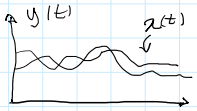
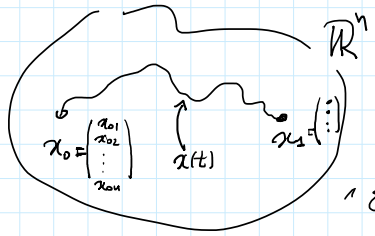
Ελεγξιμότης-Παρατηρησιμότης-Εισαγωγη



"σήματα"

δυνάμεις



"δορυφόρος"

$x_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$

$x(t) = \Phi(\ ,\ )\, x(0) + \int \cdots u(\tau)\, d\tau$

↳ τροχιές / λύσεις

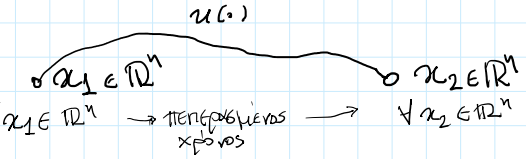
$\longrightarrow$ $x_2 = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$

{ ελεγξιμότητα → έλεγχες με ανάδραση (καταστάσεων / εξόδου)
παρατηρησιμότητα → παρατηρητές $\hat{x}(t)$

και

$y(t) = Cx(t) = \cdots$

□ Τί σημαίνει ελεγξιμότης;



$\forall x_1 \in \mathbb{R}^n$ → περιορισμένος χρόνος → $\forall x_2 \in \mathbb{R}^n$

Γεωμετρία Χ.Κ.: "Ενας μετασχηματισμός g ($G \equiv$ ομάδα μετασχηματισμών, $g \in G$
π.χ.: $G \equiv GL(n, \mathbb{R}) \Rightarrow g \approx A$

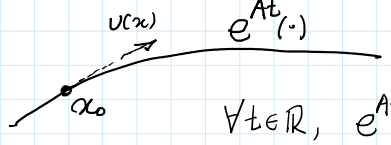
(μέ τήν έννοια $g^t = e^{At}$)

$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$: τροχιά τού σημείου x_0, υπό τόν μετασχηματισμό g : g^t

δηλαδή: $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$: $g^t x_0 \equiv e^{At} x_0 \equiv$ λύση (ολοκλ. γραμμή) τού Δ.Ε.

δηλαδή, "Η κατηύθυνση στόν Χ.Κ.;" $\forall t \in \mathbb{R}$: $e^{At} x_0 \equiv$ λύση τού Δ.Ε. $\dot{x} = Ax$

(Αυτή προκύπτει από τήν δράση Θ τής ομάδας G: $\Theta : G \times M \to M$
"απεικόνιση" ↳ Ax (χώρος ταχυτήτων) ή $\Theta : GL(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$e^{At}x$ (χώρος λύσεων)



$(A, x) \mapsto \dot{x}$ (ταχύτητα)

διανύσματα $\in \mathbb{R}^n$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{At} x_0 \equiv$ ολοκλ. γραμμή – λύση τού Δ.Ε.
$\equiv$ προβολή στόν Χ.Κ. τού διαν. πεδίου Ax (εφαπτ. διάνυσμα)

$v(x) \overset{\text{def}}{=} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (e^{At} x_0) \equiv$ διαν. ταχύτητας
$\equiv$ εφαπτόμενο διάνυσμα

• Ισχύει: $\vec{v}(x) \in T_x(\mathbb{R}^n) \equiv \mathbb{R}^n$ (ΜΟΝΟ στά γραμμικά συστήματα ($\Delta.Ε.: \dot{x} = Ax$)

□ Πώς γίνεται η μεταφορά από κατάσταση σε κατάσταση;

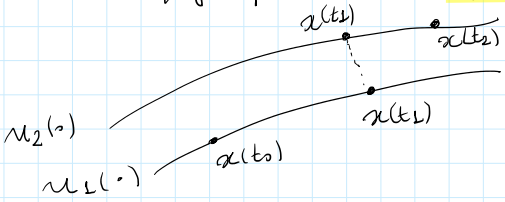
"Κίνηση στόν Χ.Κ.": από $x(\cdot)|_{t_0}$ ⇝ $x(t_1) = \Phi(t_0, t_1)\, x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, \tau)\, u_1(\tau)\, B(\tau)\, d\tau$

