~ "μονάδα ελέγχου"
Κατηγορίες προβλημάτων :

Πρόβλημα Ρύθμισης (κατάστασης – εξόδου)

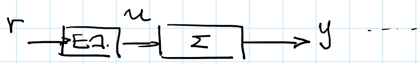
Δοθείσης x_e (διαν. καταστάσεως), να προσδιοριστεί νόμος ελέγχου u : στην "κανονική" λειτουργία $x(t) = x_e$ και για την αντιμετώπιση εξωτερικών διαταραχών : x_e = ευσταθές

ή Δοθείσης x_e : να προσδιοριστεί u : το σύστημα κλειστού βρόχου να έχει την κατάσταση x_e ≡ ευσταθή κατάσταση ισορροπίας
("σταθεροποίηση")

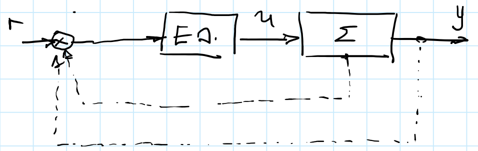
Πρόβλημα Παρακολούθησης (ρύθμιση της εξόδου)

Δοθείσης τροχιάς $x^*(t)$, να προσδιοριστεί νόμος ελέγχου : στην "κανονική" λειτουργία του συστήματος $x(t) \equiv x^*(t)$, όταν παρουσιάζονται εξωτ. διαταραχές ή $x^*(t)$ να είναι ευσταθής

- Ελεγχος Ανοικτού Βρόχου



- —"— Κλειστού —"— ~ Ελεγχος με ανατροφοδότηση κατάστασης (εξόδου)



∘ ανοικτός βρόχος : { x_0 , γνωστό με ακρίβεια
(A, B) "πρότυπο —"— }

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΡΥΘΜΙΣΗΣ (Γ. Χ. Α.)

νόμος ελέγχου $u = u(x, x_e)$

"ρύθμιση" ≡ x_e = κατάσταση ισορροπίας

$$\Rightarrow A x_e + B\, u(x, x_e) = \emptyset$$

$$\Rightarrow \boxed{A x_e + B u_e = \emptyset}$$ αναγκαία συνθήκη

όταν ∃ λύση u_e : ↗ ⇓

δεν έχει πάντα λύση

Παράδειγμα :

$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, έστω $x_e = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u_e = -\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} u_e = -2 \\ u_e = +2 \end{matrix}$$ να ισχύουν ταυτόχρονα

⇒ ΑΔΥΝΑΤΟ

Πότε υπάρχει λύση ;

- Πότε υπάρχει λύση ;

α) $m = n$: $\exists$ πάντα λύση : Άν $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det B \neq \phi$ $\Rightarrow$ $\boxed{u_e = -B^{-1} A x_e}$

β) $m > n$: —//— $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $(m > n)$, $\operatorname{rank} B = n$

$\Rightarrow$ $\boxed{u_e = -B^T (BB^T)^{-1} A x_e}$

γ) $m < n$: Γενικά : εξαρτάται από τό συγκεκριμένο x_e

δ) Γιά κάποιο x_e, άν $\not\exists$ u_e ... ? $\Rightarrow$ $Ax_e + Bu_e \neq \phi$

$\not\exists$ $u(x, x_e)$: $x_e \equiv$ Σ.(ασυμπτωτικώς) Ισορροπίας

τότε, γιά τόν νόμο $u(x, x_e)$ ισορροπεί σέ κάποιο $x^* \neq x_e$

μέ x^* : $Ax^* + Bu(x^*, x^*) = \phi$

Τελικά, τό σύστημα ισορροπεί στό x^* : ("τό πλησιέστερο" x^* στό x_e)

- Έστω $\exists$ u_e : τό x_e = Σ.Ι. τοῦ συστήματος $\Rightarrow$ $Ax_e + Bu_e = \phi$

ο νόμος ελέγχου : $\boxed{u = \underbrace{u_e} + \Delta u(x)}$ γιά νά καθιστά τήν $x_e \to$ Σ.Ι.

