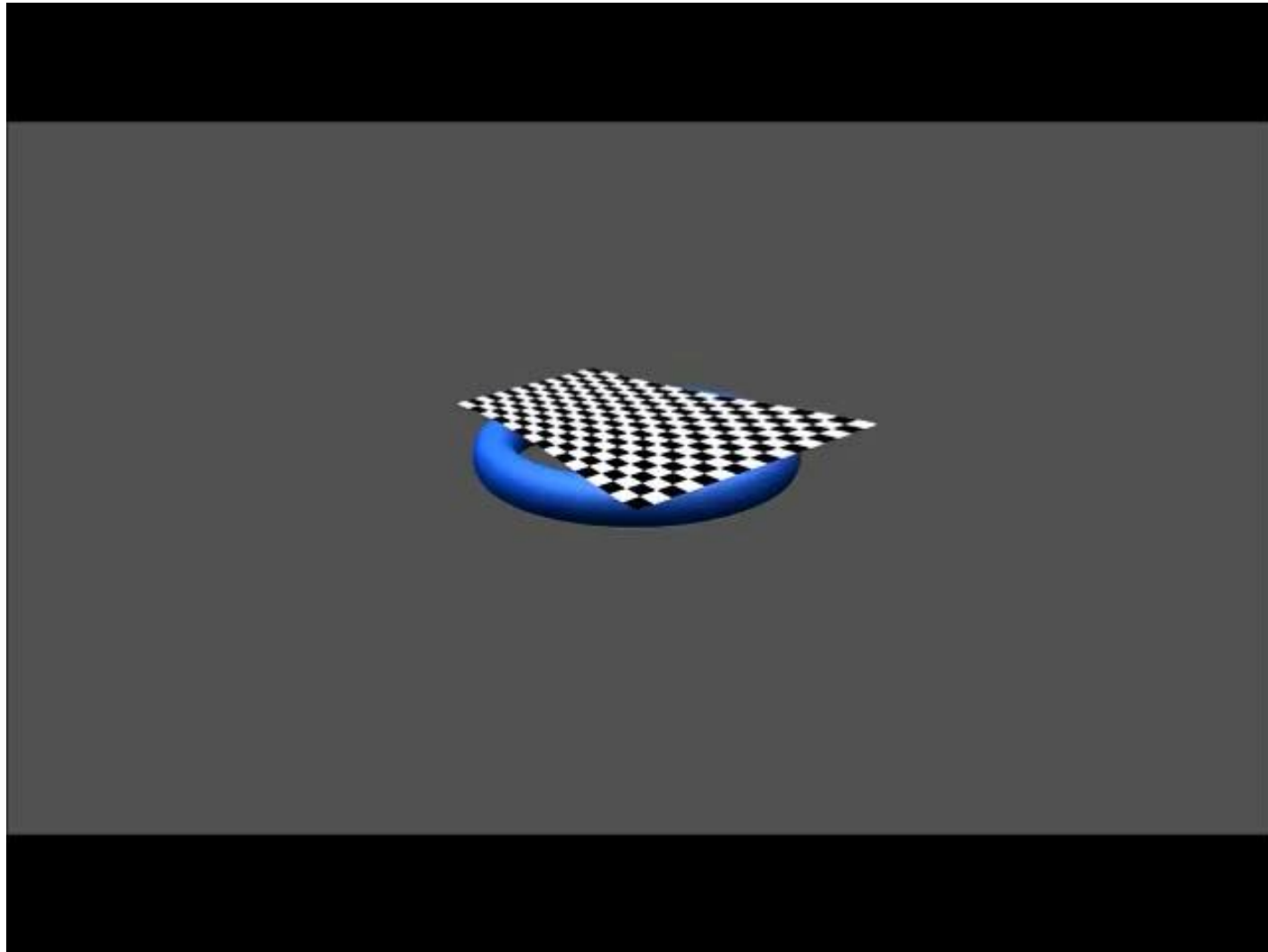


Γραφικά και Εικονική Πραγματικότητα

Προσομοίωση κίνησης

Παράδειγμα



Συστήματα σωματιδίων

- Τα συστήματα σωματιδίων έχουν χρησιμοποιηθεί πάρα πολύ στην περιοχή της προσομοίωσης κίνησης και των ειδικών εφέ από τότε που πρωτοεμφανίστηκαν τη δεκαετία του 1980
- Οι κανόνες που διέπουν τη συμπεριφορά ενός σωματιδίου είναι συνήθως απλοί. Οπότε η πολυπλοκότητα προκύπτει από τη χρήση πολλών σωματιδίων
- Συνήθως τα σωματίδια ακολουθούν κάποιο συνδυασμό φυσικών και μη φυσικών κανόνων ανάλογα με την εφαρμογή

Φυσική...

Κινηματική σωματιδίων

- Έστω η θέση ενός σωματιδίου ως συνάρτηση του χρόνου $\mathbf{r}(t)$
- Εξ' ορισμού η ταχύτητα είναι η πρώτη παράγωγος τη θέσης και η επιτάχυνση η δεύτερη

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

Κινηματική σωματιδίων

- Για τη σχεδίαση ενός σωματιδίου είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τη θέση του $\mathbf{r}$.
- Δεν τη γνωρίζουμε όμως...πρέπει να την υπολογίσουμε!

Σταθερή επιτάχυνση

- Αυτό που συνήθως γνωρίζουμε είναι οι δυνάμεις που του ασκούνται.
- Πώς κινείται ένα σωματίδιο όταν πάνω του εφαρμόζεται μία σταθερή επιτάχυνση;

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$$

$$\mathbf{v} = \int \mathbf{a} dt = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_0 t$$

$$\mathbf{r} = \int \mathbf{v} dt = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a}_0 t^2$$

Σταθερή επιτάχυνση

- Αυτό μας δείχνει ότι η κίνηση του σωματιδίου θα ακολουθήσει μία παραβολή

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a}_0 t^2$$

- Πρέπει να τονίσουμε ότι η παραπάνω είναι μία διανυσματική εξίσωση, και ότι πιθανότατα έχουμε παραβολική κίνηση σε κάθε διάσταση. Όλες μαζί ορίζουν μία 2D παραβολή προσανατολισμένη στον 3D χώρο
- Ακόμα για να ορίσουμε πλήρως την παραπάνω εξίσωση χρειαζόμαστε δύο επιπλέον διανύσματα $\mathbf{r}_0$ και $\mathbf{v}_0$. Αντιστοιχούν στην αρχική θέση και ταχύτητα για $t=0$

Μάζα και ορμή

- Μπορούμε να αντιστοιχήσουμε μία μάζα m με κάθε σωματίδιο. Έστω ότι η μάζα είναι σταθερή

$$m = m_0$$

- Έστω ακόμα μία διανυσματική ποσότητα ($\mathbf{p}$), που αντιστοιχεί στην ορμή και είναι το γινόμενο μάζας και ταχύτητας

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

1^{ος} νόμος του Νεύτωνα

- Ένα κινούμενο αντικείμενο θα συνεχίσει να κινείται και ένα ακίνητο αντικείμενο θα παραμείνει ακίνητο, εκτός και αν ασκηθεί πάνω τους κάποια δύναμη
- Αυτό υπονεί ότι ένα κινούμενο σωματίδιο στο χώρο, θα συνεχίσει να ταξιδεύει σε μία ευθεία γραμμή

$$\mathbf{a} = 0$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 = m\mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t$$

Δύναμη

- Η δύναμη ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της ορμής

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

- Και επεκτείνοντας:

$$\mathbf{f} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\mathbf{v} + m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a}$$

2^{ος} νόμος του Νεύτωνα

- Ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα λέει ότι:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\mathbf{a}$$

- Συσχετίζει την κινηματική ποσότητα της επιτάχυνσης με τη φυσική ποσότητα της δύναμης.

3^{ος} νόμος του Νεύτωνα

- Ο 3^{ος} νόμος του Νεύτωνα λέει ότι όποια δύναμη εφαρμοστεί από το σώμα A το σώμα B έχει ως αποτέλεσμα μία ίση και αντίθετη δύναμη από το B στο A

$$\mathbf{f}_{AB} = -\mathbf{f}_{BA}$$

- Ή αλλιώς δράση→αντίδραση
- Αυτός ο κανόνας είναι πολύ σημαντικός και μαζί με το δεύτερο νόμο υπονοούν την αρχή διατήρησης της ορμής

Διατήρηση της ορμής

- Κάθε κέρδος ορμής ενός σωματιδίου πρέπει να αντιστοιχεί σε μία ίση μείωση ορμής ενός άλλου σωματιδίου. Οπότε η συνολική ορμή ενός κλειστού συστήματος παραμένει σταθερή
- Συνήθως αυτός ο κανόνας δεν εφαρμόζεται αυστηρά στις προσομοιώσεις, αλλά στόχος είναι η όσο το δυνατόν μικρότερη απόκλιση
- Ακόμα, μπορεί περιστασιακά να ασκούμε δράσεις χωρίς αντιδράσεις...

Ενέργεια

- Ο παράγοντας ενέργεια είναι θεμελιώδους σημασίας στη φυσική. Η κίνηση ενός σωματιδίου μπορεί να εκφραστεί ως προς την ενέργεια
- Η ενέργεια επίσης διατηρείται σε αλληλεπιδράσεις σωματιδίων
- Συνήθως χρησιμοποιείται η απλούστερη Νευτώνια προσέγγιση και η ορμή

Δυνάμεις σε σωματίδια

- Συνήθως σε ένα σωματίδιο ασκούνται ταυτόχρονα διάφορες διανυσματικές δυνάμεις από διάφορες πηγές
- Όλες αυτές οι δυνάμεις απλά προστίθενται διανυσματικά σε μία συνολική δύναμη που δρα στο σωματίδιο

$$\mathbf{f}_{total} = \sum \mathbf{f}_i$$

Προσομοίωση σωματιδίων

- Η βασική κινηματική μας επιτρέπει να συσχετίσουμε την επιτάχυνση ενός σωματιδίου με την κίνηση που αυτή συνεπάγεται
- Οι νόμοι του Νεύτωνα μας επιτρέπουν να συσχετίσουμε την επιτάχυνση με τη δύναμη, που είναι σημαντικό διότι η δύναμη μπορεί εύκολα να περιγραφεί ως αποτέλεσμα αλληλεπιδράσεων
- Τα παραπάνω μας δίνουν ένα γενικό πλαίσιο για την προσομοίωση των σωματιδίων (αλλά και πιο πολύπλοκων αντικειμένων)

Προσομοίωση σωματιδίων

1. Υπολογισμός όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα σύμφωνα με την τρέχουσα κατάσταση (διασφάλιση ότι τηρείται ο 3^{ος} νόμος)
2. Υπολογισμός της αντίστοιχης επιτάχυνσης για κάθε σωματίδιο ($\mathbf{a}=\mathbf{f}/m$) και ολοκλήρωση για ένα μικρό χρονικό διάστημα για να λάβουμε τις νέες θέσεις

- Επανάληψη

- Ο παραπάνω αλγόριθμος περιγράφει την τυπική 'Νευτώνια' προσέγγιση της προσομοίωσης. Μπορεί να επεκταθεί σε συμπαγή αντικείμενα, παραμορφώσιμα, ρευστά, οχήματα και άλλα

