Ασκήσεις

Thursday, June 4, 2020 11:13 AM

Ασκηση 1. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τρία χρωματιστά κουτιά Κ (κόκκινο), Μ (μπλε) και Π (πράσινο). Το Π περιέχει 3 μήλα, 4 πορτοκάλια και 3 λεμόνια, το Μ περιέχει 1 μήλο, 1 πορτοκάλι, και 0 λεμόνια, και το Π περιέχει 3 μήλα, 3 πορτοκάλια και 4 λεμόνια.

1. Εάν έχει επιλεγεί ένα κουτί με πιθανότητες p (Κ) = 0,2, p (Μ) = 0,2, p (Π) = 0,6 και αφαιρείτε ένα φρούτο (με την ίδια πιθανότητα επιλογής οποιουδήποτε αντικειμένου στο το κουτί), τότε ποια είναι η πιθανότητα επιλογής ενός μήλου;
2. Εάν αφαιρέσαμε ένα πορτοκάλι, ποια είναι η πιθανότητα να προέρχεται από το πράσινο κουτί?

K			M			Π		
3	0	3	1	0	0	3	3	4
Μ	Π	Λ	Μ	Π	Λ	Μ	Π	Λ

$\frac{3}{10}$ 10

0.2 0.2 0.6

36/100

$$p(\Pi) = \frac{1}{100}(2\cdot 4 + 5\cdot 2 + 3\cdot 6) = \frac{8+10+18}{100}$$

$$P(A) = \sum_i p(A, B_i)$$

$$p(\text{ΜΗΛΟ}) = p(\text{ΜΗΛΟ}, K) + p(\text{ΜΗΛΟ}, M) + p(\text{ΜΗΛΟ}, \Pi) =$$

$$= p(\text{ΜΗΛΟ}|K)\cdot p(K) + p(\text{ΜΗΛΟ}|M)\cdot p(M) + p(\text{ΜΗΛΟ}|\Pi)\cdot p(\Pi)$$

$$= \frac{3}{10}\,0.2 + \frac{1}{2}\,0.2 + \frac{3}{10}\cdot 0.6 = \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{10} + \frac{1}{2}\,\frac{2}{10} + \frac{3\cdot 6}{10\cdot 10} =$$

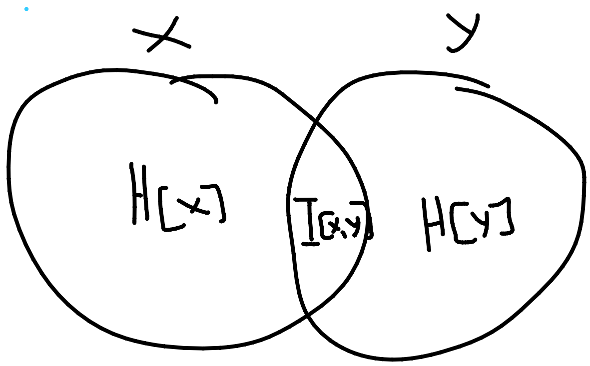
$$= \frac{1}{10}\left(\frac{6}{10} + \frac{1}{2} + \frac{3}{10}\right) = \frac{1}{10}\,\frac{6+5+3}{10} = \frac{15}{100} \simeq 0.24$$

$$p(\text{ΠΡΑΣΙΝΟ} \mid \Pi) = \frac{\overset{=0.5}{p(\Pi|\text{ΠΡ})}\cdot p(\text{ΠΡ})}{p(\Pi)} =$$

$$p(\text{ΠΡΑΣΙΝΟ}) = 0.6$$

$$= \frac{\frac{3}{10}\cdot 0.6}{} = \frac{3\cdot 6}{} = \frac{18}{} = \frac{1}{}$$

$$= \frac{\frac{3}{10}\cdot 0.6}{\frac{36}{100}} = \frac{3\cdot 6}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$



