεις} \end{aligned} \right.$

άν $f^{(l)}(\lambda_i) = g^{(l)}(\lambda_i), \quad l=0, \dots, m_i-1$
 $i=1, \dots, p$

με $f^{(l)}(\lambda_i) = \left. \frac{d^l}{d\lambda^l} f(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_i}$

$$\left. \begin{aligned} &\text{με } f^{(l)}(\lambda_i) = \frac{d^l}{d\lambda^l} f(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_i} \\ &\text{και } \sum_{i=1}^p m_i = n \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(A) = g(A)$$

Παράδειγμα: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(A) = e^{At}$

$f(\lambda) = e^{\lambda t}$
 $g(\lambda) = \alpha_1 \lambda + \alpha_0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
 $m_1 = 2$

Άρα, αν $f^{(l)}(\lambda_i) = g^{(l)}(\lambda_i) \Rightarrow \left. \begin{aligned} f(\lambda_1) &= g(\lambda_1) = 1 \\ f^{(1)}(\lambda_1) &= g^{(1)}(\lambda_1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_0 = 1$

$\alpha_1 = t$

Άρα, $e^{At} = f(A) = g(A) = \alpha_1 A + \alpha_0 \mathbb{I}$

$$= \begin{pmatrix} -\alpha_1 + \alpha_0 & \alpha_0 \\ -\alpha_1 & \alpha_1 + \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}$$

Πιο συγκεκριμένα: Παράδειγμα 2: Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

τότε η Χ.Ε. των A : $P(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{I} - A)$ και ισχύει $P(A) = 0$ (Cayley-Hamilton)

$$\text{αυτό σημαίνει ότι: } P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 \Rightarrow P(A) = A^2 + 3A + 2\mathbb{I} = [0]$$

Εφαρμογή για τον υπολογισμό του e^{At}

ισχύει: $F(\lambda) = Q(\lambda)P(\lambda) + R(\lambda)$ (Διαίρεση πολυωνύμων)

$$\text{και επειδή } P(A) = 0 \Rightarrow \boxed{F(A) = R(\lambda)}$$

όμως $R(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \dots + \alpha_{n-1} \lambda^{(n-1)} \Rightarrow \forall \text{ ρίζα } \lambda_i \text{ της Χ.Ε. ισχύει:}$

$$F(\lambda_i) = R(\lambda_i)$$

Τότε, στο παράδειγμά μας: $n=2 \Rightarrow R(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$

$$\alpha_0 A A, \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2$$

$$\Rightarrow F(\lambda_1) = R(\lambda_1) \Rightarrow e^{\lambda_1 t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 \Rightarrow e^{-t} = \alpha_0 - \alpha_1$$

$$F(\lambda_2) = R(\lambda_2) \Rightarrow e^{\lambda_2 t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2 \Rightarrow e^{-2t} = \alpha_0 - 2\alpha_1$$

$$\text{άρα, } \boxed{\begin{aligned} \alpha_0 &= 2e^{-t} - e^{-2t} \\ \alpha_1 &= e^{-t} - e^{-2t} \end{aligned}}$$

$$\text{Τέλος, } F(A) = e^{At} = \alpha_0 \mathbb{I} + \alpha_1 A = \dots$$

Κατάστατικές εξισώσεις Διακριτού Χρονου

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)$$

$$y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k)$$

ο Απόκριση Μωδώνικως Εξόδου

$$u(k) = 0 \quad \text{π.ο.} \quad x(k+1) = A(k)x(k)$$

$$y(k) = C(k)x(k)$$

$$x(k_0+1) = A(k_0)x(k_0)$$

$$x(k_0+2) = A(k_0+1)x(k_0+1) = A(k_0+1) [A(k_0)x(k_0)] = \dots$$

$$\Rightarrow x(k) = [A(k-1)A(k-2) \dots A(k_0+1)A(k_0)]x(k_0)$$

$$\begin{aligned} x(k_0+2) &= A(k_0+1)x(k_0+1) = A(k_0+1)A(k_0)x(k_0) \\ \Rightarrow x(k) &= [A(k-1)A(k-2)\dots A(k_0+1)A(k_0)]x(k_0) \\ \text{ορίζουμε: } \phi(k, k_0) &= \begin{cases} A(k-1)\dots A(k_0), & k > k_0 \\ \mathbb{I}_n, & k = k_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Λόγος:

$$x(k+1) = \phi(k, k_0)x_0, \quad y(k) = C(k)\phi(k, k_0)x_0$$

Σωστός:

$$\phi(k+1, k_0) = A(k)\phi(k, k_0)$$

$$\phi(k_2, k_0) = \phi(k_2, k_1)\phi(k_1, k_0)$$

Αν $(\Sigma) \times A_0$:

$$\boxed{\phi(k, k_0) = A^{k-k_0}}$$

$$\Rightarrow y(k) = CA^{k-k_0}x_0$$

Ακόμα, ισχύει:

$$1. \phi(k, k) = \mathbb{I}_n$$

$$2. \phi(k+1, k_0) = A(k)\phi(k, k_0)$$

Παράδειγμα:

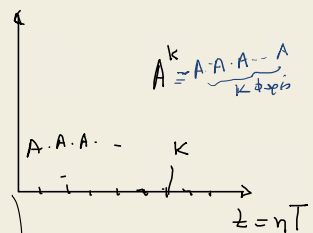
$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} x(k) + 2u(k)$$

Επειδή $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = 7\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

γιατί: $A^{2k-1} = 7^k A$

$$A^{2k} = 7^k \mathbb{I}_2, \quad k=0,1,2,\dots$$



$$Α_2, \quad \phi(k_2, k_1) = A^{k_2-k_1} = \begin{cases} 7^{k_2-k_1} A, & k_2-k_1 \text{ περιος} \\ 7^{k_2-k_1} \mathbb{I} & \text{--''-- άρτιος} \end{cases}$$

Πήχης Ανάλυση:

$$\begin{aligned} x(k_0+1) &= A(k_0)x(k_0) + B(k_0)u(k_0), \quad y(k_0) = \dots \\ &= \phi(k_0+1, k_0)x_0 + \phi(k_0+1, k_0+1)B(k_0)u(k_0) \end{aligned}$$

$$x(k_0+1) = A(k_0)x(k_0) + B(k_0)u(k_0) \quad , \quad y(k_0) = \dots$$

$$= \Phi(k_0+1, k_0)x_0 + \Phi(k_0+1, k_0+1)B(k_0)u(k_0)$$

$$x(k_0+2) = A(k_0+1)x(k_0+1) + B(k_0+1)u(k_0+1) =$$

$$= \Phi(k_0+2, k_0)x_0 + \Phi(k_0+2, k_0+1)B(k_0)u(k_0) + \Phi(k_0+2, k_0+2)B(k_0+1)u(k_0+1)$$

$$\vdots$$

$$\boxed{x(k) = \Phi(k, k_0)x_0 + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi(k, j+1)B(j)u(j)} \quad \text{χρον μεταβολ.$$

αφ' ου, απόκριση :

$$y(k) = C(k)\Phi(k, k_0)x_0 + C(k)\sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi(k, j+1)B(j)u(j) + D(k)u(k)$$

- Οδηγ. (Z) = X.A. : $\boxed{\Phi(k, k_0) = A^{k-k_0}}$

$$y(k) = CA^{k-k_0}x_0 + C\sum_{j=k_0}^{k-1} A^{k-j-1}Bu(j) + Du(k)$$

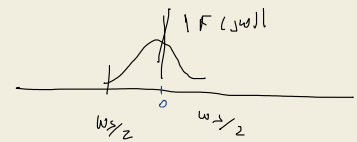
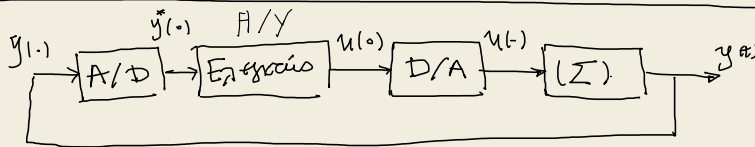
$\forall k > k_0$

Υπολογισμός Μήτρας Κραδευτικών Αποκρίσεων

$$H(k-k^*) = C\sum_{j=k_0}^{k-k^*-1} A^{k-j-1}Bu(j) + D\delta(k-k^*)$$

$$\Rightarrow \boxed{H(k-k^*) = CA^{k-k^*-1}B + D\delta(k-k^*)}$$

Μετασχηματ. Κ.Ε. συνεχούς χρόνου σε Κ.Ε. διακριτού χρόνου



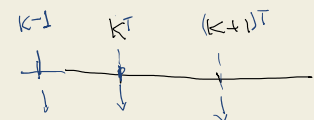
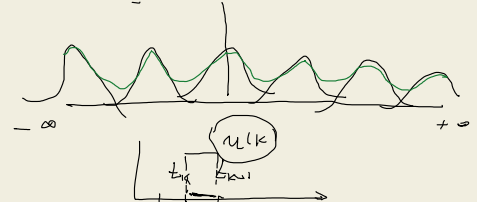
Εξω (Z) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