Σωματίδιο – παράδειγμα

```
class Particle {  
    float Mass;          // Constant  
    Vector3 Position;    // Evolves frame to frame  
    Vector3 Velocity;    // Evolves frame to frame  
    Vector3 Force;       // Reset and re-computed each frame  
public:  
    void Update(float deltaTime);  
    void Draw();  
    void ApplyForce(Vector3 &f)    {Force.Add(f);} ;  
};
```

Σωματίδιο – παράδειγμα

```
class ParticleSystem {  
    int NumParticles;  
    Particle *P;  
public:  
    void Update(deltaTime);  
    void Draw();  
};
```

Σωματίδιο – παράδειγμα

```
ParticleSystem::Update(float deltaTime) {  
    // Compute forces  
    Vector3 gravity(0,-9.8,0);  
    for(i=0;i<NumParticles;i++) {  
        Vector3 force=gravity*Particle[i].Mass;    // f=mg  
        Particle[i].ApplyForce(force);  
    }  
  
    // Integrate  
    for(i=0;i<NumParticles;i++)  
        Particle[i].Update(deltaTime);  
}
```

Σωματίδιο – παράδειγμα

```
Particle::Update(float deltaTime) {  
    // Compute acceleration (Newton's second law)  
    Vector3 Accel=(1.0/Mass) * Force;  
  
    // Compute new position & velocity  
    Velocity+=Accel*deltaTime;  
    Position+=Velocity*deltaTime;  
  
    // Zero out Force vector  
    Force.Zero();  
}
```

Σωματίδιο – παράδειγμα

- Βάσει των παραπάνω, κάθε σωματίδιο γνωρίζει τη συνολική δύναμη που του ασκείται
- Αυτή η δύναμη μπορεί να προέρχεται από διάφορες πηγές, τόσο εσωτερικές όσο και εξωτερικές του συστήματος σωματιδίων
- Το παραπάνω παράδειγμα ήταν απλώς μία βαρυτική δύναμη, αλλά μπορεί εύκολα να επεκταθεί σε όλα τα υπόλοιπα είδη δύναμης
- Το πλαίσιο αριθμητικής ολοκλήρωσης που χρησιμοποιήθηκε καλείται 'forward Euler integration' και είναι ο πιο απλός τρόπος ολοκλήρωσης

Δυνάμεις

Βαρυτική δύναμη (ομοιόμορφη)

- Μία απλή και πολύ χρήσιμη δύναμη προκύπτει από το ομοιόμορφο βαρυτικό πεδίο:

$$\mathbf{f}_{gravity} = m\mathbf{g}_0$$

$$\mathbf{g}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -9.8 & 0 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2}$$

- Υποθέτουμε ότι οι διαστάσεις του προβλήματος σε σχέση με το μέγεθος του πλανήτη άπειρης μάζας είναι αμελητέες
- Εφόσον δεν εφαρμόζουμε αντίδραση στη δράση της βαρύτητας φαίνεται να παραβιάζουμε τον 3^ο νόμο του Νεύτωνα. Λόγω όμως της άπειρης μάζας, οι επιδράσεις της δύναμης είναι αμελητέες

Βαρύτητα

- Εάν δεν ισχύουν οι παραπάνω υποθέσεις τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{f}_{gravity} = \frac{Gm_1m_2}{d^2} \mathbf{e}$$

$$G = 6.673 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

Βαρύτητα

- Ο παραπάνω νόμος περιγράφει ίσες και αντίθετες δυνάμεις μεταξύ των αντικειμένων, όπου η δύναμη είναι ανάλογη στο γινόμενο των μαζών και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασής τους. Η δύναμη ασκείται κατά την κατεύθυνση $\mathbf{e}$ της ευθείας που συνδέει τα δύο σωματίδια.

$$\mathbf{f}_{gravity} = \frac{Gm_1m_2}{d^2} \mathbf{e} \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

Αεροδυναμική αντίσταση

- Ο ακριβής υπολογισμός της αεροδυναμικής αντίστασης είναι ιδιαίτερα πολύπλοκο πρόβλημα
- Μία λογική απλούστευση προκύπτει από τον παρακάτω τύπο:

$$\mathbf{f}_{aero} = \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 c_d a \mathbf{e} \quad \mathbf{e} = -\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

- Όπου ρ είναι η πυκνότητα του αέρα (ή νερού...), c_d είναι ο συντελεστής αντίστασης του αντικειμένου, a είναι η εγκάρσια επιφάνεια του αντικειμένου, και $\mathbf{e}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα αντίθετο της ταχύτητας.
- **Τι παραβιάζουμε;**

Αεροδυναμική αντίσταση

- Όπως και στη βαρύτητα, η αεροδυναμική αντίσταση φαίνεται να παραβιάζει τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, αφού εφαρμόζουμε μία δύναμη σε ένα σωματίδιο χωρίς να εφαρμόζουμε αντίθετη δύναμη πουθενά
- Μπορούμε να το αιτιολογήσουμε λέγοντας ότι το σωματίδιο ουσιαστικά ασκεί δύναμη στον περιβάλλοντα αέρα, αλλά υποθέτουμε ότι η κίνηση αυτή αποσβαίνει γρήγορα λόγω του ιξώδους του αέρα

Ελατήρια

- Μία δύναμη από ένα ελατήριο μπορεί να περιγραφεί ως:

$$\mathbf{f}_{spring} = -k_s \mathbf{x}$$

- Όπου k είναι η 'σταθερά ελατηρίου' και $\mathbf{x}$ ένα διάνυσμα που περιγράφει μετατόπιση

Ελατήρια

- Στην πράξη είναι πολλές φορές χρήσιμο να ορίσουμε ένα ελατήριο που συνδέει δύο σωματίδια και έχει ένα συγκεκριμένο φυσικό μήκος για το οποίο η δύναμη είναι 0
- Οπότε είναι :

$$\mathbf{x} = x\mathbf{e}$$

$$x = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| - l \quad (\text{βαθμωτή μετατόπιση})$$

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (\text{κατεύθυνση μετατόπισης})$$

Ελατήρια

- Αφου τα ελατήρια ασκούν ίσες και αντίθετες δυνάμεις στα δύο σωματίδια πρέπει να υπακούουν και στη διατήρηση της ορμής
- Ακόμα τα ελατήρια μπορούν να αποθηκεύσουν ενέργεια, αφού η κινητική ενέργεια της κίνησης μπορεί να αποθηκευτεί σε ενέργεια παραμόρφωσης του ελατηρίου και στη συνέχεια να ανακτηθεί και πάλι
- Στην πράξη, η απλή αυτή υλοποίηση διατηρεί την ορμή εξ ορισμού
- Παρόλα αυτά δεν εγγυάται ότι υπακούει στην αρχή διατήρησης της ενέργειας, και στην πράξη μπορεί να δούμε σταδιακή αύξηση ή μείωση της ενέργειας
- Μία σταδιακή μείωση σημαίνει ότι το σύστημα αποσβαίνει και ίσως φτασει σε ηρεμία. Μία σταδιακή αύξηση όμως δεν είναι κάτι καλό...

Αποσβέσεις

- Μπορούν να χρησιμοποιηθούν και δυνάμεις απόσβεσης μεταξύ των σωματιδίων:

$$\mathbf{f}_{damp} = -k_d \mathbf{v}$$

- Οι αποσβέσεις αντιτίθενται σε οποιαδήποτε διαφορά ταχύτητας μεταξύ των σωματιδίων
- Οι δυνάμεις απόσβεσης είναι ίσες και αντίθετες, οπότε διατηρούν την ορμή, αλλά αφαιρούν ενέργεια από το σύστημα
- Που πάει αυτή η ενέργεια;
- Σε πραγματικές αποσβέσεις, η κινητική ενέργεια μεταφέρεται σε πολύπλοκη κίνηση του ρευστού μέσα στον αποσβεστήρα και τελικά σε τυχαία σωματιδιακή κίνηση που προκαλεί αύξηση της θερμότητας. Πρακτικά χάνεται η κινητική ενέργεια.

Αποσβεστήρες

- Οι αποσβεστήρες λειτουργούν όμοια με τα ελατήρια. Συνήθως τα παραπάνω συνδυάζονται σε συστήματα ελατηρίου-αποσβεστήρα
- Παράδειγμα απλού ζεύγους ελατηρίου-αποσβεστήρα :

```
class SpringDamper {  
    float SpringConstant,DampingFactor;  
    float RestLength;  
    Particle *P1,*P2;  
public:  
    void ComputeForce();  
};
```

Αποσβεστήρες

- Για τον υπολογισμό της δύναμης απόσβεσης, πρέπει να γνωρίζουμε την ταχύτητα σύγκλισης των δύο σωματιδίων που είναι η σχετική τους ταχύτητα κατά μήκος του άξονα που τα συνδέει

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

$$v = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{e} - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{e}$$

Αποσβεστήρες

- Ένα άλλος τρόπος να υπολογίσουμε την ταχύτητα σύγκλισης είναι να υπολογίσουμε την απόστασή τους σε σχέση με την απόστασή τους το προηγούμενο καρέ

$$v = \frac{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| - d_0}{\Delta t}$$

- Η διαφορά είναι ότι εδώ ο υπολογισμός της παραγώγου είναι αριθμητικός, ενώ η προηγούμενη λύση ήταν ένας ακριβής αναλυτικός υπολογισμός

Αποσβεστήρες

- Η αναλυτική λύση είναι προτιμητέα για πολλούς λόγους:
 - Δεν απαιτεί επιπλέον χώρο αποθήκευσης
 - Ευκολότερο να ξεκινήσουμε την προσομοίωση (δεν απαιτεί δεδομένα από το προηγούμενο καρέ)
 - Δίνει ακριβές αποτέλεσμα αποτέλεσμα αντί για προσέγγιση
- Αυτό το θέμα εμφανίζεται πολλές φορές σε προσομοιώσεις βάσει φυσικής