πρέπει : $Ax_e + B\,u(x_e) = Ax_e + B(u_e + \Delta u(x_e)) = \phi$

$\Rightarrow$ $\boxed{\Delta u(x_e) = \phi}$

Άρα, ο νόμος ελέγχου γιά ρύθμιση είναι : $\boxed{u(x) = u_e + \Delta u(x)}$

- Δύο υπο-προβλήματα :

- Προσδιορισμός $u(x)$:

1. προσδιορισμός u_e, x_e : $Ax_e + Bu_e = 0$

$\hookrightarrow$ "έλεγχος ανοικτοῦ βρόχου"
$\equiv$ καθιστά τό $x_e \equiv$ Σ.Ι.

2. προσδιορισμός $\Delta u(x)$: $\Delta u(x_e) = \phi$, ① τό x_e σάν Σ.Ι. $\equiv$ ευσταθές

Παράδειγμα :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u$$

Άν, $u(x) = u_e + \Delta u(x)$

- ? x_e τά οποία γίνονται Σ.Ι. τοῦ συστήματος, δηλαδή, $\exists$ u_e :

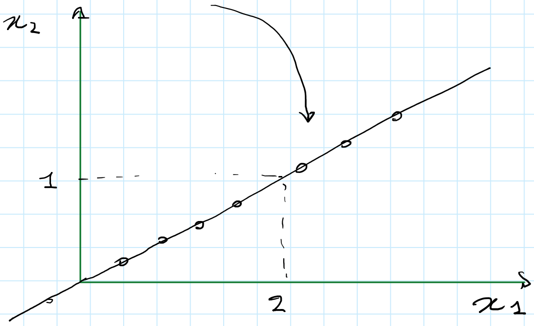
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{e1} \\ x_{e2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u_e = \phi \quad \Rightarrow$$

- • x_e τα οποία γίνονται Σ.Ι. του συστήματος, δηλαδή, ∃ u_e:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{e1} \\ x_{e2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u_e = \emptyset \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_{e2} + u_e = 0 \\ 8x_{e1} - 2x_{e2} + 2u_e = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 8x_{e1} - 4x_{e2} = 0$$



Άρα, μόνο οι καταστάσεις $x_e = \begin{pmatrix} x_{e1} \\ x_{e2} \end{pmatrix}$ πού βρίσκονται πάνω στην συγκεκριμένη ευθεία μπορούν να γίνουν καταστάσεις ισορροπίας.

Έλεγχος Ισοσταθμών

u_e, $\Rightarrow$ προσδιορισμός $\Delta u(x) \approx \Delta u(x) = Kx + r$

επειδή $\Delta u(x_e) = 0 \Rightarrow Kx_e + r = 0 \Rightarrow r = -Kx_e$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta u(x) = K(x - x_e)}$$

Άρα, νόμος ελέγχου ρύθμισης: $\boxed{u = u_e + K(x - x_e)}$

Τότε το σύστημα κλειστού βρόχου:

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\left(u_e + K(x(t) - x_e)\right)$$

Έστω: $z(t) \overset{\text{ορ.}}{=} x(t) - x_e$ ("απόκλιση" - σφάλμα)

ικανοποιεί: $\dot{z}(t) = A\,z(t) + Ax_e + B(u_e + K z(t)) =$

$$= (A + BK)\,z(t) + (Ax_e + Bu_e)$$

$$\Rightarrow \dot{z}(t) = (A + BK)\,z(t)$$

Χρησιμοποιώντας τον $u = u_e + K(x - x_e)$ να $\dot{z}(t) = (A+BK)\,z(t) \equiv$ <u>Α.Σ.</u>

δηλαδή, να προσδιορίσω το K: οι ιδιοτιμές του πίνακα $(A+BK)$ ....

