

Ελεγχος Γραμμικών Συστημάτων

Προδιορισμός / σχεδιασμός μιας "μονάδας ελέγχου"

Κατηγορίες προβλημάτων:

Πρόβλημα Ρύθμισης (κατάσταση / έξοδος)

Δοθείς x_e (δικη κατάσταση), να προσδιοριστεί νόμος ελέγχου u , ώστε συν "κανονική"

Διεύθυνση $x(t) = x_e$ και για την απελευθέρωση εξωτερικών διαταραχών:

$$x_e \equiv \text{Εύστατος Σ.Ι.}$$

ή Δοθείς x_e : να προσδιοριστεί u : το **Εύστατο Κλάσμα Βρόχου** να έχει την κατάσταση $x_e \equiv$ Εύστατη κατάσταση Ισορροπίας ("ελαστικότητα")

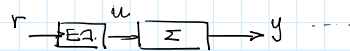
Πρόβλημα Παρακολούθησης (ρήση ως έξοδος)

(μον. κλάση)

Δοθείς τροχιά $x^*(t)$, να προσδιοριστεί νόμος ελέγχου ώστε συν "κανονική" ανταπόκριση των συστημάτων $x(t) \equiv x^*(t)$ και για παρασχεθέντες εξετ. διαταραχές ή $x^*(t)$ να είναι Εύστατος

1. Ανάλυση:

• Έλεγχος **Ανοικτού Βρόχου**



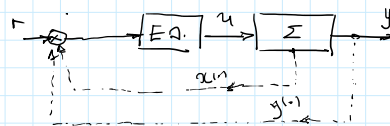
• -"-

Κλειστού

-"-

• Έλεγχος με **Ανταποδοτικότητα**

Κατάσταση



-"-

Έξοδος

• ανοικτός βρόχος: $\begin{cases} x_0, \text{ γνωστό με ακρίβεια} \\ (A, B) \text{ "πρότυπο"} \end{cases}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΡΥΘΜΙΣΗΣ (Γ, X, A, B)

Έστω, νόμος ελέγχου $u = u(x, x_e)$

(ρήση) "ρήση" x_e να είναι κατάσταση Ισορροπίας

$$\text{πρέπει: } Ax_e + Bu(x_e, x_e) = 0 \quad \text{με } u_e \equiv u(x_e, x_e)$$

$$\Rightarrow Ax_e + Bu_e = 0 \quad \text{ἀπαιτείται συνθήκη}$$

Άρα, για να $\exists$ λύση $\exists! u_e$: να ισχύει η ανωτέρω σχέση

• **Εάν "έχει νόημα" !!**

(ή ύπαρξη ενός u_e που να ικανοποιεί την σχέση ανωτ., εξαρτάται από την τιμή της εξωτερικής διαταραχής x_e)

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Έστω } x_e = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ Έστω } x_c = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} u_c = - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} u_c = -2 \\ u_c = +2 \end{matrix} \text{ v.l. } \begin{matrix} \text{ισχύουν ταυτόχρονα} \\ \Rightarrow \text{ΑΔΥΝΑΤΟ} \end{matrix}$$

- Πότε υπάρχει λύση;

α) $m = n$: $\exists$ πάντα λύση: $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det B \neq 0$

$$\Rightarrow u_c = -B^{-1}A x_c$$

β) $m > n$: $\dots$ $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $(m > n)$, $\text{rank } B = n$

$$\Rightarrow u_c = -B^T(BB^T)^{-1}A x_c$$

γ) $m < n$: Γενικά: $\exists$ λύση από το συγκεκριμένο x_c

δ) Για κάποιο x_c , $\nexists u_c \dots ? \Rightarrow A x_c + B u_c \neq 0$
 $\Rightarrow \nexists u(x, x_c) : x_c \equiv \Sigma$ (αυτονομία) Ισορροπία

Τότε, για τον νόμο $u(x, x_c)$, το εσωτερικό ισορροπεί σε κάποιο $x^* \neq x_c$
 $\mu \epsilon \quad x^* = A x^* + B u(x^*, x^*) = 0$

και τελικά, το εσωτερικό ισορροπεί στο x^* : ("είναι πασιφιστικό" x^* στο x_c)

□ Έστω $\exists u_c$: το $x_c \equiv \Sigma$ I. του εσωτερικού $\Rightarrow A x_c + B u_c = 0$