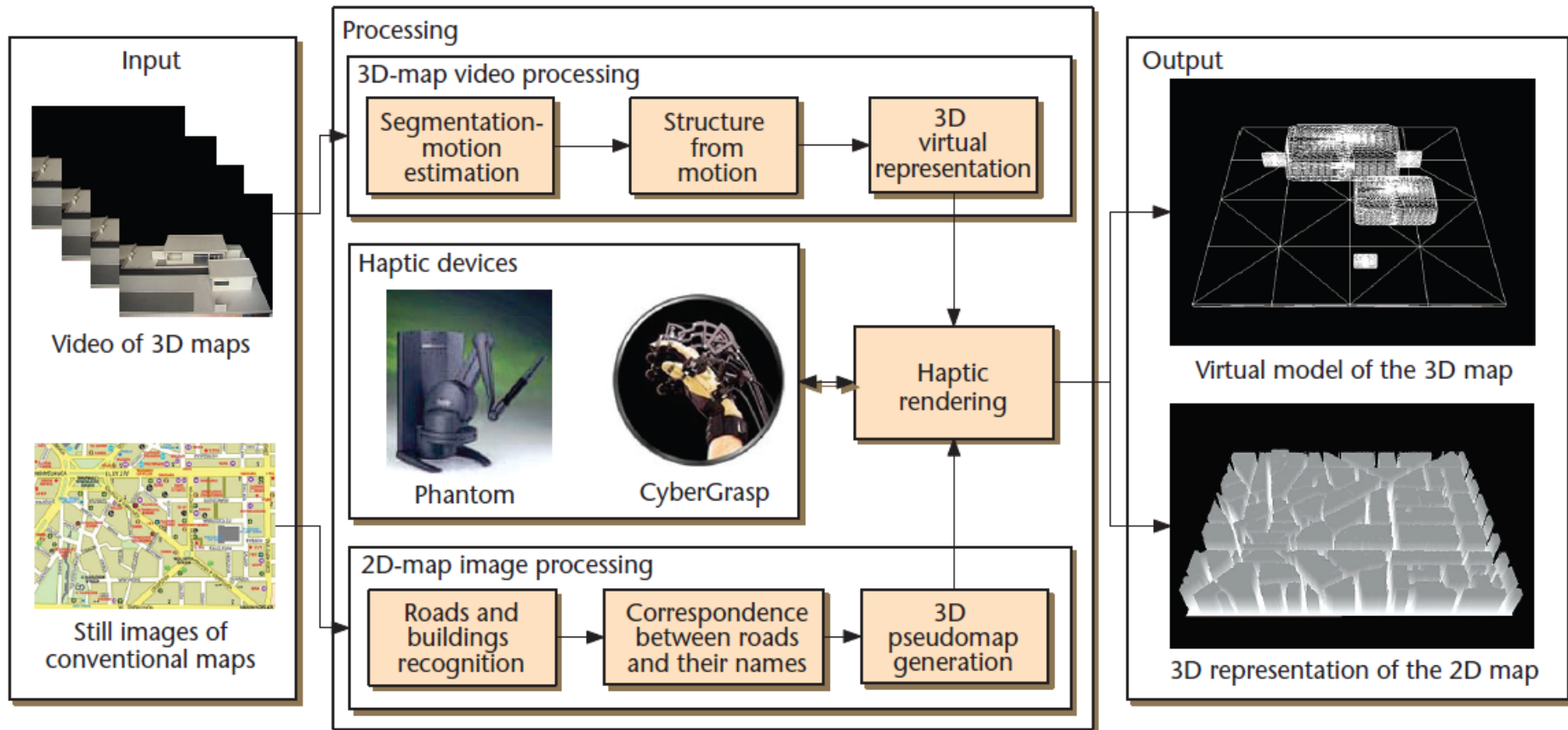
Πεδία δυνάμεων

- Μπορούμε να ορίσουμε και ένα τυχαίο πεδίο δυνάμεων ανάλογα με την εφαρμογή. Για παράδειγμα, μπορεί να επιλέξουμε ένα πεδίο δυνάμεων όπου η δύναμη είναι συνάρτηση της θέσης στο πεδίο

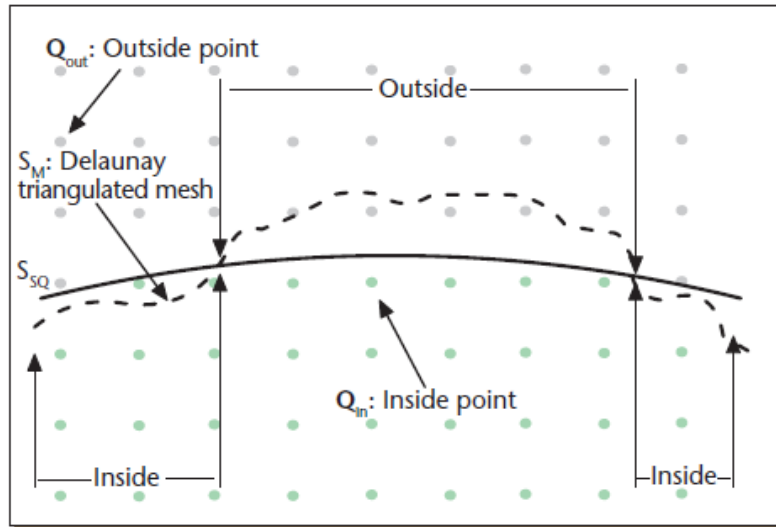
$$\mathbf{f}_{field} \propto \mathbf{f}(\mathbf{r})$$

- Μπορούμε ακόμα να ορίσουμε την ταχύτητα του αέρα με ένα αντίστοιχο πεδίο και να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση αεροδυναμικής αντίστασης για τον υπολογισμό της δύναμης στη συγκεκριμένη θέση
- Distance fields $\rightarrow$ Force fields

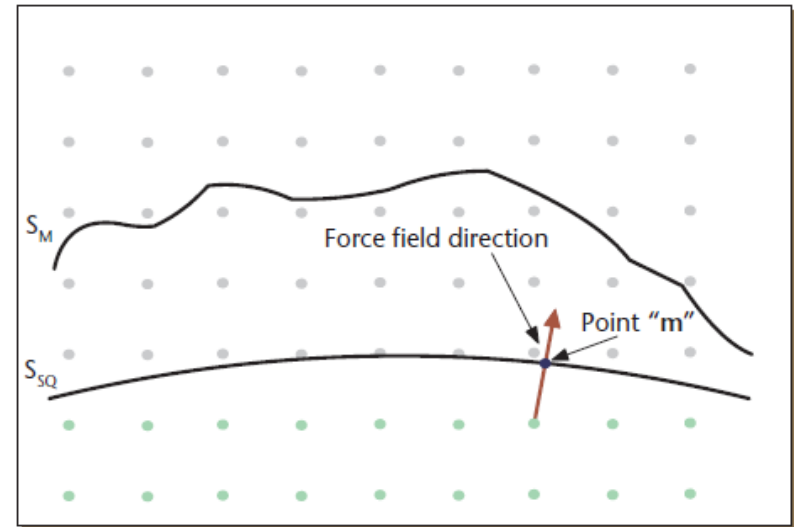
Πεδία δυνάμεων – Παράδειγμα



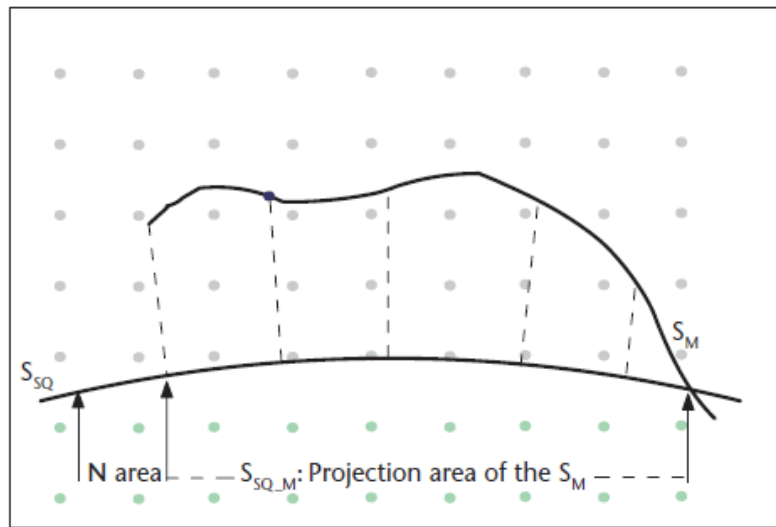
Πεδία δυνάμεων – Παράδειγμα



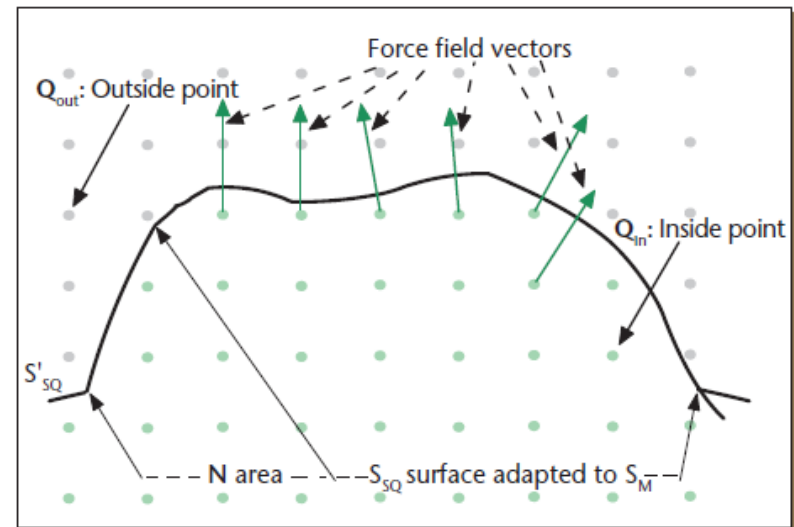
(a)



(b)



(c)



(d)

Συγκρούσεις & ώσεις

- Μία σύγκρουση συμβαίνει σε μία χρονική στιγμή
- Όμως η δύναμη που απαιτείται για να αλλάξει την ορμή ενός αντικειμένου, πρέπει να δρα σε ένα χρονικό διάστημα
- Για αυτό δεν μπορούμε να χρησιμοποιούμε απλά δυνάμεις για να προσομοιώσουμε συγκρούσεις.
- Αντίθετα ορίζουμε την έννοια της ώσης, η οποία μπορεί να θεωρηθεί σαν μία μεγάλη δύναμη που ασκείται για ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα

Ώσεις

- Μία ώση μπορεί να θεωρηθεί σαν το ολοκλήρωμα μίας δύναμης σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα, το οποίο έχει ως αποτέλεσμα πεπερασμένη μεταβολή της ορμής:

$$\mathbf{j} = \int \mathbf{f} dt = \Delta \mathbf{p}$$

- Μία ώση συμπεριφέρεται σαν μία δύναμη, εκτός του ότι αντί να επιδρά στην επιτάχυνση, επηρεάζει απευθείας την ταχύτητα
- Οι ώσεις υπακούουν τον 3^ο νόμο του Νεύτωνα, οπότε τα αντικείμενα ανταλλάσσουν ίσες και αντίθετες ώσεις
- Ακόμα, όπως και στις δυνάμεις, μπορούμε να υπολογίσουμε συνολική ώση ως άθροισμα διακριτών ώσεων

Ώση

- Η προσθήκη ώσεων απαιτεί μία μικρή τροποποίηση στον αλγόριθμο προσομοίωσής μας:

// Υπολογισμός δυνάμεων και ώσεων

$$\mathbf{f} = \sum \mathbf{f}_i$$

$$\mathbf{j} = \sum \mathbf{j}_i$$

// Ολοκλήρωση για τον υπολογισμό

// ταχύτητας και θέσης

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_0 + \frac{1}{m}(\mathbf{f}\Delta t + \mathbf{j})$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}'\Delta t$$

Συγκρούσεις

- Έστω το απλό πρόβλημα ενός σωματιδίου που συγκρούεται με ένα στατικό αντικείμενο
- Το σωματίδιο είχε ταχύτητα $\mathbf{v}$ πριν τη σύγκρουση και συγκρούεται με επιφάνεια κάθετου διανύσματος $\mathbf{n}$
- Θέλουμε να βρούμε την ώση σύγκρουσης $\mathbf{j}$ που εφαρμόζεται στο σωματίδιο λόγω της σύγκρουσης

Ελαστικότητα

- Υπάρχουν πολλές φυσικές θεωρίες για τις συγκρούσεις
- Θα κάνουμε κάποιες υποθέσεις που απλοποιούν το πρόβλημα
- Έστω μία παράμετρος που την ονομάζουμε ελαστικότητα που παίρνει τιμές από 0 έως 1, και περιγράφει την ενέργεια που ανακτάται μετά τη σύγκρουση
- Τιμή ελαστικότητας 0 σημαίνει ότι η ταχύτητα σύγκλισης μετά τη σύγκρουση είναι 0
- Τιμή 1 υποδυκνύει ότι η ταχύτητα σύγκλισης μετά τη σύγκρουση είναι ακριβώς η αντίθετη από ότι πριν τη σύγκρουση