Πρακτική Εφαρμογή: (Πώς εφαρμόζω ο συγκεκριμένος νόμος ελέγχου)

έχω $u = u_e + K(x - x_e)$

- Στήν "κανονική" λειτουργία (μόνιμη κατάσταση), τό σύστημα βρίσκεται στήν $x_e \equiv x(t) \Rightarrow u(t) = u_e + K(x_e - x_e) = u_e$

  ἄρα $u(t) \equiv u_e$

- Ἄν λόγω κάποιας (στιγμιαίας) διαταραχῆς $x(t) \neq x_e$

  $\Rightarrow$ ἐφαρμόζεται ὁ ὅρος $K(x(t) - x_e)$ ~ ἐπαναφέρει τό σύστημα στό x_e ($x(t) = x_e$)

Παρατήρηση: u_e, K ≈ ἄγνωστα, ὅμως μποροῦν νά υπολογισθοῦν ανεξάρτητα

u_e ↓ ἐλεγκτής ανοικτού βρόχου

K ↓ κέρδος κλειστού βρόχου

- ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΜΕ ΑΝΑΔΡΑΣΗ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

ἡ ισορροπία τοῦ συστήματος

$$\dot{z}(t) = (A + BK)\, z(t) \quad (\sim z(t) \overset{\text{ορ}}{=} x(t) - x_e)$$

νά εἶναι ἀσυμπτωτικά ευσταθής

ἄρα, Νά υπολογισθεῖ ὁ πίνακας K : $(A + BK) \equiv$ A.S.

≈ ιδιοτιμές $A + BK$: $Re[\lambda_i(A+BK)] < 0$

Λύση: 1. Ὕπαρξη λύσης

2. Υπολογισμός λύσης

Θεώρημα:

Δοθέντος $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\exists\, K \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

(ἄν συμβολίσουμε $\Lambda \overset{\text{ορ}}{=} \{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n\} \in \mathbb{C}$ (αυτο-συζυγές))

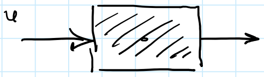
$\lambda_i(A + BK) \equiv \Lambda$ (αυθαίρετο)

$\Longleftrightarrow$ $(A, B) \equiv$ πλήρως ελέγξιμο (από-την-αρχή) = (προσιτό)

Σημείωση: οἱ ιδιοτιμές δέν ἀλλάζουν "φυσικά", ἀλλά $u = u_e + K(x - x_e)$ παράγει $u(t)$: σύστημα νά συμπεριφέρεται σάν νά εἶχε τίς νέες ιδιοτιμές

u

παράγει $u(t)$: σύστημα να συμπεριφέρεται σαν να είχε τις νέες ιδιοτιμές



Πρόταση: Οι μη-ελέγξιμες ιδιοτιμές του (A,B) δεν επηρεάζονται από την ανάδραση

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{μη (πλήρως) ελέγξιμο}$$

→ ειδική μορφή μη-ελέγξιμων συστημάτων:

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{c|c} -2 & 1 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right), \quad \hat{B} = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \end{array}\right)$$

η ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2 \equiv$ ελέγξιμη

—"— $\lambda_2 = -1 \equiv$ μη-ελέγξιμη

αν $K = [k_1 \;\; k_2] \Rightarrow$

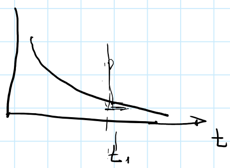
$$\det(s\mathbb{1} - A - BK) = \det\begin{bmatrix} s-k_1 & 2-k_2 \\ -1-k_1 & s+3-k_2 \end{bmatrix} =$$

$$= s^2 + s(-k_1 - k_2 + 3) + (-k_1 - k_2 + 2)$$

$$= \underbrace{(s+1)}_{\text{δεν επηρεάζεται από } K}\big(s - \underbrace{(-k_1 - k_2 + 2)}_{\text{μπορεί να αλλάξει}}\big)$$