Αν, θεωρήσουμε σαν νόμο: $u = u_c + \Delta u(x)$ $\Rightarrow$ για να καθίσταται x_c καθεστ. ισορροπίας

$$\text{πρέπει: } A x_c + B u(x_c) = A x_c + B(u_c + \Delta u(x_c)) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta u(x_c) = 0$$

Αρα, τελικά, ο νόμος ελέγχου για ρύθμιση είναι: $u(x) = u_c + \Delta u(x)$

Αρα, δύο υπο-προβλήματα = (δύο βήματα)

- Προβλεπτικός $u(x)$:

1. Προβλεπτικός u_c, x_c : $A x_c + B u_c = 0$

$\hookrightarrow$ "έλεγχος απόλυτου βρόχου"
 $\equiv$ καθιστά το $x_c \equiv \Sigma$ I.

2. Προβλεπτικός $\Delta u(x)$: $\Delta u(x_c) = 0$, $\forall$ το x_c στο Σ I. $\equiv$ Εξιστάτος
 $\hookrightarrow$ "έλεγχος κλειστού βρόχου"

Παρατήρηση :

$$\ddot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u$$

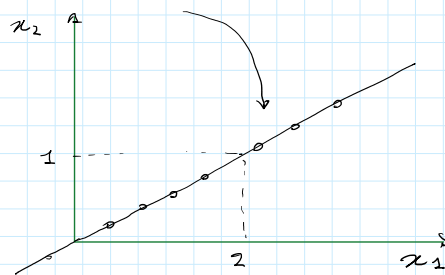
"Αν, $u(x) = u_e + \Delta u(x)$

- Ποιά είναι τα x_e τα οποία γίνονται Σ.Ι. τω συστήματος, δηλαδή, ∃ u_e :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{e1} \\ x_{e2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u_e = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_{e2} + u_e = 0 \\ 8x_{e1} - 2x_{e2} + 2u_e = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 8x_{e1} - 4x_{e2} = 0$$



Άρα, μόνο οι καταστάσεις $x_e = \begin{pmatrix} x_{e1} \\ x_{e2} \end{pmatrix}$ που βρίσκονται πάνω στην συγκεκριμένη ευθεία μπορούν να γίνουν καταστάσεις ισορροπίας.

ΕΛΕΓΧΟΣ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ

Από την γενική μορφή τω έλξης που προσπαθούμε να σχεδιάσουμε $u(x) = u_e + \Delta u(x)$, το u_e υπολογίζεται από τα ανωτέρω.

Για τον προσδιορισμό τω $\Delta u(x)$:

$$\begin{aligned} \text{Έστω } \Delta u(x) : \Delta u(x) &= Kx + r \\ \text{τότε } \Delta u(x_e) &= 0 \Rightarrow Kx_e + r = 0 \Rightarrow r = -Kx_e \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta u(x) = K(x - x_e)$$

Άρα, νόμος έλξης ρύθμισης :

$$u = u_e + K(x - x_e)$$

Τότε το σύστημα καθαρό βρόχου :

$$\ddot{x}(t) = A x(t) + B(u_e + K(x(t) - x_e))$$

Αν ορίσουμε $z(t) \stackrel{\text{op}}{=} x(t) - x_e$ ("απόκλιση" - σφάλμα) από την ισορροπία x_e ,

$$\begin{aligned} \text{θα έχουμε} : \ddot{z}(t) &= A z(t) + A x_e + B(u_e + K z(t)) = \\ &= (A + BK) z(t) + (A x_e + B u_e) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ddot{z}(t) = (A + BK) z(t)$$

Τότε, εάν νόμος έλξης $u = u_e + K(x - x_e)$, η μνερ K υπολογίζεται έτσι ώστε

η ισορροπία $z=0$ τω συστήματος $\ddot{z}(t) = (A + BK) z(t) \approx$ Ασυμμετρικά Έξωκενός

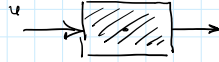
ή αλλιώς : να προσδιορίσω την K : οι ιδιοτιμές τω

η αλυσίδα : να προσδιορίσω τιν K : οι ιδιοτιμές τιν
 πίνακα $(A+BK)$ ---

- Αν λόγω κάποιων (εξωτερικών) διαταραχών $x(t) \neq x_c$ τότε ενεργεί ο έλεγχος $K(x(t) - x_c) \sim$ **Ενισχύει το σφάλμα στο x_c** ($x(t) \neq x_c$)