Συγκρούσεις

- Έστω μία σύγκρουση χωρίς τριβή
- Η ώση της σύγκρουσης θα είναι κάθετη στο επίπεδο σύγκρουσης (δηλαδή κατά μήκος του κανονικού διανύσματος)

$$v_{close} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$$

$$\mathbf{j} = -(1 + e)mv_{close}\mathbf{n}$$

Συνδυασμός δυνάμεων

- Όλες οι δυνάμεις που έχουμε δει μπορούν να συνδυαστούν απλά προσθέτοντάς τις
- Οπότε η ολική δύναμη που ασκείται σε ένα σωματίδιο είναι το άθροισμα όλων των επιμέρους δυνάμεων
- Σε κάθε καρέ υπολογίζονται όλες οι δυνάμεις του συστήματος την τρέχουσα χρονική στιγμή
- Στη συνέχεια «σπρώχνουμε» το σύστημα προς το μέλλον κατά Δt

Ολοκλήρωση

Ολοκλήρωση

- Ο υπολογισμός των θέσεων και των ταχυτήτων από τις επιταχύνσεις απαιτεί ολοκλήρωση
- Εάν οι επιταχύνσεις ορίζονται από πολύ απλές εξισώσεις (όπως η ομοιόμορφη επιτάχυνση), τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αναλυτικά και να υπολογίσουμε την ακριβή θέση για κάθε t
- Στην πράξη οι δυνάμεις είναι πολύπλοκες και η αναλυτική ολοκλήρωση είναι αδύνατη. Για αυτό το λόγο ασχολούμαστε πρακτικά με αριθμητικές μεθόδους
- Η συνάρτηση `Particle::Update()` που περιγράφηκε προηγουμένως υπολογίζει μία επανάληψη της αριθμητικής ολοκλήρωσης χρησιμοποιώντας τη μέθοδο 'forward Euler'

Forward Euler ολοκλήρωση

- Η ολοκλήρωση Forward Euler είναι ο απλούστερος τρόπος αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$x_{n+1} = x_n + x'_n \Delta t$$

- Χρησιμοποιεί τη γραμμική κλίση της παραγώγου σε κάποιο σημείο ως πρόβλεψη της συνάρτησης στη γειτονιά του σημείου

Forward Euler ολοκλήρωση

- Για τις θέσεις των σωματιδίων χρειάζεται να ολοκληρώσουμε δύο φορές

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \mathbf{a}_n \Delta t$$

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \mathbf{v}_{n+1} \Delta t$$

οπότε προκύπτει

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{n+1} &= \mathbf{r}_n + (\mathbf{v}_n + \mathbf{a}_n \Delta t) \Delta t \\ &= \mathbf{r}_n + \mathbf{v}_n \Delta t + \mathbf{a}_n (\Delta t)^2\end{aligned}$$

Forward Euler ολοκλήρωση

- Βλέπουμε ότι η παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \mathbf{v}_n \Delta t + \mathbf{a}_n (\Delta t)^2$$

είναι όμοια με το αποτέλεσμα που θα παίρναμε αν υποθέταμε ότι το σωματίδιο υπόκειται σταθερής επιτάχυνσης για ένα καρέ:

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \mathbf{v}_n \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{a}_n (\Delta t)^2$$

Forward Euler ολοκλήρωση

- Μπορεί να δουλέψει και με τους δύο τρόπους
- Και οι δύο μέθοδοι κάνουν υποθέσεις για το τι γίνεται στο πεπερασμένο διάστημα μεταξύ δύο στιγμιότυπων. Και οι δύο είναι αριθμητικές προσεγγίσεις της πραγματικότητας
- Όταν το Δt πλησιάζει στο 0, οι δύο μέθοδοι γίνονται ισοδύναμες
- Για πεπερασμένο βέβαια Δt , έχουν σημαντικές διαφορές στη συμπεριφορά τους, ιδιαίτερα όσον αφορά ακρίβεια στο χρόνο και διατήρηση της ενέργειας
- Σε γενικές γραμμές η μέθοδος forward Euler δουλεύει καλύτερα
- Υπάρχουν πάρα πολλοί διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούμε να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα για να βελτιώσουμε την ακρίβεια, την ευστάθεια και την αποδοτικότητα

Forward Euler ολοκλήρωση

- Η μέθοδος forward Euler είναι πολύ απλή στην υλοποίηση και αν οδηγεί σε ανεκτά αποτελέσματα τότε μπορεί να μας φανεί πολύ χρήσιμη
- Είναι αρκετά καλή για αρκετά σωματιδιακά συστήματα αλλά όχι τόσο σε εφαρμογές γραφικών που απαιτούν ακρίβεια
- Ακόμα οδηγεί σε προβλήματα σε περιπτώσεις όπου οι δυνάμεις αλλάζουν πολύ γρήγορα και η γραμμική προσέγγιση της επιτάχυνσης δεν είναι ακριβής

Forward Euler ολοκλήρωση

- Ένα παράδειγμα όπου η μέθοδος αποτυγχάνει είναι όταν έχουμε πολύ ισχυρά ελατήρια
- Μία μικρή κίνηση οδηγεί σε μία μεγάλη δύναμη
- Όταν ολοκληρώσουμε την παραπάνω δύναμη με μεγάλα Δt μπορεί να οδηγηθούμε σε αστάθεια «έκρηξη»
- Για αυτό χρειαζόμαστε πολύ μικρά βήματα έτσι ώστε να είναι αρκετά ακριβής η γραμμική προσέγγιση
- Αυτή η ανάγκη για πολλά μικρά βήματα είναι ο λόγος που η πολύ απλή αυτή μέθοδος μπορεί να είναι πιο αργή από πιο πολύπλοκες μεθόδους ολοκλήρωσης ανά επανάληψη, οι οποίες όμως απαιτούν λιγότερες επαναλήψεις

Συστήματα σωματιδίων

Συστήματα σωματιδίων

- Στα γραφικά, τα συστήματα σωματιδίων μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε πάρα πολλές εφαρμογές, οπότε και οι κανόνες της συμπεριφοράς τους ποικίλουν
- Σημαντική είναι η κατανόηση της φυσικής, αλλά δεν πρέπει πάντα να περιοριζόμαστε από αυτήν!!!
- Εκτός από τη φυσική της σωματιδιακής κίνησης, πολλά άλλα θέματα πρέπει να ληφθούν υπόψη που αφορούν την προσομοίωση κίνησης

Σωματίδια

- Στη φυσική, ένα σωματίδιο ορίζεται από τη θέση του, την ταχύτητα και τη μάζα του
- Στην προσομοίωση κίνησης μπορεί να θέλουμε να προσθέσουμε και άλλες ιδιότητες:
 - Χρώμα
 - Μέγεθος
 - Διάρκεια ζωής
 - Και οτιδήποτε άλλο...

Δημιουργία & Καταστροφή

- Πολλές φορές έχουμε να κάνουμε με σταθερό αριθμό σωματιδίων
- Άλλες φορές είναι σημαντικό να μπορούμε να δημιουργούμε και να καταστρέφουμε σωματίδια σε πραγματικό χρόνο
- Άλλες φορές έχουμε συστήματα σωματιδίων που δημιουργούν σωματίδια με σταθερό ρυθμό
- Τα νέα σωματίδια έχουν αρχικές συνθήκες σύμφωνα με κάποιους κανόνες
- Στη συνέχεια τα σωματίδια έχουν συγκεκριμένη διάρκεια ζωής έως ότου καταστραφούν (βάσει κάποιου άλλου κανόνα)

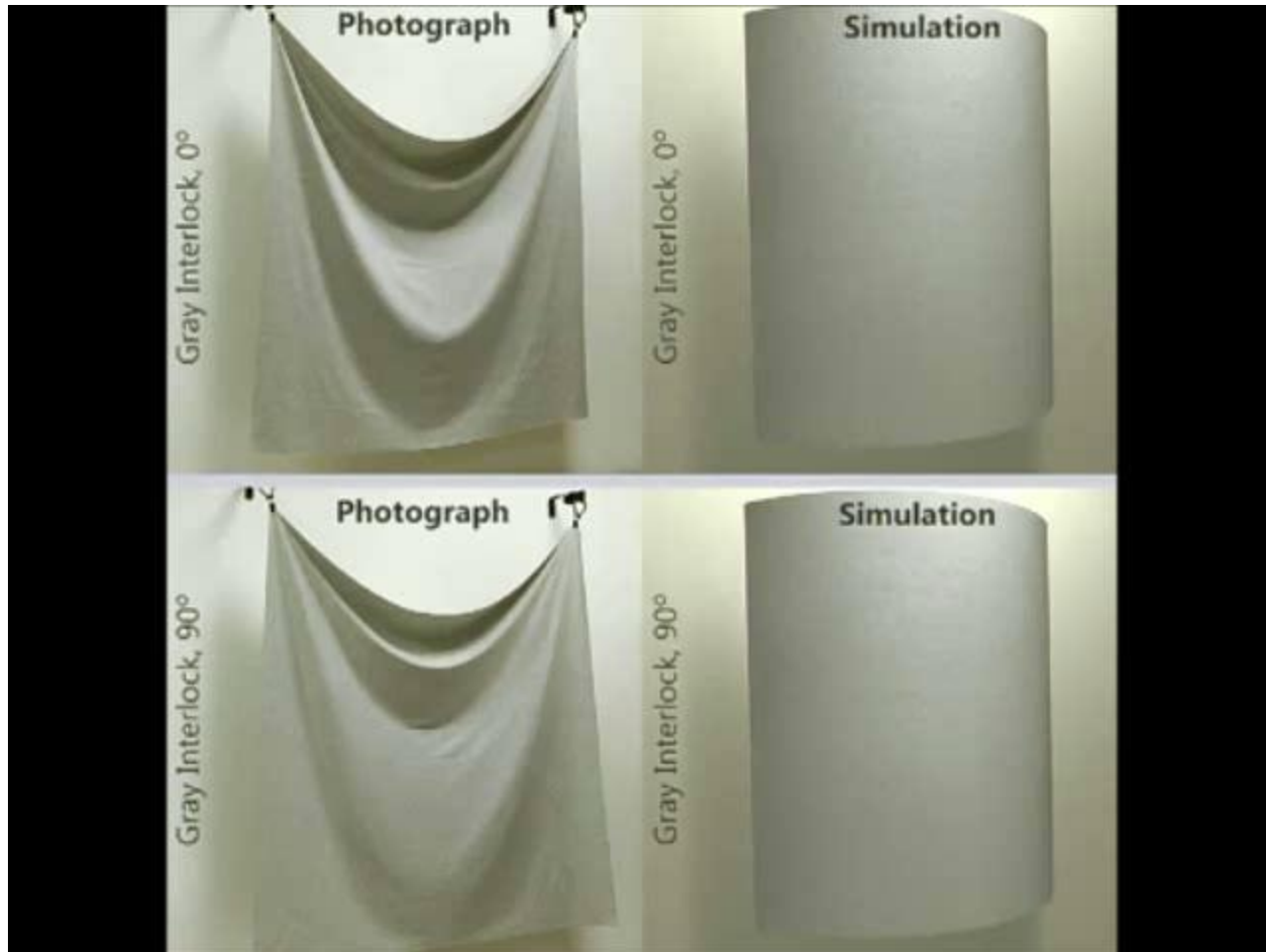
Σχεδίαση σωματιδίων

- Τα σωματίδια μπορούν να σχεδιαστούν με διάφορες τεχνικές
 - Σημεία
 - Ευθύγραμμα τμήματα (προηγούμενη θέση-τρέχουσα θέση)
 - Sprites (τετράπλευρα με υφή προσανατολισμένα προς την κάμερα)
 - Γεωμετρία (μικρά αντικείμενα...)
 - Άλλες τεχνικές...
- Όσον αφορά τη σωματιδιακή φυσική υποθέτουμε ότι τα σωματίδια έχουν θέση αλλά όχι προσανατολισμό. Όσον αφορά τη σχεδίαση όμως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και πληροφορία προσανατολισμού, περιστροφικής κίνησης, κλπ

Εφαρμογή

Παραμορφώσιμες επιφάνειες (ΠΕ)
Cloth simulation

Παραμορφώσιμες επιφάνειες



Παραμορφώσιμες επιφάνειες

- Η προσομοίωση ΠΕ αποτελεί τομέα αιχμής των γραφικών από το 1980's
- Έχει ερευνηθεί διεξοδικά και σήμερα υπάρχουν πολλές αποδοτικές υλοποιήσεις
- Θα δούμε ένα απλό παράδειγμα προσομοίωσης ΠΕ. Είναι απλό, υλοποιείται εύκολα με ικανοποιητικά αποτελέσματα. Θα κάνουμε και αναφορά σε κάποια πιο πολύπλοκα θέματα της προσομοίωσης ΠΕ.