Ιδέα: μη-ελέγξιμο $\wedge$ έστω η επίδραση των μη-ελέγξιμων ιδιοτιμών $\to 0$

δηλαδή, $e^{\lambda_i t} x(0) \to 0$



Ορισμός (πρακτικός):

Το σύστημα $(A,B) \equiv$ σταθεροποιήσιμο αν οι μη-ελέγξιμες ιδιοτιμές είναι ευσταθείς

□ Πώς επηρεάζει ο νόμος $u = Fx + r \equiv (u_e + K(x - [illegible]))$ την ελεγξιμότητα/παρατηρ.

" Έχουμε:

$$\begin{pmatrix} s\mathbb{1} - (A+BF) & B \\ & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\mathbb{1} - A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ -F & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

"Έχουμε:

$$\begin{pmatrix} s\mathbb{1} - (A+BF) & B \\ -(C+DF) & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\mathbb{1} - A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \emptyset \\ -F & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

(σύστ. κλειστού βρόχου)

Τότε, $\text{τάξη}(\lambda\mathbb{1} - (A+BF), B) = \text{τάξη}[\lambda\mathbb{1} - A, B]$

□ $\boxed{\text{Αν } (A,B) \text{ ελέγξιμο} \Rightarrow (A+BF, B) \equiv \text{ελέγξιμο}, \ \forall F}$

άρα, □ οι υπόχωροι ελεγξιμότητας των (A,B) και $(A+BF, B) \equiv$ ίδιοι

□ Όμως, η παρατηρησιμότητα επηρεάζεται από την ανάδραση :

διότι : η παρατηρησιμότητα του συστήματος κλειστού βρόχου εξαρτάται από τις μήτρες :

$(A+BF)$ και $(C+DF)$ $\Rightarrow$ η συγκεκριμένη μήτρα F (για την ικανοποίηση των προδιαγραφών του ελέγχου μπορεί να κάνει κάποιες ιδιοτιμές μη-παρατηρήσιμες!

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ

1. Ύπαρξη Λύσης Προβλήματος Τοποθέτησης Ιδιοτιμών

∘ πότε υπάρχει μία κατάλληλη μήτρα K;

<u>Ορισμός</u> : (A,B) σταθεροποιήσιμο, αν $\exists\, K : \mathrm{Re}[\lambda_i(A+BK)] < 0$

$$\left(\text{με } \lambda_i : |\lambda\mathbb{1} - A - BK| = \emptyset\right)$$

Θεώρημα : (Ικανή + Αναγκαία Συνθήκη)

(A,B) σταθεροποιήσιμο $\Longleftrightarrow$ $v^T B \neq \emptyset$ για κάθε v^T αρισ. ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε κάποια ασταθή ιδιοτιμή

Άρα : οι ασταθείς ιδιοτιμές $\equiv$ ελέγξιμες

Μη-ελέγξιμη ιδιοτιμή : για v^T : $v^T B = \emptyset$

Θεώρημα : $\exists\, K : \lambda_i(A+BK) \equiv \Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n\} \in \mathbb{C}$

$\Longleftrightarrow$ <u>(A,B) σταθεροποιήσιμο</u>

2. ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ (εύρεση μήτρας F)

□ Πλήρης Ελεγξιμότητα – Συστήματα με μία Είσοδο ($m=1$)

1. Απ' ευθείας Μέθοδος: Να βρεθεί η μήτρα F:

$$F = [f_{ij}] \quad , \quad i = 1, \dots m, \quad j = 1, \dots n$$

Έστω το χαρακτ. πολυώνυμο του συστ. κλειστού βρόχου:

$$\det(s\mathbb{I} - (A+BF)) = s^n + g_{n-1}(f_{ij})\, s^{n-1} + \dots + g_0(f_{ij}) \quad (\text{χ.π. κλειστού βρ.})$$