Σημείωση: οι βιοαπώτες δίνονται "φυσικά", όπου $u = u_e + k(x - x_e)$

negativ $U(t)$: δU negativ und δU positiv $\Rightarrow$ δU ist δU positiv



□ Τι συμβαίνει όταν οι συνθήκες του περιβάλλοντος, δεν ικανοποιούνται;

Παρατηρούμε τα εξής:

Πρόταση: Οι μ_n -έξοδος ω στο (A, B) δεν επιπλοποιείται από τον $\mathbb{Z}$ -αριθμό

Therapien:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{lin. (un)vars.} \in \text{Lsgs. Sys.}$$

(δυναμικότητα ζω)

$\rightarrow$ ԵՏՀԿԻ իրադրություններին - ՀԱԳՋԿԱՆ ԾՈՇԱԽԱՏԱՆ :

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in Worten $\lambda_1 = -2 \equiv \text{Eigenwert}$

--- $\rho_2 = -1 \equiv \mu_1 - \text{GA} \in \mathcal{F}_1 \mu_1$

$$\hat{\alpha}_V \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\det(s\mathbb{I} - A - BK) = \det \begin{bmatrix} s - k_1 & 2 - k_2 \\ -1 - k_1 & s + 3 - k_2 \end{bmatrix} =$$

$$= s^2 + s(-k_1 - k_2 + 3) + (-k_1 - k_2 + 2)$$

$$= (s+1)(s - (-k_1 - k_2 + 2))$$

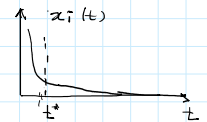
Sei $\mathcal{C}$ ein $\mathcal{C}$ -Komplex

ψυχοβίαι και αλκοόλ

Πόση: $\dim \omega(I) \equiv \mu\eta - \epsilon\gamma\epsilon\gamma\gamma\eta\sigma\tau\epsilon\sigma\ \Pi\eta\lambda\omega\varsigma$, και $\tau\epsilon\lambda\epsilon\sigma\tau\epsilon\sigma\ \eta\ \epsilon\pi\iota\delta\epsilon\alpha\sigma\eta\ \tau\omega\sigma\ \mu\eta - \epsilon\gamma\epsilon\gamma\gamma\eta\sigma\tau\epsilon\sigma\ \delta\iota\sigma\tau\epsilon\mu\alpha\tau\omega\varsigma \rightarrow \phi$

Surfact, $e^{2it} x(t) \rightarrow 0$

Τότε, μπορούμε να κάνουμε το (2) διαιρετικό ελαφρώς με διάσπαση κατάστασης (με την χρήση του κέρδους K)



Ορισμός (πραγματοκός):

Το σύνολο $(A, B) = \text{ισομορφισμοί}$ αν οι μη-ελεύθεροι βιογράφοι είναι
 Εξισόμοιοι

(2η παρουσίαση)

□ Πως $\text{Grp}(\mathbb{Z}_n)$ είναι ισόμορφος με $u = Fx + r \in (ue + F(x-\phi))$ των $\mathbb{Z}_n[x]$ / $\text{mod } (x-\phi)$.

IGX über:

$$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$$

$$\begin{pmatrix} s\mathbb{I} - (A+BF) & B \\ -(C+DF) & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\mathbb{I} - A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ -F & \mathbb{I} \end{pmatrix}$$

(GUT-Kriterium erfüllt)

$$\square \quad \text{"Av } (A, B) \in \mathcal{A} \text{ eff } \mathcal{S}_{\text{quo}} \Rightarrow (A + BF, B) \in \mathcal{A} \text{ eff } \mathcal{S}_{\text{quo}}, \forall F$$

□ Ομως, η παράσταση ψ είναι επιτρεπόμενη από την άκσβαση:

$(A+BF)$ και $(C+DF) \Rightarrow$ η συγκεκριμένη μήτρα F (για την εκκίνηση των ηροδιαφορών τω εαφρου μπορεί να κάνει κάποιες διορθώσεις μη-παρατηρήσιμες!