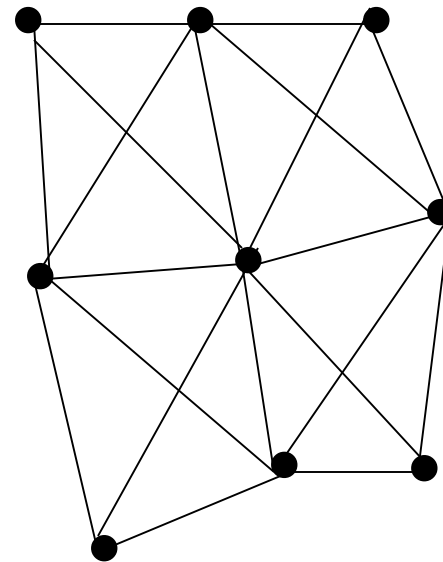
ΠΕ με ελατήρια

- Θα θεωρήσουμε την παραμορφώσιμη επιφάνεια ως ένα σύστημα σωματιδίων τα οποία είναι ενωμένα με ελατήρια-αποσβεστήρες (E-A)
- Κάθε E-A συνδέει δύο σωματίδια, και παράγει δυνάμεις βάσει της θέσης και της ταχύτητάς τους
- Κάθε σωματίδιο επηρεάζεται επίσης από τη βαρυτική δύναμη
- Με αυτές τις τρεις απλές δυνάμεις (βαρύτητα, ελατήριο & αποσβεστήρας), ορίζουμε τη βάση του συστήματος της ΠΕ
- Στη συνέχεια μπορούμε να προσθέσουμε και άλλες ενδιαφέρουσες δυνάμεις όπως αεροδυναμική, αντίσταση στην κάμψη, συγκρούσεις, πλαστική παραμόρφωση...

Προσομοίωση ΠΕ

- Σωματίδιο

E-A



Σωματίδιο

$\mathbf{r}$: θέση

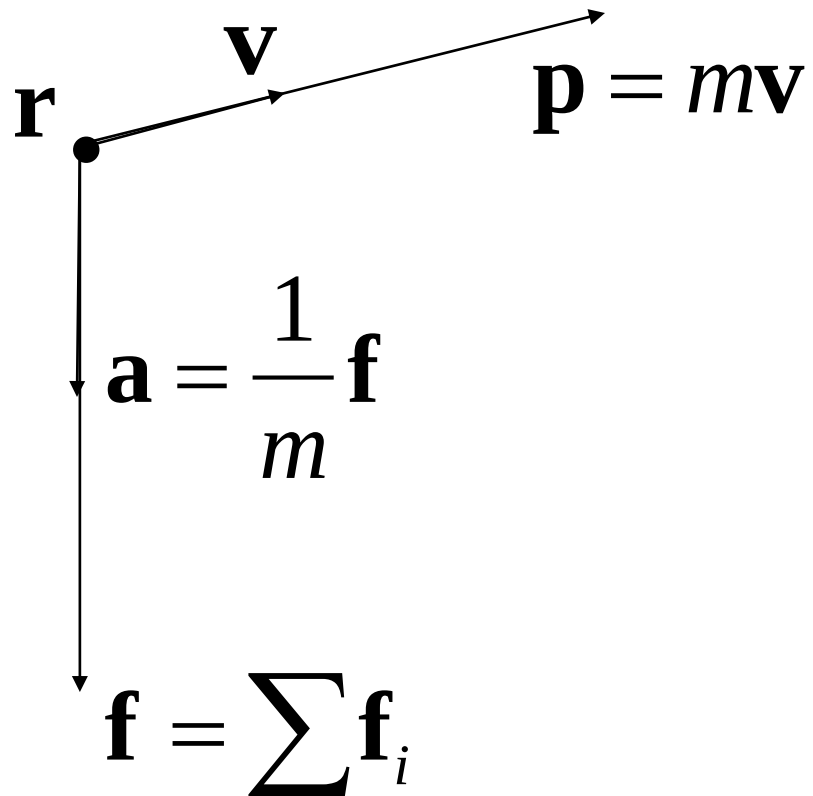
$\mathbf{v}$: ταχύτητα

$\mathbf{a}$: επιτάχυνση

m : μάζα

$\mathbf{p}$: ορμή

$\mathbf{f}$: δύναμη



Euler ολοκλήρωση

- Αφού έχουμε υπολογίσει όλες τις δυνάμεις στο σύστημα χρησιμοποιούμε το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για τον υπολογισμό των επιταχύνσεων

$$\mathbf{a}_n = \frac{1}{m} \mathbf{f}_n$$

- Μετά, χρησιμοποιούμε την επιτάχυνση για να «προχωρήσουμε» την προσομοίωση κατά Δt , χρησιμοποιώντας την ολοκλήρωση Euler

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \mathbf{a}_n \Delta t$$

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \mathbf{v}_{n+1} \Delta t$$

Προσομοίωση φυσικής

Γενική προσομοίωση φυσικής:

1. Υπολογισμός δυνάμεων
 2. Ολοκλήρωση κίνησης
- Επανάληψη

Προσομοίωση ΠΕ

1. Υπολογισμός δυνάμεων

Για κάθε σωματίδιο: Εφαρμογή βαρύτητας

Για κάθε E-A: Υπολογισμός & εφαρμογή δυνάμεων

Για κάθε τρίγωνο: Υπολογισμός & εφαρμογή
αεροδυναμικών δυνάμεων

2. Ολοκλήρωση κίνησης

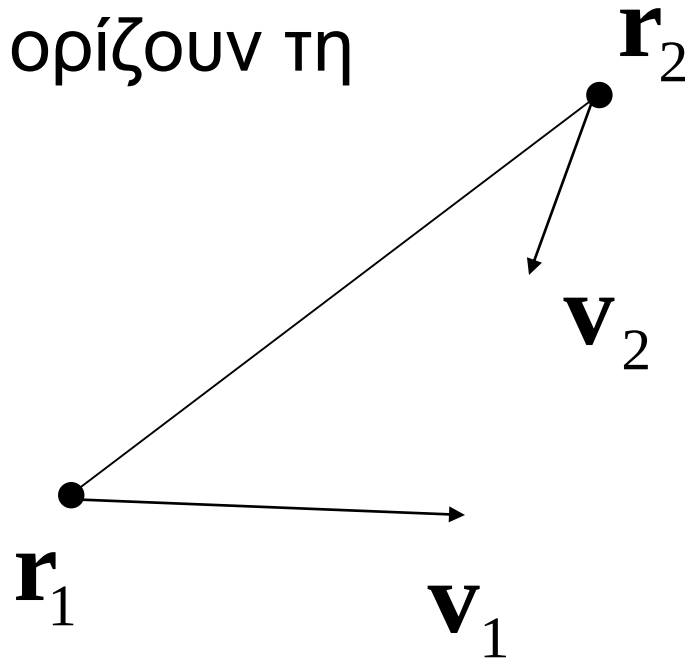
Για κάθε σωματίδιο: Εφαρμογή forward Euler
ολοκλήρωσης

Ομοιόμορφη βαρύτητα

$$\mathbf{f}_{gravity} = m\mathbf{g}_0$$

$$\mathbf{g}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -9.8 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{m}{s^2}$$

- Το ζεύγος E-A συνδέει δύο σωματίδια και έχει τρεις σταθερές που ορίζουν τη συμπεριφορά του
 - Σταθερά ελατηρίου: k_s
 - Σταθερά απόσβεσης: k_d
 - Φυσικό μήκος: l_0



E-A

- Παράδειγμα υλοποίησης:

```
class SpringDamper {  
    float SpringConstant,DampingFactor;  
    float RestLength;  
    Particle *P1,*P2;  
public:  
    void ComputeForce();  
};
```


E-A

- Η δύναμη του ελατηρίου σε μία διάσταση είναι:

$$f_{spring} = -k_s x = -k_s (l_0 - l)$$

- Η γραμμική δύναμη απόσβεσης είναι:

$$f_{damp} = -k_d v = -k_d (v_1 - v_2)$$

- Μπορούμε να ορίσουμε ένα ζεύγος E-A προσθέτοντας τις παραπάνω:

$$f_{sd} = -k_s (l_0 - l) - k_d (v_1 - v_2)$$

E-A

- Για τον υπολογισμό δυνάμεων στις 3D:
 - Μετατροπή των 3D αποστάσεων & ταχυτήτων σε 1D
 - Υπολογισμός δύναμης E-A σε 1D
 - Επαναφορά της 1D δύναμης στις 3D

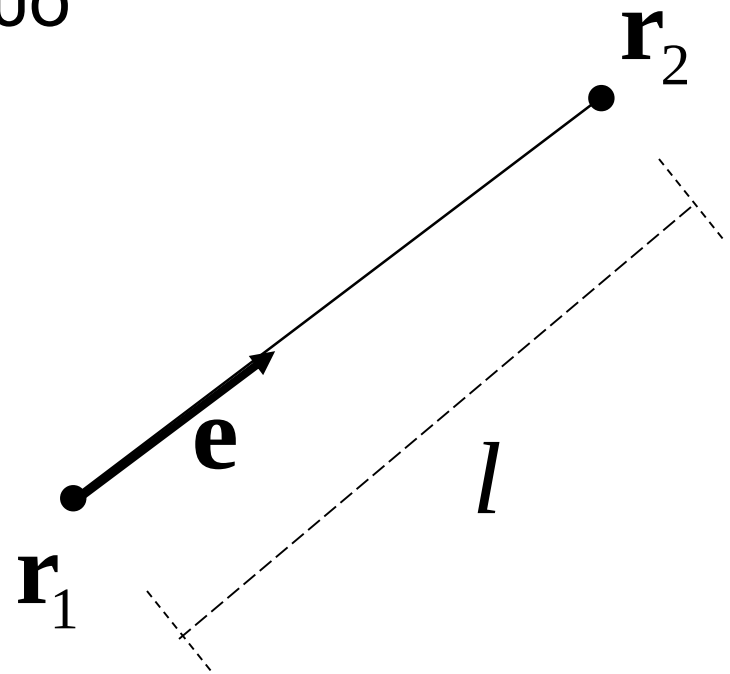
Δύναμη E-A

- Αρχικά υπολογίζουμε το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{e}$ από το $\mathbf{r}_1$ στο $\mathbf{r}_2$
- Μπορούμε να υπολογίσουμε έτσι και την απόσταση l μεταξύ των δύο σημείων