και έστω: επιθυμητό χ.π.: $\alpha_d(s) = s^n + d_{n-1} s^{n-1} + \dots + d_0 \Rightarrow$ ρίζες $= \lambda_i \in \Lambda$

Άρα,
$$\boxed{g_k(f_{ij}) = d_k \quad , \quad k = 0, 1, \dots n-1}$$

≈ μη γραμμικό σύστημα αλγ. εξισώσεων για να βρούμε f_{ij}

Όμως, όταν $\boxed{m=1}$ ⇒ σύστημα γραμμικό

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(s\mathbb{I} - A) = s\left(s - \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = +\frac{5}{2}$$

Να βρεθεί F: $\hat{\lambda}_{1,2} = -1 \pm j$

Λύση: **1. Ύπαρξη λύσης** αν υπολογισμός μήτρας ελεγξιμότητας ⇒ (A, B) ελέγξιμο πλήρως

2. Υπολογισμός μήτρας F:

$$F = [f_1 \ \ f_2] \Rightarrow \det(s\mathbb{I} - A - BF) = \det\left(\begin{bmatrix} s-1/2 & -1 \\ -1 & s-2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}[f_1, f_2]\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} s - 1/2 - f_1 & -1 - f_2 \\ -1 - f_1 & s - 2 - f_2 \end{pmatrix} =$$

$$= s^2 + s\left(-5/2 - f_1 - f_2\right) + \left(f_1 - 1/2 f_2\right)$$

(θέλουμε:) $\equiv s^2 + 2s + 2$ (χ.π.: $\hat{\lambda}_{1,2}$)

Άρα,
$$\left.\begin{aligned} -5/2 - f_1 - f_2 &= 2 \\ f_1 - 1/2 f_2 &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f_1 = -\frac{1}{6}, \quad f_2 = -\frac{13}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{F = \left[-\frac{1}{6}, \quad -\frac{13}{3}\right]}$$

$u = -Fx$

Πρακτική Χρησιμότητα: (Υπολογιστική δυσκολία)

μέχρι $n \leq 3, \quad m = 1$

2. Χρήση Ελέγξιμης Κανονικής Μορφής $(m = 1)$

Άν (A,B) ελέγξιμο $\iff \exists\ P:$ $\left.\begin{aligned} A_c &= PAP^{-1} \\ B_c &= BP \end{aligned}\right\} \rightarrow$ (ελέγξιμη κανονική μορφή)

- Ισχύει: ο $(A+BF)$ και ο πίνακας $P(A+BF)P^{-1} = PAP^{-1} + PBFP^{-1}$

$= A_c + B_c F_c$

(Γραμμ. Άλγεβρα) Έχουν ίδιες ιδιοτιμές.

πιο απλή μορφή (για πράξεις)

Άρα, Να βρεθεί $F_c : \lambda_i(A_c + B_c F_c) = \Lambda$

τότε $F = F_c P$

Για $F_c = [f_0\ f_1 \ldots f_{n-1}]$, $m=1$

άν $A_cF \overset{\Delta}{=} A_c + B_cF_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ & & & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [f_0, f_1 \ldots f_{n-1}]$

$\alpha_i \equiv$ συντ. χ.π. A_c

$\det(sI - A_c) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_0$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ & & & 1 \\ -(\alpha_0 - f_0) & -(\alpha_1 - f_1) & \cdots & -(\alpha_{n-1} - f_{n-1}) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \det(sI - A_cF) = s^n + (\alpha_{n-1} - f_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (\alpha_0 - f_0)$ (χ.π. κλειστού βρ. \ κανονική μορφή)

Αν χ.π. επιθυμητό κλειστού βρόχου:

$\alpha_d(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \cdots + d_0$ (ρίζες $\lambda_i \in \Lambda$)

$$\Rightarrow \boxed{f_i = \alpha_i - d_i, \quad i = 0, \ldots n-1}$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Να βρεθεί } F : \Lambda = \{-1 \pm j\}$$