$e^{At} x(t_0)$

$t_1 \equiv$ περιορισμένο

Κάθε $u(\cdot)$: παράγει "μία" λύση $\equiv$ ολοκληρωτική γραμμή

Κάθε $u(\cdot)$: παράγει "μία" λύση ≡ ολοκληρωτική γραμμή



$x(t_2) = \Phi(t_2, t_1)\, x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t_2, \tau)\, B(\tau)\, u_2(\tau)\, d\tau$

$\Phi(t_2, t_1) = e^{A(t_2 - t_1)}$

$\vdots$

Ελεγξιμότητα – Προσιτότητα

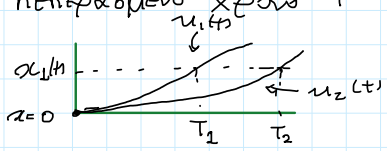
2 έννοιες: προσιτότητα (reachability) ≡ accessibility ≡ ελεγξιμότητα – από – στην – αρχή

ελεγξιμότητα (controllability) ≡ ελεγξιμότητα – στην – αρχή

ορισμός: x_1 ≡ προσιτή – από – την – αρχή, αν $\exists\, u(t)$: μεταφέρει το $x(t)$ από το μηδέν

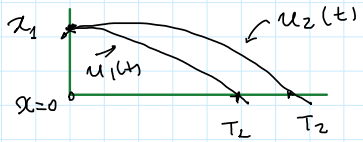
$x = 0 \rightsquigarrow x_1$, σε πεπερασμένο χρόνο T

- δεν προσδιορίζεται ο χρόνο T
- ≠ // – ο χρόνος που ακολουθείται



ορισμός x_1 ≡ ελεγξιμη – στην – αρχή, αν $\exists\, u(t)$: μεταφέρει το $x(t)$ από το δοσμένο x_1

στο $x = 0$, σε πεπερασμένο χρόνο T



άρα, προσιτότης: $x=0 \longrightarrow x_1$

ελεγξιμότης: $x_1 \longrightarrow x=0$

Σημείωση: θα αποδείξουμε ότι η προσιτότητα συνεπάγεται πάντα την ελεγξιμότητα, αλλά η ελεγξιμότητα συνεπάγεται την προσιτότητα μόνο όταν η μήτρα μεταβάσεως $\Phi(\cdot,\cdot)$ είναι μη-ιδιάζουσα!

– διαφορά μεταξύ συνεχούς χρόνου / διάκριτου χρόνου συστημάτων

☐ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΕΛΕΓΞΙΜΟΤΗΤΑΣ – ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

με χρήση του Π.Κ.Ε. σε διάκριτο χρόνο (ευκολότερα μαθηματικά)

Συστήματα Διάκριτου Χρόνου (Σ.Δ.Χ.)

(Σ) : $x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k)$

(λύση) : $x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-(i+1)} B\, u(i)$, $k \geq 0$

? $x(0) = x_0 \rightsquigarrow x_1$ σε η βήματα, αν $x_1 \equiv x(\eta)$

? $\exists\, U_{\eta\text{-}1} \equiv \{u(0), u(1), \ldots, u(\eta-1)\}$: $x_1 \equiv x(\eta)$ ή (από την σχέση λύσης)

? $\exists\, U_{n\times 1} = \{u(0), u(1), \dots u(n-1)\} : x_1 = x(n)$ ή (από την εξέση / άλυση)

άν $\exists$ ακολουθία $U(n)$ που να ικανοποιεί: $\boxed{x_1 - A^n x_0 = \mathcal{C}_n U_n}$ (α)

(Εφαρμογή διαφορικού προτύπου)

δίνει:

$k=0$: $x(1) = A x(0) + B u(0)$

$k=1$: $x(2) = A x(1) + B u(1) = A x(0) + AB u(0) + B u(1)$

$k=2$: $x(3) = A x(2) + B u(2) = A^2 x(0) + A^2 B u(0) + AB u(1) + B u(2)$

$\vdots$

$x(n) = \dots = A^n x(0) + \dots A^{n-1} B u(0) + \dots$

↳ γενική εξέση για $x(n)$

άν ορίσουμε:

μήτρα ελεγξιμότητας: $\mathcal{C} \overset{ορ}{=} [B \;\; AB \;\; \dots \;\; A^{n-1}B]$

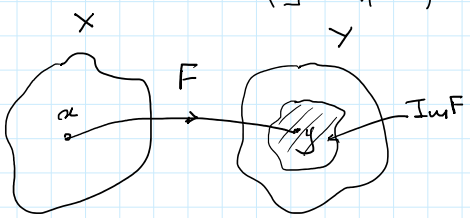
καταλήγουμε στην αντίστροφη εξέση (α)