Θ $u(t) = u(k) \quad \forall t_k < t < t_{k+1}$

$$\Rightarrow \underline{x(t)} = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau) d\tau$$

$$= \Phi(t, t_0)x(t_0) + u(kT) \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau) d\tau$$



αλλαγή μεταβλητών: $\left. \begin{aligned} t_0 &= kT \\ t &= (k+1)T \end{aligned} \right\} \Rightarrow$

$$\rightarrow x[(k+1)T] = \Phi[(k+1)T, kT]x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T, \tau]B(\tau)u(kT) d\tau$$

$$\rightarrow \underline{x(k+1)} = \underline{\Phi(k+1, k)} \underline{x(k)} + \underline{\Theta(k+1, k)} \underline{u(k)}$$

$$\Theta(k+1, k) = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi(k+1, \tau)B(\tau) d\tau$$

$\forall k \in \mathbb{Z} : x(k+1) = A(k+1)x(k) + B(k+1)u(k) \quad kT < t < (k+1)T$

$$\rightarrow x(k+1) = \phi(k+1, k) x(k) + \theta(k+1, k) u(k), \quad \theta(k+1, k) = \int_k^{k+1} \phi(k+1, \tau) B(\tau) d\tau$$

$$k.e. \delta x: x(k+1) = A(k) x(k) + B(k) u(k) \quad kT \leq t \leq (k+1)T$$

- Γ. X. A.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du \Rightarrow ?$$

$$x(t) = e^{At} x(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau, \quad u(\tau) = u(kT), \quad kT \leq t \leq (k+1)T$$

$$\rightarrow x(kT) = e^{AkT} x(0) + e^{AkT} \int_0^{kT} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau$$

$$\begin{bmatrix} x(k+1) = \phi(T) x(k) + \theta(T) u(k) \end{bmatrix} \rightarrow \Pi, k.e. \delta \lambda \kappa \rho \alpha \tau \omega \chi \rho \acute{o} \nu$$

$$\Rightarrow \phi(T) = e^{AT}, \quad \theta(T) = \left(\int_0^T e^{A\lambda} d\lambda \right) B$$

Παράδειγμα:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix} x(t) + 3 u(t)$$

$$x(k+1) = \phi(T) x(k) + \theta(T) u(k)$$

$$\exp \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} T \right] = \begin{bmatrix} 3e^{-2T} - 2e^{-3T} & e^{-2T} - e^{-3T} \\ 6e^{-3T} - 6e^{-2T} & 3e^{-3T} - e^{-2T} \end{bmatrix} \equiv \phi(T) \equiv A(k)$$

$$\theta(T) = \int_0^T \exp \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} \tau \right] d\tau B = 3 \begin{bmatrix} e^{-3T} - 3e^{-2T} + 2 & \\ 6e^{-2T} - 4e^{-3T} - 2 & \end{bmatrix} \equiv B(k)$$

$$C(k) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D(k) = 3$$

Σημείωση: Υπολογισμός ως $\phi(k+1, k)$ για Δискретное Συστήμα

- Γενική περίπτωση (Χρ. Μεταβολή) $\rightarrow$ όπως στα Συνεχούς Χρόνου

- Γ. X. A. : $\phi(k+1, k) = \phi(kT) = A^k$

$$\text{Γενικά } \phi(k+1, k) = \phi(T) = e^{AT} = 1 + AT + \frac{A^2 T^2}{2!} + \dots$$

$$\rightarrow \phi(T) = Z^{-1} \{ z(zI - A)^{-1} \}$$

Προσοχή: $\phi(NT) = \underbrace{\phi(T) \dots \phi(T)}_{N \text{ φορές}} = \phi^N(T)$

$$\phi(NT) \neq \phi(t)|_{t=NT}$$

Χρήση Θ. Cayley-Hamilton - Παράδειγμα

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} x(k)$$

$$|zI - A| = 0 \Rightarrow \zeta_1 = -2$$

$$D(z) \equiv \text{ως πολυώνυμο} = z^2 + 5z + 6$$

$$2(kn) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} 2(kn)$$

$$|\lambda \mathbb{I} - A| = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases} \quad \mathcal{D}(A) \equiv \text{sub spaces, } = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(\lambda_1) = \lambda_1^k = (-2)^k = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 = \alpha_0 - 2\alpha_1 \\ F(\lambda_2) = \lambda_2^k = (-3)^k = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2 = \alpha_0 - 3\alpha_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\alpha_0 = 3(-2)^k - 2(-3)^k$$

$$\alpha_1 = (-2)^k - (-3)^k$$

$$A_{\mathcal{D}A}, F(A) = A^k = \alpha_0 \mathbb{I} + \alpha_1 A = \dots$$