1. Υαρούζην Νόμος Προβλεπόμενα Τονοειδή της Ισοζυμίας

Πρόταση: (A, B) είναι ερμιτιανός, αν $\exists K: \operatorname{Re}[\lambda_i(A+BK)] < 0$
(με $\lambda_i: |\lambda I - A - BK| = 0$)

(A, B) εταξογονιζόμενο $\Leftrightarrow \sqrt{V^T B} \neq \emptyset$ για κάθε V^T , κριτ. διάνυσμα που αντιστοιχεί σε κάποια α στο $\mathcal{A}$ ιδιοτιμή

Ανάλυση, όταν οι δοσμένες ιδιοτητές $\equiv$ ελέγχουμε

Γράφοντι τῷ θεαγλιώδους θεωρίμωτος τονόδεωτος ἰς ὡς ἐμῶν :

Θέση: $\exists K: \mathcal{P}(A+B_K) \equiv \bigwedge = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \in \mathbb{C}$
 $\Leftrightarrow (A, B)$ εταξινόμηση

2. ΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ (δύο μιγες K)

□ Πλήρης Εξαρτησιμότητα - Ζυσίμωση με μία Εξίσωση ($m=1$)

1. Αν ελάχιστος Μέθοδος: Να βρεθεί η μιγαδική K .

$$K = [K_{ij}] \quad , \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$$

Έστω το χαρτακι πολλαπλασιασμού του s με K και s βρούμε:

$$\det(sI - (A+BK)) = s^m + g_{m-1}(K_{ij})s^{m-1} + \dots + g_0(K_{ij}) \quad (\text{x.n. καταστάσεις p.e.})$$

και έστω: **εναρμονισμένο** x.n. : $\alpha_d(s) = s^m + d_{m-1}s^{m-1} + \dots + d_0 \Rightarrow \rho_i \in \mathcal{L}$

$$\text{Αρα,} \quad g_k(K_{ij}) = d_k \quad , \quad k = 0, 1, \dots, m-1$$

(Γενικά) $\approx$ μη γραμμικό σύστημα αλγ. εξισώσεων : για να βρούμε K_{ij}

Όμως, όταν **$m=1$** το αλγεβρικό σύστημα γίνεται **γραμμικό** (γίνεται ευκολότερο)

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(sI - A) = s(s - \frac{5}{2}) \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = + \frac{5}{2}$$

Να βρούμε F : $\hat{g}_{1,2} = -1 \pm j$ (εναρμονισμένα πόλοι)

Λύση: 1. Υπόψη άξονα $\approx$ υπολογισμός μιγες εξαρτησιμότητας $\Rightarrow (A, B)$ ελέγξτε Πλήρως (να εναρμονιστεί)

2. Υπολογισμός μιγες K :

$$\begin{aligned} K = [K_1 \quad K_2] &\Rightarrow \det(sI - A - BK) = \det\left(\begin{bmatrix} s-1/2 & -1 \\ -1 & s-2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [K_1 \quad K_2]\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} s-1/2-K_1 & -1-K_2 \\ -1-K_1 & s-2-K_2 \end{pmatrix} = \\ &= s^2 + s(-5/2 - K_1 - K_2) + (K_1 - 1/2 K_2) \\ &\quad (\text{βρούμε:}) = s^2 + 2s + 2 \quad (\text{x.n.: } \hat{g}_{1,2}) \end{aligned}$$

$$\text{Αρα,} \quad \begin{cases} -5/2 - K_1 - K_2 = 2 \\ K_1 - 1/2 K_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow K_1 = -\frac{1}{6} \quad , \quad K_2 = -\frac{13}{3}$$

$$\Rightarrow K = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{13}{3} \end{bmatrix}$$

$$u = -Kx$$

Πρακτική Χρησιμότητα: (Υπολογιστική δυσκολία)

$$\text{Μέχρι} \quad n \leq 3, \quad m=1$$

Πραγματική Χρησιμότητα: (Υπολογιστική δυσκολία)

Περίπου $n \leq 3, m = 1$

2. Χρήση Εξέχουσας Κανονικής Μορφής ($m = 1$)

"Αν (A, B) ελέγχσιμο $\Leftrightarrow \exists P: \begin{matrix} A_c = PAP^{-1} \\ B_c = BP \end{matrix} \} \rightarrow$ (ελέγχσιμη κανονική μορφή)

- Ισχύει: $(A + BF)$ και ο πίνακας $P(A + BF)P^{-1} = PAP^{-1} + PBFP^{-1} = A_c + B_c F_c$