Ασκηση 2. Αν οι κοινή συνάρτηση πιθανότητας p(x,y) δίνεται από τον πίνακα

		$y=0$	$y=1$
x	0	1/3	1/3
	1	0	1/3

$$P(x,y)$$

Υπολογίστε τις ποσότητες H[x],H[y],H[y|x],H[x,y],I[x],I[x=0,y=1]

$$P(x=0, y=0) = \frac{1}{3}$$

$$H[x] = -\sum_{0,1} p(x)\log_2 p(x) =$$

$P(x)$	
2/3	0
1/3	1

$$= -\frac{2}{3}\log_2\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3} =$$

$$P(x) = \sum_{i=0}^{1} p(x, y_i)$$

$$= -\left(\frac{1}{3}\right)\left(2\log_2 2 - 2\log_2 3 - \log_2 3\right) = 0.9183$$

$$H[x] = 1$$

$$P(0) = 1/2,\ P(1) = 1/2$$

$H[y] = H[x]$

$$\boxed{H[y|x] = -\sum_{i,j} p(y_i|x_j) \log_2 (y_i|x_j)}$$

		y	
		0	1
x	0	1/3	1/3
	1	0	1/3

$$p(y|x=0) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

$$p(y|x=1) = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \end{array}$$

$$H[y|x] = \frac{2}{3} \ln_2 2 = \frac{2}{3} = 0.666..$$

$$\boxed{I(x) = -\log P(x)}$$

$$\underline{I(x=0, y=1)} = -\log_2 \frac{1}{3} = \log_2 3 = 1.585$$

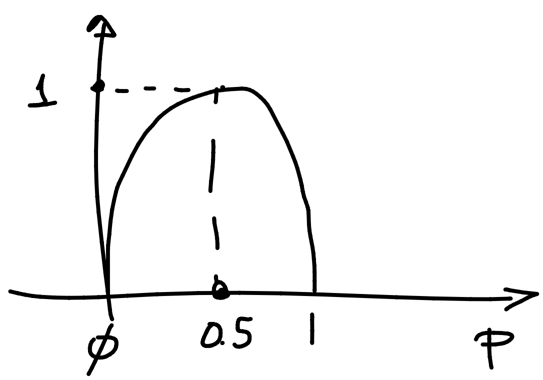
$$I(x=\underline{0, y=0}) = -\log_2 \frac{1}{3} = \log_2 3 = 1.585$$

$$I(\underline{x=1, y=1}) = -\log_2 \frac{1}{3} = \log_2 3 = 1.\underline{58}5$$

$$I(x=1, y=\phi) = -\log_2 \phi = +\infty$$

$$H[x,y] = \langle I(x,y) \rangle = \sum_{i,j} p(x_j, y_j)\, I(x_i, y_j)$$

$$= 3\left(\frac{1}{3}\log_2 3\right) = 1.585$$



$$p \to (1-p)$$

2

y

x	ϕ	1
ϕ	1/4	1/4
1	1/4	1/4

$$H[x,y] = -\sum_{ij} p(x_i, y_i) \cdot \log_2 p(x_i, y_i) =$$

$$= -4\left(\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$$

0,1 0,1 0,1

x, y, z

$2^3 = 8 = \frac{1}{8}$

$H[x,y,z] = 3$ bits

$H[x,y] = ?$ x, y

$H[x|y] = ?$

$p(x=Q, y=C)$

$p(x,y)$

$x \backslash y$	A	B	C
Q	1/9	1/9	1/9
R	1/9	1/9	1/9
S	1/9	1/9	1/9

$H[x,y] = ?$

$H[x|y] = ?$

$H[y|x] \stackrel{?}{=} H[x|y]$

$p(x,y)$

$x \backslash y$	A	B	C
Q	1/3	∅	∅
R	∅	1/3	∅
S	∅	∅	1/3

$$H[x|y] = \langle \bar{I}(p(x|y)) \rangle =$$

$$H[x|y] = \langle I(p(x|y))\rangle =$$

$$= \left(\langle I(p(x|y=0))\rangle_x\right)\cdot p(y=0) +$$

$$+ \left(\langle I(p(x|y=1))\rangle_x\right)\cdot \underline{p(y=1)} =$$

1

$$= \left(\langle -[\log_2 p(0|0)]\cdot p(0|0) - \left(\log_2(p(1|0))\right) p(1|0)\right) =$$

		y	
		0	1
x	0	1/3	1/3
	1	0	1/3

$$= -\frac{1}{3}\log\frac{1}{}$$

$$= 1\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$p(x|y=0) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & x=1 \end{cases}$$

$$p(y=1) =$$

$$p(y=1, x=0) + p(y=1, x=1) = \frac{2}{3}$$