(δηλ. $\alpha_d(s) = s^2 + 2s + 2$)

- Εύρεση της κανονικής μορφής ελεγξιμότητας:

$$\mathcal{C} = [B \;\; AB] = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{C}^{-1} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 3 & -3/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} q \\ qA \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα $A_c = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 5/2 \end{bmatrix}$,

$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

όμως $A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ (από $\alpha_d(s)$)

$\Rightarrow$ τελικά : $F_c = [-2 \;,\; -9/2]$

$$F = F_c P = [-2 \;\; -9/2]\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \left[-\frac{1}{6} \;,\; -\frac{13}{3}\right]$$

3. Τύπος Ackermann (Bass-Jura) (m=1)

$$\boxed{f^T = [W^T \mathcal{C}^T]^{-1}(\alpha - \hat{\alpha})}$$

όπου, $W = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_2 \\ 0 & 1 & \cdots & \alpha_3 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{C} = [b \;\; Ab \; \ldots \; A^{n-1}b], \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_n \\ \hat{\alpha}_{n-1} \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_1 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_n = 0$$

$$|\lambda I - A - bf^T| = 0 \Rightarrow \lambda^n + \hat{\alpha}_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \hat{\alpha}_n = 0$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{Να βρεθεί } f : \hat{\lambda}_1 = -1, \; \hat{\lambda}_2 = -2$$

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 + 1$$

$$|\lambda I - A - bf^T| = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

$$|\lambda \mathbb{I} - A| = \lambda^2 + 1$$

$$|\lambda \mathbb{I} - A - bf^T| = (\lambda+1)(\lambda+2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

(τ. Ackermann):

$$\Rightarrow \alpha = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix}\hat{\alpha}_1\\ \hat{\alpha}_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$$

$$f = [f_1 \ \ f_2]^T$$

$$\mathcal{C} = [b \ \ Ab] = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow W^T \mathcal{C}^T = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow (W^T \mathcal{C}^T)^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

Τελικά, $f^T = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\ -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\ -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_1\\ f_2\end{bmatrix}$

☐ Συστήματα Πολλών Εισόδων - Σταθεροποιησιμότητα

(κατασκευαστική μέθοδος)

Έστω $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n\} \in \mathbb{C}^-$ ("Επιθυμητές" ιδιοτιμές συσ. κλειστού βρ.)

Έστω

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lambda_i, \ i=1, \ldots q: & \lambda_i \neq \lambda_i(A) \\ \lambda_i, \ i=q+1, \ldots n: & \lambda_i = \lambda_i(A) \end{array}}$$

- Σχηματίζουμε τον πίνακα U:

$$U \triangleq [u_1, u_2 \ldots u_q \vdots \underbrace{u_{q+1} \ldots u_n}] \quad (n \times n)$$

- $u_i, \ i=q+1 \ldots n$ ≡ ιδιοδιάνυσμα της A αντιστοιχ. $\lambda_i = \lambda_i(A)$
- $u_i, \ i=1, \ldots q$ υπολογίζονται με τον τύπο:

$$\boxed{u_i = (\underbrace{\lambda_i \mathbb{I} - A}_{(n\times n)})^{-1} \underbrace{B}_{(n\times m)} \underbrace{v_i}_{(m\times 1)}, \quad i=1 \ldots q}$$

$$(\lambda_i \mathbb{I} - A) u_i = B v_i$$

$v_i \in \mathbb{R}^m$, τυχαία, μη-μηδενικά : u_i ≃ γραμμ. ανεξάρτητα

Άρα, U ≡ αντιστρέψιμη

- Σχηματίζουμε τον πίνακα V:

$$V \overset{\text{ορ.}}{=} [v_1, v_2, \ldots v_q \vdots \underbrace{v_{q+1} \ldots v_n}] \quad (m \times n), \quad v_i \in \mathbb{R}^m$$