□ Τι σημαίνει η εξέση (α);

(Γεωμετρικά): "Αν: $U_n = [u^T(n-1), u^T(n-2) \dots u^T(0)]^T$

ή αλλιώς:

$\exists$ λύση άν & μόνο άν $(\exists\, U_n)$: $x(n) \equiv x_1 - A^n x_0 \in \operatorname{Im}\mathcal{C} \equiv R(\mathcal{C})$



$F : X \to Y$

$Y \supset \operatorname{Im} F \overset{ορ}{=} \{y \in Y : Fx = y,\ \forall x \in X\}$

π.χ. $F \equiv A$

$X = Y \equiv \mathbb{R}^n$

"Αν για όλα τα $x \in \mathbb{R}^n$

"Αν $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ · ισχύει $x_1 \equiv$ προσιτό (ελεγξιμο από την αρχή) $(\Rightarrow \exists\, U_n : x=0 \rightsquigarrow x_1\}$

αυτό σημαίνει (εξέση (α)): $\boxed{\operatorname{Im}\mathcal{C} \equiv \mathbb{R}^n}$ $\equiv R(C) \equiv \mathbb{R}^n$

- $x_1 \equiv$ προσιτό-από-την αρχή: "Όλα τα $x_1 \in \operatorname{Im}\mathcal{C}$

άρα $\operatorname{Im}\mathcal{C}$ η θέση της κατάστασης x_1 που είναι προσιτές από το $x=0$.

βρίσκουμε: $\operatorname{Im}\mathcal{C} \equiv R(\mathcal{C}) \overset{ορ}{=}$ υπόχωρος προσιτότητας

□ "Αρα το (Σ) είναι προσιτό (ελεγξ.-από-την αρχή), $\forall x \in \mathbb{R}^n$ όταν $\operatorname{Im}\mathcal{C} \equiv \mathbb{R}^n$

άρα $\operatorname{Im}\mathcal{C} = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ τάξη $\mathcal{C} = n$ (γραμμ. άλγεβρα)

□ Άρα το (2) είναι πρακτικό (ελεγξιμότητα από την αρχή), $\forall x \in \mathbb{R}^n$ όταν $\mathrm{Im}\,\mathcal{C} \equiv \mathbb{R}^n$

άλλά $\mathrm{Im}\,\mathcal{C} = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ τάξη $\mathcal{C} = n$ (γραμμ. άλγεβρα)

Άσκηση: Αποδείξτε ότι για $F: X \to Y$, ισχύει $\mathrm{Im}\,F = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ τάξη $F = n$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

μήτρα ελεγξιμότητας: $\mathcal{C} = [B \;\; AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, τάξη $\mathcal{C} = 2 \Leftrightarrow \mathrm{Im}\,\mathcal{C} \equiv \mathbb{R}^n$

άρα (A,B) προσιτό : $\forall x_1 \in \mathbb{R}^n$: $x=0 \rightsquigarrow x_1$, σε n βήματα το πολύ

πράγματι, αν $x_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix}$ και $x=0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow x_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix}$, πρέπει $\exists\, U_n$: $x_1 - A^n \overset{0}{x_0} = \mathcal{C}_n U_n$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

άρα, $\left.\begin{matrix} u(0) = \alpha \\ u(1) = b-\alpha \end{matrix}\right\}$ $x=0 \longrightarrow \left.\begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix}\right|_{k=2}$

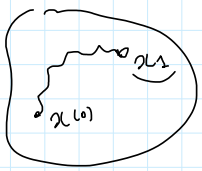
Επαλήθευση:

$$x(1) = A\overset{0}{x(0)} + B u(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$x(2) = A\,x(1) + B\,u(1) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (b-\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix}$$

- επιλογή εισόδου με ελάχιστα κριτήρια (βέλτιστος έλεγχος κ.λπ.)