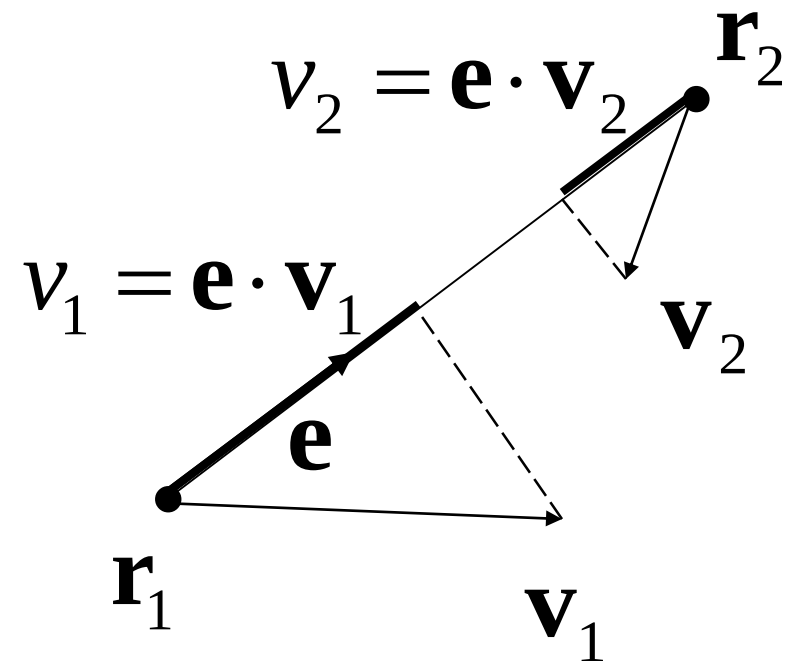
$$\mathbf{e}^* = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

$$l = |\mathbf{e}^*|$$

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{e}^*}{l}$$



- Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις 1D ταχύτητες



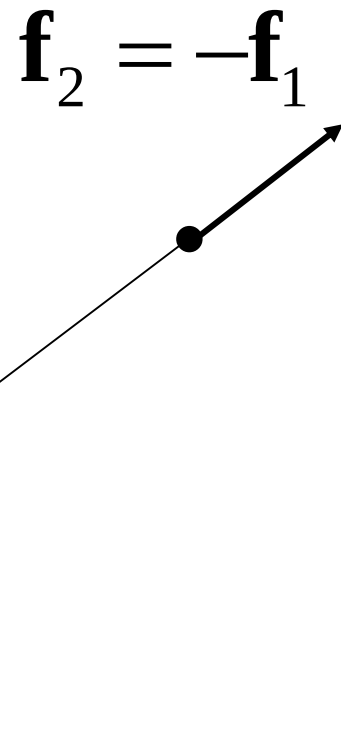
- Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε την 1D δύναμη και να τη μετατρέψουμε σε 3D

$$f_{sd} = -k_s(l_0 - l) - k_d(v_1 - v_2)$$

$$\mathbf{f}_1 = f_{sd} \mathbf{e}$$

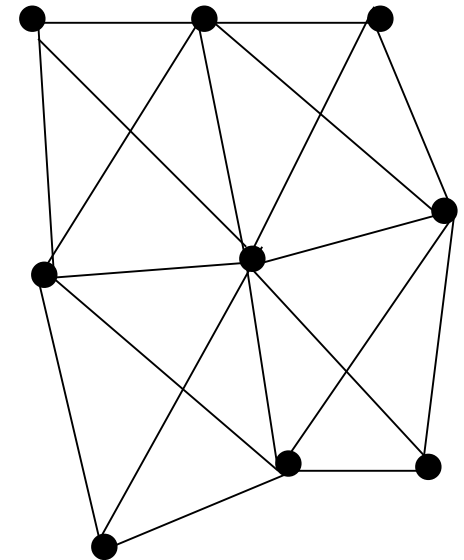
$$\mathbf{f}_2 = -\mathbf{f}_1$$

$$\mathbf{f}_1 = f_{sd} \mathbf{e}$$



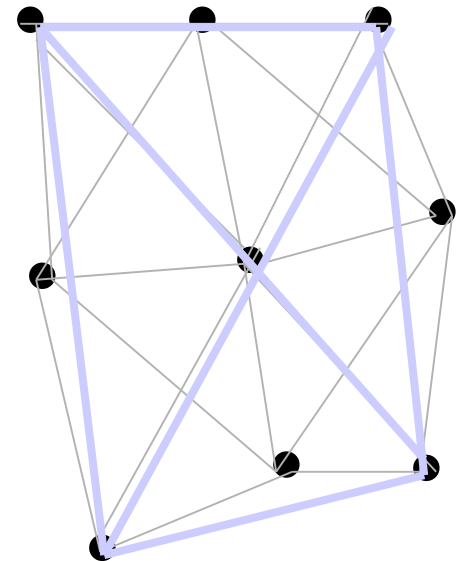
Δύναμη κάμψης (bending)

- Εάν χρησιμοποιήσουμε ελατήρια όπως φαίνεται στη διπλανή εικόνα, δε θα υπάρχει κάτι που να εμποδίζει την κάμψη
- Αυτό μπορεί να είναι ρεαλιστικό για μαλακές επιφάνειες αλλά για τα περισσότερα υλικά χρειάζεται να προσθέσουμε αντίσταση στην κάμψη
- Πώς;

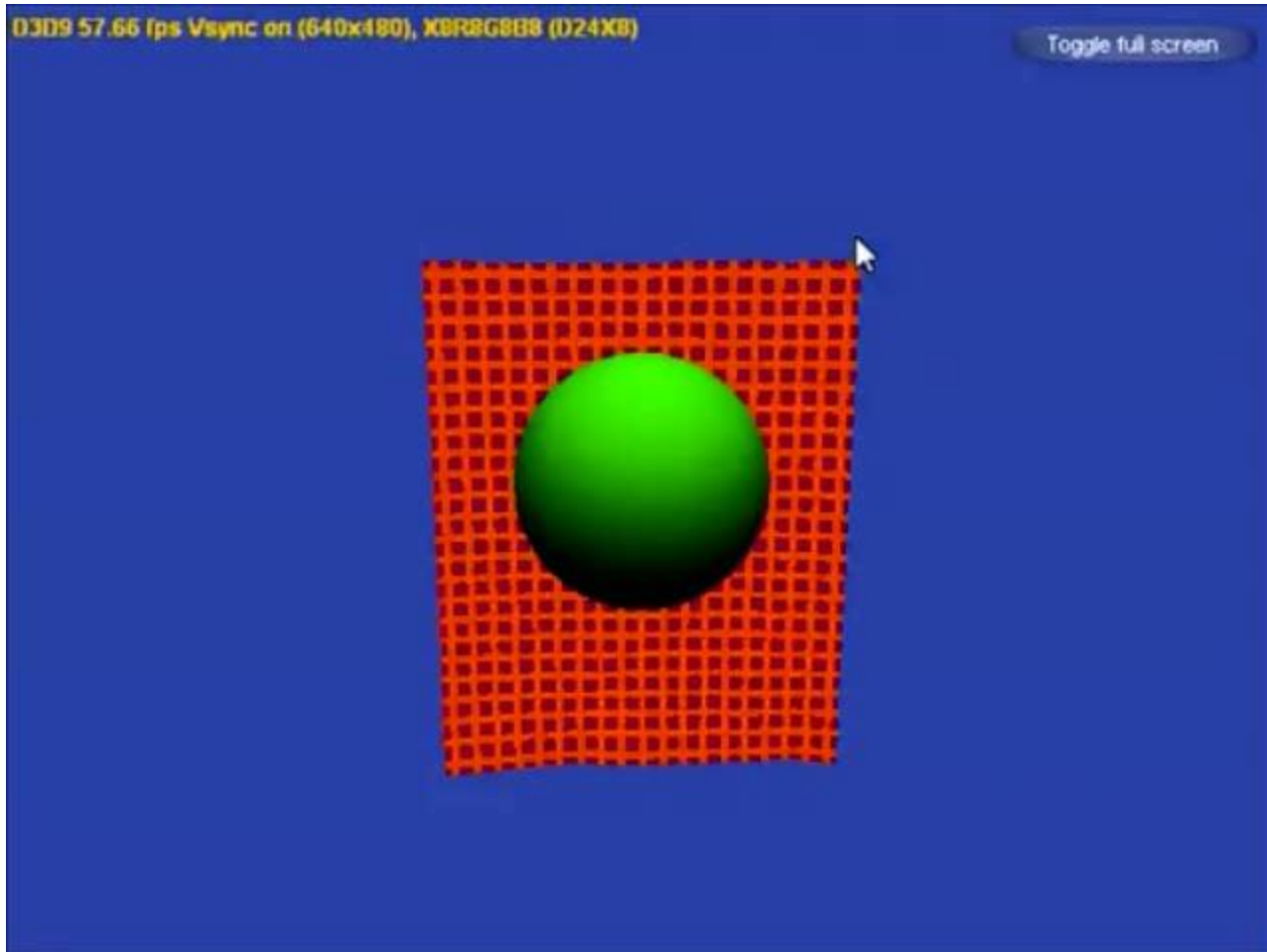


Δύναμη κάμψης (bending)

- Μία λύση είναι να προσθέσουμε επιπλέον ελατήρια όπως φαίνεται στη διπλανή εικόνα
- Οι σταθερές των ελατηρίων πρέπει προφανώς να ρυθμίζονται με διαφορετικό τρόπο



Δύναμη κάμψης (bending)