$\emptyset$
μηδενικά διανύσματα

Θέτοντας, $\boxed{K = \underset{(m\times n)}{V}\ \underset{(n\times n)}{U^{-1}}}$ $(m\times n)$

τοποθετεί τις ιδιοτιμές του $A+BK \equiv \Lambda = \{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$

Απόδειξη:

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\forall \lambda_i : (A+BK)u_i = \lambda_i u_i$, $i=1,\dots n$

α) λ_i, $i=1,\dots q$

$$(A+BK)u_i = Au_i + BKu_i = Au_i + BV(U^{-1}u_i) \quad \left(\underbrace{U^{-1}\underline{\underline{u_i}} = e_i}, \ e_i = \begin{pmatrix} 0\\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - i \right)$$

$$= Au_i + BVe_i$$

$\downarrow$ i-στήλη U

$$= Au_i + Bv_i$$

$U^{-1}U = \mathbb{1}_n$

Αλλά $Au_i + Bv_i = \lambda_i u_i$, $i=1,\dots q$,

$\hookrightarrow u_i = (\lambda_i \mathbb{1} - A)^{-1}Bv_i$

$$\Rightarrow (A+BK)u_i = \lambda_i u_i, \quad i=1,\dots \underline{q}$$

β) λ_i, $i=q+1,\dots n$

$$(A+BK)u_i = Au_i + BKu_i = Au_i + BV(U^{-1}u_i) =$$

$$= Au_i + BVe_i$$

$$= Au_i + B\cancel{v_i}^{\,0}$$

$$= \lambda_i u_i$$

Παράδειγμα: Έστω το σύστημα:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \emptyset & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u$$

$$y = (\emptyset \ \ 2)x$$

Πρόβλημα: Να προσδιοριστεί νόμος ελέγχου για την ρύθμιση της εξόδου στο σημείο λειτουργίας $y_e = 2$

Λύση:

Θεωρούμε ένα νόμο ελέγχου της μορφής: $u(t) = u_e + K(x - x_e)$

$x_e \equiv$ κατάσταση ισορροπίας συσ. κλειστού βρόχου:

$(y_e = Cx_e)$ $\quad y_e = [\emptyset \ \ 2]\begin{pmatrix} x_{e_1} \\ x_{e_2} \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow y_e = 2x_{e_2} = 2 \Rightarrow \boxed{x_{e_2} = 1}$

Για να είναι το x_e = κατασ. ισορροπίας ελ. βρ. :

$$A x_e + B u_e = \emptyset$$

$$\begin{pmatrix} \emptyset & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{e1} \\ x_{e2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u_e = \emptyset = \begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix}$$

(ποιό x_e, u_e αντιστοιχεί στό $y_e = 2$?)

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_{e1} &= 0,5 \\ x_{e2} &= 1 \\ u_e &= -1 \end{aligned}} \qquad x_e = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boxed{u_e = -1}$$

– **Προσδιορισμός K** : συστ. κλειστού βρόχου $Re[\lambda_i(A+BK)] < \emptyset$

Ιδιοτιμές A: $\det(\lambda \mathbb{1} - A) = 0 \Rightarrow \det\left[\begin{pmatrix} \lambda & \emptyset \\ \emptyset & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}\right] = \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 8 & \lambda+2 \end{bmatrix}$

$$= \lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4$$

$$\lambda_2 = 2 \ (\equiv \text{ασταθής})$$

– **Μήτρα Ελεγξιμότητας** :

$$\text{τάξη}\,[B \ \ AB] = \text{τάξη}\begin{bmatrix} 1 & \vdots & 2 \\ 2 & \vdots & 4 \end{bmatrix} = 1 < n = 2$$

μη-(πλήρως) ελέγξιμο!