□ προσιτότητα σημαίνει ότι:
το x_1 = προσιτό από $x=0$, σε το πολύ 2 βήματα, ισχύει για κάθε άλλο $x(0)$:



π.χ. $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x_1 - A^2 x(0) = \mathcal{C}_n U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-\alpha-1 \\ \alpha-2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{μεταφέρω το } x(0) = \left.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|_{k=0} \rightsquigarrow x_1 = \left.\begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix}\right|_{k=2}$$

σε 2 βήματα

□ γενικά $U_n = \{ \cdots \}$ = μη-μοναδική

□ Παράλληλα, το σύστημα (A,B) = ελέγξιμο - στην-αρχή : $\forall x_0 \rightsquigarrow x=0$ σε n βήματα

$\left(x_1 - A^n x_0 = \tau_n U_n \right) \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 \equiv 0 \\ x_0 \equiv x_6 \end{cases}$

$\downarrow$

$\emptyset - A^n x_0 = \tau_n U_n \Rightarrow -A^n x_0 = \tau_n U_n \rightsquigarrow \left(U_n = A^{-n} \mathcal{C} \right)$

$A^n x_0 \in \mathrm{Im}\, C \equiv R(C), \ \forall x_0$

"Αν τάξη $A = n \Rightarrow$ υπάρχει U_n : $(A,B) \equiv$ ελέγξιμο-στην-αρχή, όταν

(υπάρχει ο αντίστροφος) $\downarrow$

τάξη $\mathcal{C} = n$ (όταν οι καταστάσεις μη θυθικά προσιτότητας)

τότε $A^{-n}\mathcal{C} = \left[A^{-n}B, \ldots A^{-1}B \right]$

Άρα, $(\Sigma) \equiv$ ελέγξιμο (στην-αρχή) $\Leftrightarrow$ τάξη $\left(A^{-n}\mathcal{C} \right) = $ τάξη $\mathcal{C} = n$

ο όταν τάξη $A < n \Rightarrow$ η ελεγξιμότητα $\not\Rightarrow$ προσιτότητα

Παράδειγμα:

το "προηγούμενο σύστημα" : Είναι ελέγξιμο-στην-αρχή ?

Για $x_1 = \emptyset \Rightarrow -A^2 x_0 = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix} = \left[B \ AB \right]\begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix} =$

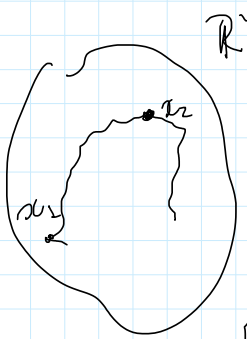
$x_0 \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix}$

Άρα, $\begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ -\alpha - b \end{pmatrix}$

$u(1) = -b$
$u(0) = -\alpha - b$ } μεταφέρω την κατάσταση από το

$\left.\begin{pmatrix} \alpha \\ b \end{pmatrix}\right|_{k=0} \rightarrow \left.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|_{k=2}$



ελεγξιμότητα : αν γίνεται $x_1 \rightarrow x_2$

(δυνατόν) : $x_1 \rightsquigarrow x_2$

Ερώτημα : - Πώς παραμένει το σύστημα εάν καταστροφή που έφτασε ;

- Πώς υπολογίζω U_n ;

Παρατηρησιμότητα (2 έννοιες) → παρατηρησιμότητα

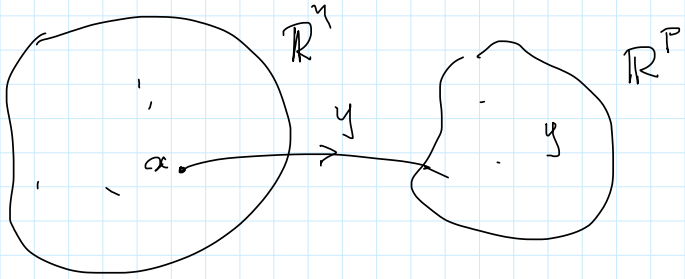
→ "ανακατασκευασιμότητα"

παρατηρησιμότητα $\equiv (\Sigma)$: προσδιορίζονται η παρούσα κατάσταση από παρούσα + μελλοντικές τιμές

→ αναλλοίωτα

παρατηρησιμότητα ≡ (Σ) : προσδιορίζονται η κατάσταση από τις παρούσες μακρινές + μελλοντικές τιμές εισόδου + εξόδου

ανα-κατασκευασιμότητα ≡ (Σ) : προσδιορίζεται -11- παρούσες + παρελθοντικές τιμές εισόδου + εξόδου



Συστήματα Διάκριτου Χρόνου - Χ.Α.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

, δεδομένα: $u(k)$, $y(k)$

Τότε, $y(k) = CA^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-(i+1)} Bu(i) + Du(k)$, $k \geq 0$