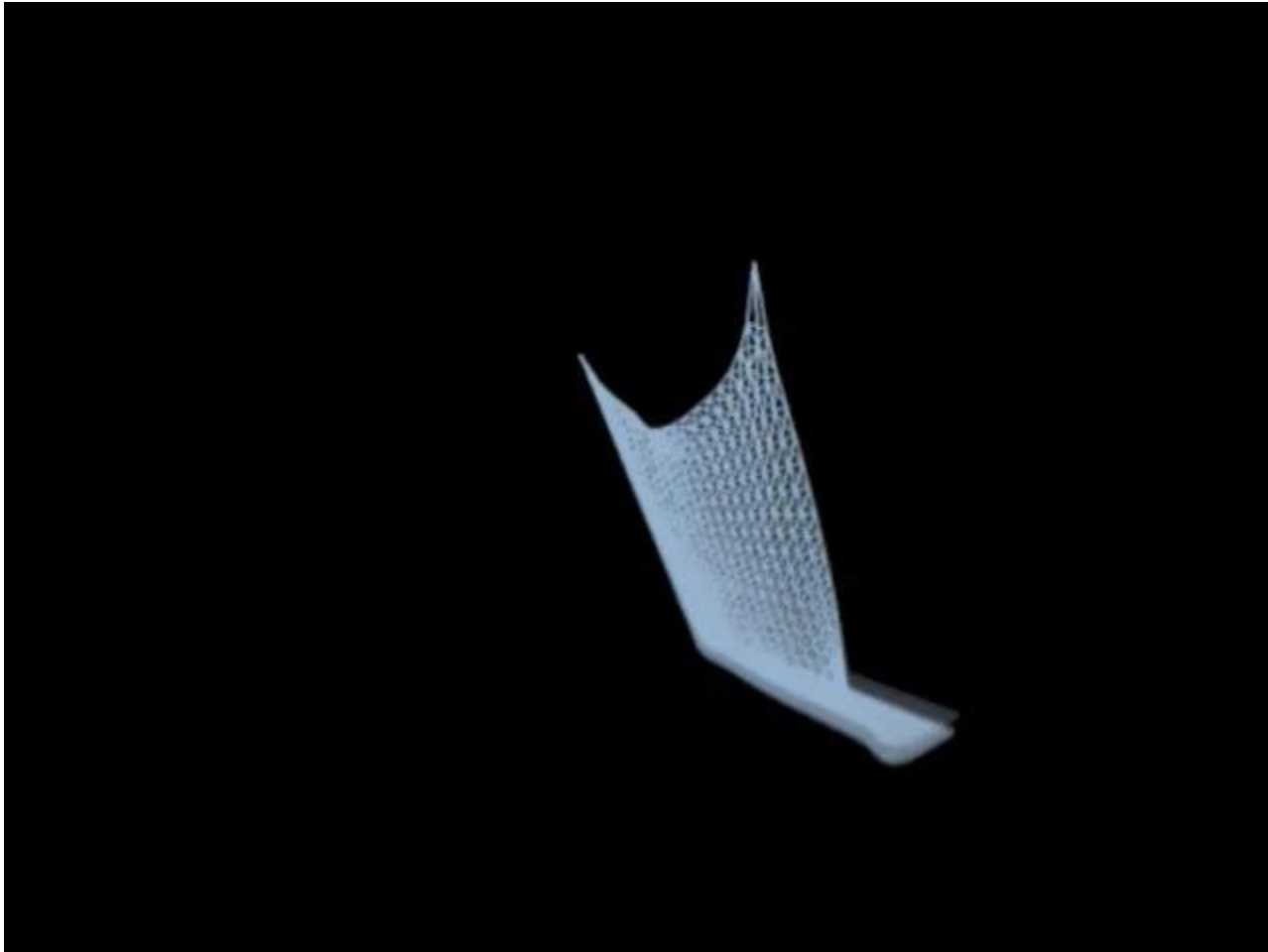


Συγκρούσεις

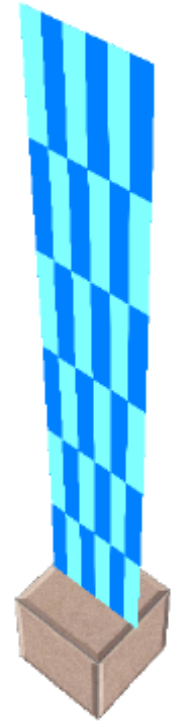
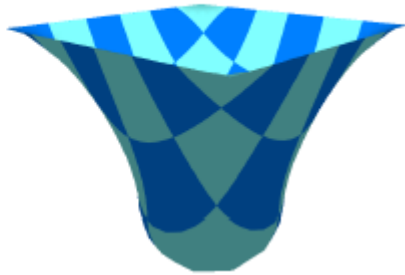
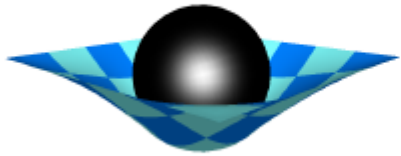
- Απλό παράδειγμα για σύγκρουση με το επίπεδο $y=y_0$

```
if(r.y < y0) {  
    v.y = - elasticity * v.y;  
    v.x = (1-friction) * v.x;  
    v.z = (1-friction) * v.z;  
}
```

Υπερελαστικότητα



Υπερ-ελαστικότητα



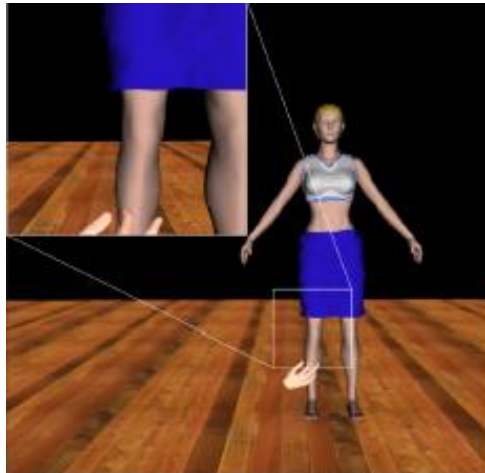
Πλαστική παραμόρφωση

- Μία ελαστική παραμόρφωση θα επαναφέρει το αντικείμενο στην αρχική του κατάσταση όταν μηδενιστούν όλες οι εξωτερικές δυνάμεις (όπως η παραμόρφωση ενός ελατηρίου ή μίας ελαστικής μπάλας)
- Σε μία πλαστική παραμόρφωση αλλάζει μόνιμα η δομή του υλικού

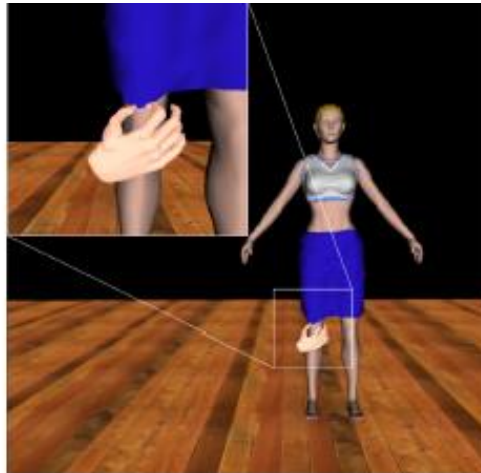
Πλαστική παραμόρφωση

- Μπορούμε να προσθέσουμε απλούς κανόνες πλαστικής παραμόρφωσης στα E-A
- ...αλλάζοντας το φυσικό μήκος.
- Μπορεί να οριστεί ένα ελαστικό όριο και ένα πλαστικό όριο
- Το ελαστικό όριο είναι η μέγιστη επιτρεπτή παραμόρφωση πριν αρχίσει η πλαστική παραμόρφωση
- Εάν φτάσουμε στο ελαστικό όριο επηρεάζεται πλέον το φυσικό μήκος
- Χρησιμοποιούμε και ένα πλαστικό όριο που εμποδίζει το υλικό στο να παραμορφωθεί πέρα από κάποιο συγκεκριμένο όριο
- Το πλαστικό όριο ορίζει κατά πόσο μπορούμε να μεγαλώσουμε το φυσικό μήκος

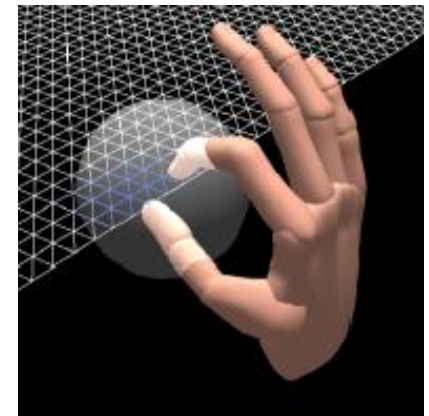
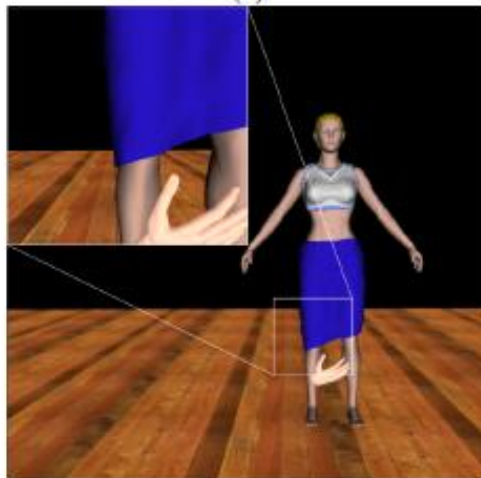
Πλαστική παραμόρφωση-Παράδειγμα



(a)



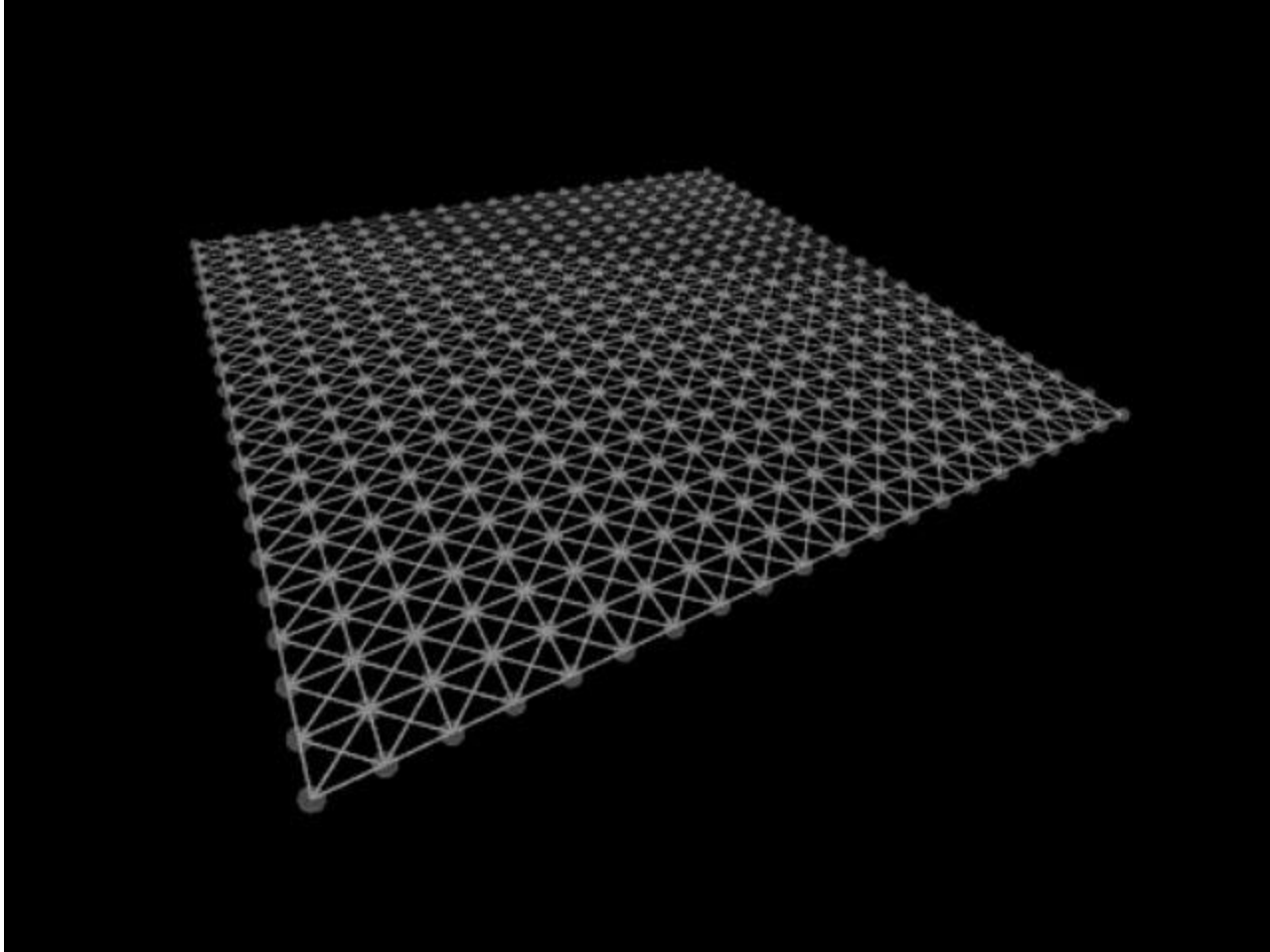
(b)