(Γραμμ. Αλγέβρα) "Έστω ἴδιος πίνακας:"

μὴ εἰκόνη μορφῆς (για πρῶτος)

Αρα, Νά προλάβει $F_c: \mathcal{A}: (A_c + B_c F_c) = \Lambda$

ήτοι $F = F_c P$

Αρα, γὰρ $F_c = [f_0 \ f_1 \ \dots \ f_{n-1}]$, $m = 1$

ήν $A_c F_c^T = A_c + B_c F_c = \begin{bmatrix} \emptyset & 1 & \dots & \emptyset \\ \emptyset & & & \\ \vdots & & & \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \emptyset \\ \vdots \\ \emptyset \\ 1 \end{bmatrix} [f_0 \ f_1 \ \dots \ f_{n-1}]$

$\left(\begin{matrix} \alpha_i \equiv \text{συν. x.n. } A_c \\ \det(sI - A_c) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_0 \end{matrix} \right) = \begin{bmatrix} \emptyset & 1 & \dots & \emptyset \\ \emptyset & & & \\ \vdots & & & \\ -(\alpha_0 + f_0) & -(\alpha_1 + f_1) & \dots & -(\alpha_{n-1} + f_{n-1}) \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \det(sI - A_c F_c) = s^n + (\alpha_{n-1} + f_{n-1})s^{n-1} + \dots + (\alpha_0 + f_0)$ (x.n. κανονική μορφή $\rightarrow$ κανονική μορφή)

Αν, τὸ εἰσαγόμενος x.n. κανονική μορφή βέβαιον εἶναι:

$\alpha_d(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_0$ (οἷον $\alpha_i \in \Lambda$)

$\Rightarrow f_i = \alpha_i - d_i, \quad i = 0, \dots, n-1$

Παράδειγμα:

$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Νά προλάβει $F: \Lambda = \{-1 \pm j\}$

(Συμ. $\alpha_d(s) = s^2 + 2s + 2$)

- Εύρεση τῆς κανονικής μορφῆς ελεγχσιμότητας:

$C = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 3 & -3/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} q \\ qA \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$

Αρα, $A_c = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} \emptyset & 1 \\ \emptyset & 5/2 \end{bmatrix}, \quad \approx (-\alpha_0, -\alpha_1)$

$$A_{p2}, A_c = P A P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -9/2 \end{bmatrix}, \approx (-\alpha_0, -\alpha_1)$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{όπως } A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (\alpha_0, \alpha_1(s)) \\ \approx (-d_0, -d_1) \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \text{τελικά} : F_c = \begin{bmatrix} -2 & -9/2 \end{bmatrix}$$

$$F = F_c P = \begin{bmatrix} -2 & -9/2 \end{bmatrix} \frac{1}{s} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{s} & -\frac{13}{3} \end{bmatrix}$$

3. Τύπος Ackermann (Bess-Jurz) ($m=L$)

$$\downarrow^T = [W^T C^T]^{-1} (\alpha - \hat{\alpha}) \quad \text{όπου, } W = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_L \\ 0 & 1 & \dots & \alpha_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{m-1}b], \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_L \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_L \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \lambda^m + \alpha_1 \lambda^{m-1} + \dots + \alpha_m = 0$$

$$|\lambda I - A - b\downarrow^T| = 0 \Rightarrow \lambda^m + \hat{\alpha}_1 \lambda^{m-1} + \dots + \hat{\alpha}_m = 0$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Να βρούμε } \downarrow : \quad \begin{matrix} \hat{\alpha}_1 = -1 \\ \hat{\alpha}_2 = -2 \end{matrix}$$

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 + 1$$

$$|\lambda I - A - b\downarrow^T| = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

(2. Ackermann):

$$\Rightarrow \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow = [\downarrow_1 \quad \downarrow_2]^T$$

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$C = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow W^T C^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (W^T C^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Τελικά, } \downarrow^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \downarrow_1 \\ \downarrow_2 \end{bmatrix}$$

□ Συντίμηση Πολλών Εισόδων - Γενερισμός μεθόδων

(Κλασικός Κανονισμός μεθόδων)

Έστω $\Lambda = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \in \mathbb{C}^n$ ("Επιθυμητός" πόλος/ζεύγος πόλων, κλασικά βρ.)