– **Εξετάζουμε αν (A, B) σταθεροποιήσιμο** :

Δηλαδή, άν $\lambda_2 = +2$ είναι ελέγξιμη :

Έστω $w_2 = [1 \ \ w_{22}]$ = αριστερό ιδιοδιάνυσμα A αντιστοιχεί λ_2

$$(w_2 A = \lambda_2 w_2)$$

$$\Rightarrow (1 \ \ w_{22})\begin{pmatrix} \emptyset & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} = 2\,(1 \ \ w_{22}) \Rightarrow \boxed{w_{22} = 0,25}$$

Άρα, $w_2 = [1 \ \ 0,25]$

Τελικά, $w_2 B = [1 \ \ 0,25]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1,5 \neq 0 \Rightarrow$ **λ_2 = ελέγξιμη**

μπορεί να αντικατασταθεί

Έστω $\lambda_2^* = -5$

– **Να προσδιορισθεί το K** : το σύστημα κλειστού βρ. $(A+BK)$ να $\Lambda = \{-4, -5\}$

Για $K = V U^{-1}$ με $V = [v_1 \ \ v_2]$

$$U = [u_1, \ u_2]$$

$v_1 = \emptyset$ (δεν αντικαθ. την $\lambda_1 = -4$)

$v_2 = 1$ (αυθαίρετα)

$v_2 = 1$ (αυθαίρετα)

$u_1 \equiv$ ιδιοδιάνυσμα A αντιστοιχεί $\lambda_1 = -4$ $\Big\}$ $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$u_2 = (\lambda_2^* \mathbb{1} - A)^{-1} B v_2$

$$\Rightarrow u_2 = \left[(-5)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}\right]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 1 =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Άρα, $U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/7 \\ -4 & -2/7 \end{pmatrix}$

$V = [0 \quad 1]$

Άρα, $K = VU^{-1} = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & -1/7 \\ -4 & -2/7 \end{bmatrix}^{-1} = \cdots = -\frac{7}{6}(4 \quad 1)$

Τελικά $K = -\frac{7}{6}[4 \quad 1]$

Τότε, $u = u_e + K(x - x_e) =$

$$= -1 - \frac{7}{6}[4 \quad 1]\begin{bmatrix} x_1 - 0,5 \\ x_2 - 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{u = 2,5 - \frac{14}{3}x_1 - \frac{7}{6}x_2}$$

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ

Πρόβλημα: να βρεθεί $u(x, x^*(t))$: $x^*(t)$ = τροχιά του συστ. κλειστού βρ. & ασυμπτωτικά ευσταθής

$$\Rightarrow \dot{x}^*(t) = Ax^*(t) + Bu[x^*(t), x^*(t)], \quad \forall t \geq 0$$

πρέπει: $\exists\ u^*(t) \equiv u(x^*(t), x^*(t))$:

$$\dot{x}^*(t) = Ax^*(t) + Bu^*(t)$$

Εφικτό μόνο άν $m \geq n$ & τάξη $B = n$ $\Rightarrow u^*(t) = -B^T(BB^T)^{-1}Ax^*(t)$

$m = n$ —"— $\Rightarrow u^*(t) = -B^{-1}Ax^*(t)$

$m=n$ $\Rightarrow u(t) = -B\ A\ x(t)$

Όταν $m<n$ δεν υπάρχει ακριβής λύση.

Αν επιλέξουμε: $u(x(t), x^*(t)) = K[x(t) - x^*(t)] + r(t)$

Ενεργοποιείται όταν $x(t) \neq x^*(t)$

Καθορίζει την τροχιά στην ομαλή λειτουργία

Ορίζουμε: $z(t) \triangleq x(t) - x^*(t)$ (απόκλιση - σφάλμα παρακολούθησης)

$\vdots$

$\dot{z}(t) = (A+BK)\, z(t)$ ~ $\exists ?\ K$: $z(t)$ φραγμένη

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}[\lambda_i(A+BK)] < 0$

$\Rightarrow$ Παρακολούθηση $\approx$ τοποθέτηση ιδιοτιμών