$\rightsquigarrow x(0) \longrightarrow \tilde{y}(k) \stackrel{\text{op}}{=} CA^k x(0)$, $k \geq 0$ (αποκρ. μηδεν. διέγερσης)

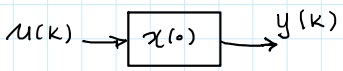
(για να υπολογίσω το $x(0)$ από τις μετρήσεις $\tilde{y}(k)$)

τότε ισχύει: $\tilde{y}(k) \stackrel{\text{op}}{=} y(k) - \left[\sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-(i+1)} Bu(i) + Du(k)\right]$

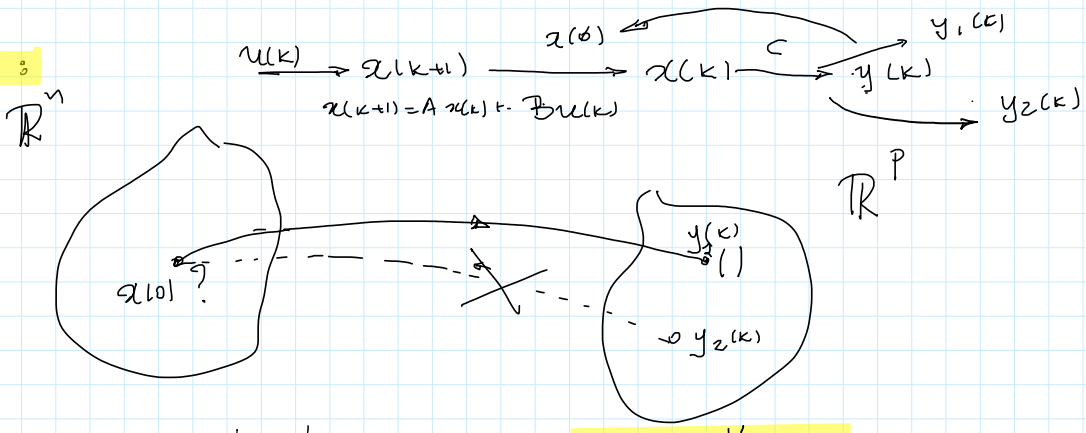
για $k>0$ και $\begin{cases} \tilde{y}(0) \stackrel{\text{op}}{=} y(0) - Du(0) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

- Θέλουμε να μπορούμε να προσδιορίσουμε το x_0 από το $\tilde{y}(k) = CA^k x_0$, όταν γνωρίζουμε τις εισόδους + εξόδους

- $u(k) = 0$, $k \geq 0$ $\Rightarrow$ $\tilde{y}(k) \equiv y(k)$
  ↳ προκύπτει από το x_0



Σχέση I/O :



□ $\forall x(0) = x_0 \equiv$ γνωστό $\Rightarrow$ $x(k)$, $\forall k \geq 0$

□ Υποδομώς $x(0)$: $\tilde{y}(k) = CA^k x(0)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$

$k=0$: $\tilde{y}(0) = C\,\underline{I}\,x(0)$

$k=1$: $\tilde{y}(1) = CA\,x(0)$ $\rightarrow$ $\mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{pn \times n}$ = πίνακας παρατηρησιμότητας (observability)

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{y}(0) \\ \tilde{y}(1) \\ \vdots \\ \tilde{y}(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x(0)$

$\tilde{Y}_{0,n-1}^T = \begin{bmatrix} \tilde{y}(0)^T & \dots & \tilde{y}(n-1)^T \end{bmatrix}^T$

ή απλώς : $\boxed{\tilde{Y}_{0,n-1} = \mathcal{O}_n x_0}$ (β), έχει πάντα λύση

Όμως, (Σ) παρατηρήσιμο αν η λύση x_0 μοναδική (μοναδική αρχ. συνθήκη που παράγει τις μετρήσεις)

$\Rightarrow$ x_0 μοναδικό $\Leftrightarrow$ $\ker \mathcal{O} = \{0\}$ $\left(X \supset \ker F \triangleq \{x \in X : Fx = 0\},\ F: X \to Y \right)$

ή το μοναδικό $x \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί τον $\mathcal{O}x = 0$ είναι το $x = 0$

Όμως ισχύει: $\boxed{\ker \mathcal{O} = \{0\} \Leftrightarrow \text{rank}\, \mathcal{O} = n}$ $\left(\begin{array}{l} \text{Im}\, F \subset Y \\ \ker F \subset X \end{array} \right)$