Έστω $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{C}^-$ ("ένδομυς" ιδιοτιμές συστ. κλειστού β.ρ.)

Έστω

$$\lambda_i, i=1, \dots, q : \lambda_i = \lambda_i(A)$$

$$\lambda_i, i=q+1, \dots, n : \lambda_i \neq \lambda_i(A)$$

ιδιοτιμές του πίνακα A

- Κατασκευάζουμε τον πίνακα U :

$$U \cong \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_q & u_{q+1} & \dots & u_n \end{bmatrix} \quad (n \times n)$$

- $u_i, i=1, 2, \dots, q \equiv$ ιδιοδιάνυσμα της A αντίστοιχα $\lambda_i \equiv \lambda_i(A)$

- $u_i, i=q+1, \dots, n \equiv$ υπολογίζονται με τον τρόπο

$$u_i = (\lambda_i I - A)^{-1} B v_i, i=q+1, \dots, n$$

(n x n) (n x n) (n x 1)

(πράσινα από $(\lambda_i I - A)u_i = B v_i$)

όπου, $v_i \in \mathbb{R}^m$, τυχαία, μη-μηδενικά : $u_i \approx$ βραχυ. ανεξάρτητα

Άρα, U $\equiv$ ορθογώνιος

- Σχηματίζουμε τον πίνακα V :

$$V \cong \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_q & v_{q+1} & \dots & v_n \end{bmatrix} \quad (m \times n), v_i \in \mathbb{R}^m$$

$\emptyset$
μηδενικά διανύσματα

Ορίζουμε,

$$K = V U^{-1} \quad (m \times n)$$

τον οποίο ως ιδιοτιμές του $A+BK \equiv \Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

Αντίδοξο :

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\forall \lambda_i : (A+BK)u_i = \lambda_i u_i, i=1, \dots, n$

1) $\lambda_i, i=1, \dots, q$ ($\lambda_i \neq \lambda_i(A)$)

$$(A+BK)u_i = A u_i + B K u_i = A u_i + B V (U^{-1} u_i)$$

$$= A u_i + B V e_i$$

$$= A u_i + B v_i$$

($U^{-1} u_i = e_i, e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_i$
 $\downarrow$
ιδιοτιμή U
 $U^T U = I_n$)

$$A u_i + B v_i = \lambda_i u_i, i=1, \dots, q,$$

$$\hookrightarrow u_i = (\lambda_i I - A)^{-1} B v_i$$

$$\Rightarrow (A+BK)u_i = \lambda_i u_i, i=1, \dots, q$$

2) $\lambda_i, i=q+1, \dots, n$ ($\lambda_i = \lambda_i(A)$)

$$(A+BK)u_i = A u_i + B K u_i = A u_i + B V (U^{-1} u_i) =$$

$$= A u_i + B V e_i$$

$$= A u_i + B v_i$$

$$= \lambda I u:$$

Παράδειγμα: Έστω το σύστημα:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} x$$

Πρόβλημα: να προσδιορίσει νόμος ελέγχου για την επίτευξη της εξόδου στο σημείο λειτουργίας $y_c = 2$

Λύση:

1. Θεωρούμε ένα νόμο ελέγχου της μορφής: $u(t) = u_c + K(x - x_c)$

$x_c \equiv$ κατάσταση ισορροπίας συσ. κλειστού βρόχου: (ρύθμιση $\Rightarrow x_c \neq \emptyset$)

$$(y_c \equiv C x_c) \quad y_c = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_{c1} \\ x_{c2} \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow y_c = 2 x_{c2} = 2 \Rightarrow \boxed{x_{c2} = 1}$$

Για να είναι το $x_c \equiv$ κατάσταση ισορροπίας κλ. βρ.:

$$A x_c + B u_c = \emptyset$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{c1} \\ x_{c2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u_c = \emptyset = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ποιά x_c, u_c αντιστοιχούν στο $y_c = 2$?)

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{c1} = 0,5 \\ x_{c2} = 1 \\ u_c = -1 \end{cases} \quad x_c = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boxed{u_c = -1}$$

2. Προσδιορισμός K : ώστε κλειστό βρόχος $\text{Re}[\lambda(A+BK)] < 0$

3. Μέθοδος Ελέγχιμότητας:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 1 < n=2 \quad \text{un-(reachable)} \\ \text{ελέγχσιμο!}$$

και επειδή $\text{rank} C=1 \Rightarrow$ μόνο μία από τις ιδιοτιμές μπορεί να αντιστραφεί!

$$\text{Ιδιοτιμές } A: \det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \det \left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \right] = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 8 & \lambda+2 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4$$

$$\lambda_2 = 2 \quad (\equiv \text{unstable})$$

4. Εξισώνουμε αν (A, B) σταθεροποιήσιμο:

Συγκεκριμένα, αν $\lambda_2 = +2$ είναι ελέγχσιμο:

Έστω $w_2 = \begin{bmatrix} 1 & w_{22} \end{bmatrix} \equiv$ αριστερό ιδιοδιάνυσμα A αντιστοιχίας λ_2
($w_2 A = \lambda_2 w_2$)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & w_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & w_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{w_{22} = 0,25}$$

$$\Rightarrow (1 \quad w_{22}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} = 2 (1 \quad w_{22}) \Rightarrow w_{22} = 0,25$$

Άρα, $w_2 = [1 \quad 0,25]$

Τότε, $w_2 B = [1 \quad 0,25] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1,5 \neq 0 \Rightarrow \lambda_2 \equiv \text{ελέγξιμη}$

Άρα, μπορεί να ελεγχιστεί (με ανάδραση)

Έστω $\lambda_2^* = -5$

5. Να προσδιορίσει το K : το σύστημα κλειστού βρόχου $(A+BK) \sim \Lambda = \{-4, -5\}$

Να $K = V U^{-1}$ με $V = [v_1 \quad v_2]$
 $U = [u_1 \quad u_2]$

$v_1 = \emptyset$ (δηλ. αρχικό. ενώ $\lambda_1 = -4$)

$v_2 = 1$ (αξιοπρόσμενο)

$u_1 \equiv \text{αποσύνθεση } A \text{ αμελητέος } \lambda_1 = -4 \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \\ u_2 = (\lambda_2^* I - A)^{-1} B v_2 \end{array} \right.$

$$\Rightarrow u_2 = \left[-5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 1 =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Άρα, $U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/7 \\ -4 & -2/7 \end{pmatrix}$

$V = [0 \quad 1]$

Άρα, $K = V U^{-1} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & -1/7 \\ -4 & -2/7 \end{bmatrix}^{-1} = \dots = -\frac{7}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix}$

Τελικά $K = -\frac{7}{6} [4 \quad 1]$

Τότε, $u = u_c + K(x - x_c) =$

$$= -1 - \frac{7}{6} [4 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 - 0,5 \\ x_2 - 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = 2,5 - \frac{14}{3} x_1 - \frac{7}{6} x_2$$

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ

Πρόβλημα: να βρούμε $u(x, x^*(t))$: $x^*(t) = \text{ζητούμε το συστ. κλειστού βρόχου}$

δηλ. εξωτερική εισροή

$$\Rightarrow \dot{x}^*(t) = A x^*(t) + B u[x^*(t), x^*(t)], \quad \forall t \geq 0$$

πράξη: $\exists \quad u(t) \equiv u(x^*(t), x^*(t)) :$

$$\dot{x}^*(t) = A x^*(t) + B u^*(t)$$

Εφ' όσον μόνο αν $m \geq n$ $\Rightarrow$ $\exists$ $u^*(t) = -B^T (BB^T)^{-1} A x^*(t)$

$$m = n \quad \Rightarrow \quad u^*(t) = -B^{-1} A x^*(t)$$

Όταν $m < n$ δεν υπάρχει ακριβής λύση.

Αν επιλέξουμε: $u(x(t), x^*(t)) = K[x(t) - x^*(t)] + r(t)$
 $\uparrow$ $\uparrow$
 εφ' όσον γίνεται $x(t) \neq x^*(t)$ $\uparrow$ $\uparrow$
 καθορίζον την ποσότητα που οφείναι απορροφήσει

Ορίζουμε: $z(t) \equiv x(t) - x^*(t)$ (άποκλιση - σφάλμα παρακολούθησης)

$$\dot{z}(t) = (A + BK) z(t) \quad \sim \quad \exists ? \quad K : \quad z(t) \text{ φθάνει} \\ \text{in } \Re[\lambda_i(A+BK)] < 0$$

$\Rightarrow$ Παράκολο λύση $\approx$ αποδοτική λύση