Άσκηση : Αποδείξτε ότι για $F: X \to Y$ ισχύει $\ker F = \{0\} \Leftrightarrow \text{rank}\, F = n$

Άρα, $\boxed{\text{το } (\Sigma) \text{ παρατηρήσιμο} \Leftrightarrow \text{rank}\, \mathcal{O} = n}$

- κάθε $x \neq 0$ που ικανοποιεί τον $\mathcal{O}x = 0$ ($\in \ker \mathcal{O}$) ονομάζεται μη-παρατηρήσιμη κατάσταση

Όταν rank $\mathcal{O} < n$: - $\ker \mathcal{O} = \{x : \mathcal{O}x = 0\} \neq \{0\} \Rightarrow \exists$ μη-παρατηρήσιμες καταστάσεις $\equiv N(\mathcal{O})$

$\ker \mathcal{O} \equiv$ "μη-παρατηρήσιμος υπόχωρος"

τότε, $\{CA^k x = 0,\ k = 0, 1, \dots, n-1\}$

Τελικά, $\left\{ \begin{array}{ll} \text{εξεταζόμενες-διεγερτικές} & \rightarrow R(\mathcal{C}) = \text{Im}\, C \\ \text{παρατηρησιμότητας} & \rightarrow N(\mathcal{O}) = \ker \mathcal{O} \end{array} \right\}$

Παράδειγμα:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$$

$$O \overset{\text{op}}{=} \begin{pmatrix}C\\ CA\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad \text{τάξη } O = 2 \Rightarrow (\Sigma)\equiv(A,C) \equiv \text{παρατηρήσιμο}$$

δηλ. $x(0)$ προσδιορίζονται μοναδικά $n=2$ μετρήσεις εξόδου

Πράγματι, $\begin{pmatrix}y(0)\\ y(1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y(0)\\ y(1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y(1)-y(0)\\ y(0)\end{pmatrix}$

Παράδειγμα 2:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$$

$$O=\begin{pmatrix}C\\ CA\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \text{τάξη } O = 1 \Rightarrow (A,C)\equiv \text{μη-παρατηρήσιμο}$$

άλλά, $\ker O = \left\{x\in\mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}x = \emptyset\right\}$, $\boxed{\dim(\ker O)=1}$

τότε μία βάση του $\ker O = \left\{\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$ (1-διάστατος υπόχωρος) $\equiv$ 1 ιδιοδιάνυσμα

Από τον Θεώρημα $\Rightarrow$ όλα τα διανύσματα της μορφής $\left\{\begin{pmatrix}0\\ c\end{pmatrix},\ c\in\mathbb{R}\right\}$ $\equiv$ μη-παρατηρήσιμα

Τότε η σχέση $\tilde{Y}_{\text{ομ.}} = O_m x_0$ γίνεται: $\begin{pmatrix}y(0)\\ y(1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{pmatrix}$

Για να υπάρχει άλυση $x(0)$ πρέπει $y(0)\equiv y(1)=\alpha$

δηλαδή "παράγεται η ίδια έξοδος"

Παρόμοια, όλα τα $x(0)$ που ικανοποιούν την (β) και μπορούν να παράγουν την έξοδο αυτή, είναι: $\begin{pmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ c\end{pmatrix},\quad c\in\mathbb{R}$

συμπέρασμα: η έξοδος δεν μπορεί να "διακρίνει" τις δύο καταστάσεις

Δυαδικά Συστήματα

- Ελεγξιμότητα - παρατηρησιμότητα $\equiv$ δυαδικές έννοιες,

- Ελεγξιμότητα - παρατηρησιμότητα ≡ δυαδικές έννοιες,

δίδονται: $R(\mathcal{C})$, $N(O)$ ≡ δυαδικοί υπόχωροι (χώροι άλγεβρας)
(εν ImF KerF)

Για κάθε σύστημα (Σ):

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\right\}(\Sigma), \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \; B \in \mathbb{R}^{n\times m}, \; C \in \mathbb{R}^{p\times n}, \; D \in \mathbb{R}^{p\times m}$$

ορίζουμε το δυαδικό σύστημα $(\tilde{\Sigma})$: $\dot{x}_D = A_D x_D + B_D u_D$

$$y_D = C_D x_D + D_D u_D$$

όπου: $A_D = A^T$, $B_D = C^T$, $C_D = B^T$, $D_D = D^T$

Πρόταση: $A_v(\Sigma)$ ≡ ελέγξιμο $\iff$ $(\tilde{\Sigma})$ ≡ παρατηρήσιμο