Σπάσιμο & Σχίσσιμο

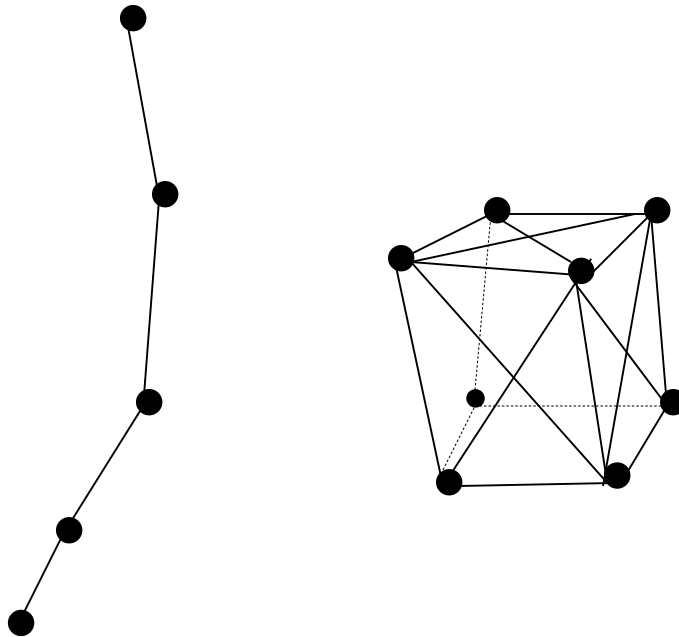
- Μπορούμε να επιτρέψουμε στα ελατήρια ακόμα και να σπάσουν
- Μία λύση είναι να ορίσουμε ένα μήκος (ή ποσοστό φυσικού μήκους) πέρα από το οποίο κόβεται το ελατήριο
- Αυτό μπορεί να συνδυαστεί και με την πλαστική παραμόρφωση ώστε το σπάσιμο να συμβαίνει πέρα από το πλαστικό όριο
- Μία άλλη λύση είναι να βασιστεί το σπάσιμο στη δύναμη στο ελατήριο
- Είναι αρκετά εύκολο να κόψουμε ελατήρια, αλλά τι γίνεται με ολόκληρες επιφάνειες;

Σπάσιμο & Σχίσσιμο



Σχοινιά & Στερεά

- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο ακριβώς πλαίσιο για την προσομοίωση σχοινιών, στερεών και άλλων παρόμοιων αντικειμένων...



Ευστάθεια προσομοίωσης

Διατήρηση ορμής

- Εφόσον τα πραγματικά ελατήρια εφαρμόζουν ίσες και αντίθετες δυνάμεις σε δύο σημεία διατηρούν την ορμή του συστήματος
- Η υλοποίηση μας με E-A πρέπει να διασφαλίζει τη διατήρηση της ορμής, λόγω της δυνατότητας να εφαρμόζουμε ίσες και αντίθετες δυνάμεις
- (Υποθέτει ότι τα σφάλματα της αριθμητικής που χρησιμοποιείται είναι αμελητέα)

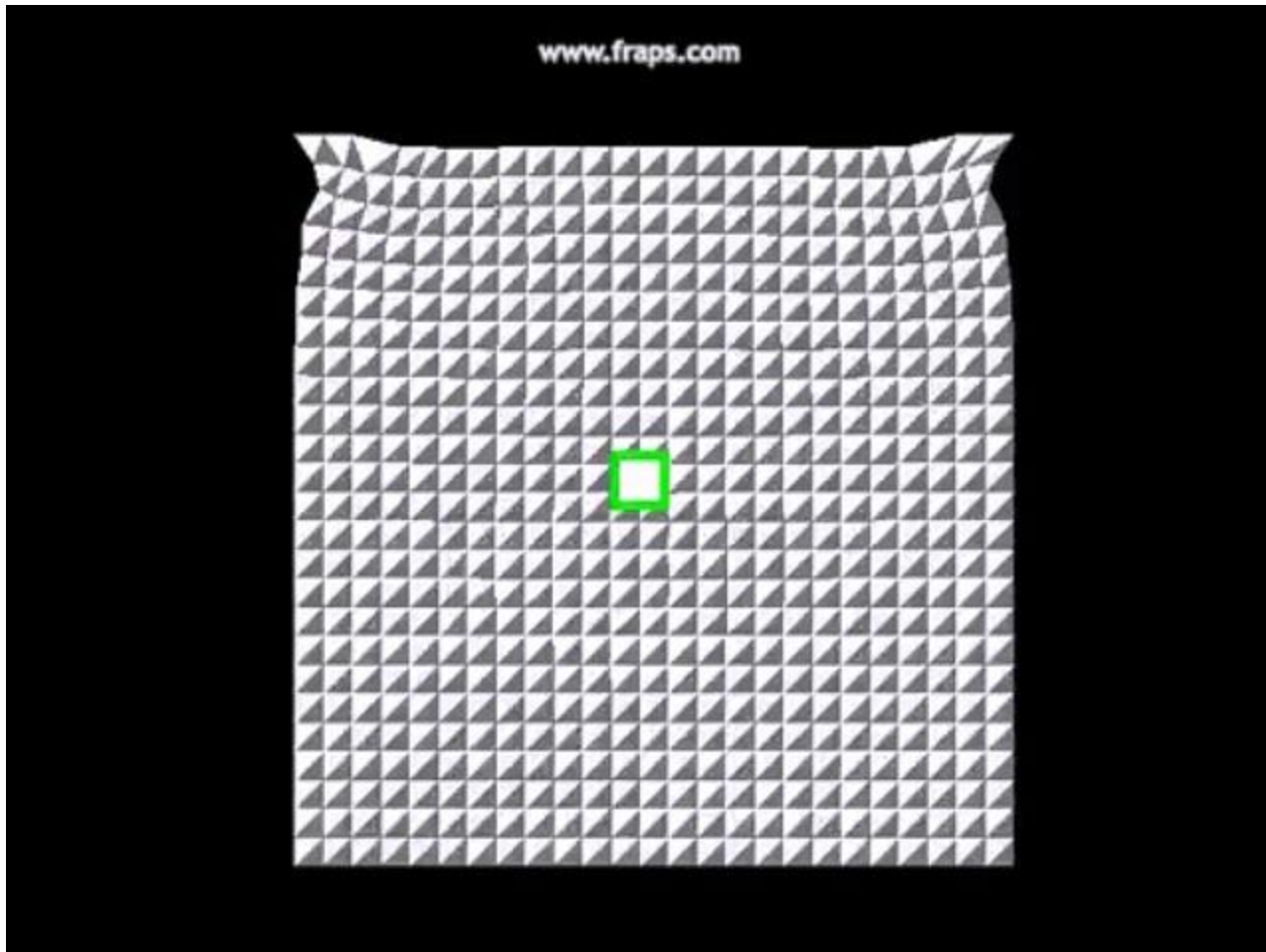
Διατήρηση ενέργειας

- Τα πραγματικά γραμμικά ελατήρια διατηρούν την ενέργεια, μιας και η κινητική ενέργεια μετατρέπεται σε ενέργεια παραμόρφωσης και στη συνέχεια ανακτάται σε κινητική
- Οι αποσβεστήρες όμως έχουν στόχο να αφαιρούν κινητική ενέργεια από το σύστημα
- Η απλή υλοποίησή μας χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση Euler δεν εγγυάται τη διατήρηση της ενέργειας.
- Ποτέ δεν ασχοληθήκαμε με κάτι τέτοιο!

Διατήρηση ενέργειας

- Εάν είμαστε προσεκτικοί με την υλοποίηση των εξισώσεων και χρησιμοποιήσουμε μικρά βήματα ολοκλήρωσης τότε ελπίζουμε να διατηρείται η ενέργεια *προσεγγιστικά!!!*
- Στην πράξη μπορεί να δούμε μία σταδιακή αύξηση ή μείωση της ενέργειας με το χρόνο
- Μία σταδιακή μείωση της ενέργειας υποδηλώνει ότι το σύστημα «αποσβαίνει ενέργεια» και θα έρθει κάποια στιγμή σε ηρεμία. **Μία σταδιακή αύξηση τι μπορεί να υποδηλώνει;**

Διατήρηση ενέργειας



Διατήρηση ενέργειας

- Υπάρχουν συστήματα σωματιδίων που διατηρούν την ενέργεια, την ορμή και άλλα και τη στροφορμή
- Είναι δυνατόν να διατηρήσουμε και τις τρεις παραπάνω ποσότητες, κάτι το οποίο όμως είναι υπολογιστικά δαπανηρό
- Αυτό είναι κυρίως σημαντικό σε εφαρμογές όπου απαιτείται ακρίβεια όπως ρεαλιστικές προσομοιώσεις, αλλά λιγότερο σε εφαρμογές διασκέδασης
- Ακόμα, αφού συνήθως επιθυμούμε να φτάσουμε σε μία κατάσταση ισορροπίας, επιτηδευμένα αφαιρούμε ενέργεια μέσω ελεγχόμενων αποσβέσεων
- Ακόμα και έτσι πρέπει να προσέχουμε ώστε το σύστημά μας να μην αυξάνει τη συνολική του ενέργεια

Ευστάθεια προσομοίωσης

- Εάν η προσομοίωση «εκραγεί» λόγω αύξησης της ενέργειας, τότε λέμε ότι είναι ασταθής
- Η βασική μέθοδος ολοκλήρωσης Euler είναι η απλούστερη αλλά μπορεί πολύ εύκολα να οδηγήσει σε αστάθεια και απαιτεί πολύ μικρά βήματα ολοκλήρωσης
- Υπάρχουν πολλές ακόμα μέθοδοι ολοκλήρωσης που πλεονεκτούν σε σχέση με την Euler

Ολοκλήρωση

- Παραδείγματα μεθόδων ολοκλήρωσης:
 - Explicit Euler
 - Implicit Euler
 - Midpoint (Leapfrog)
 - Crank-Nicolson
 - Runge-Kutta
 - Adams-Bashforth, Adams-Moulton
 - etc...

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

- Explicit Euler: $\varphi^{n+1} = \varphi^n + f(t_n, \varphi^n)\Delta t$
- Implicit Euler $\varphi^{n+1} = \varphi^n + f(t_{n+1}, \varphi^{n+1})\Delta t$
- Midpoint (Leapfrog): $\varphi^{n+1} = \varphi^n + f(t_{n+1/2}, \varphi^{n+1/2})\Delta t$
- Crank-Nicolson: $\varphi^{n+1} = \varphi^n + \frac{1}{2} \left(f(t_n, \varphi^n) + f(t_{n+1}, \varphi^{n+1}) \right) \Delta t$

Μέθοδοι ολοκλήρωσης - Implicit

$$\mathbf{P}'(\mathbf{t} + d\mathbf{t}) = \mathbf{P}'(\mathbf{t}) + \mathbf{H}^{-1} \mathbf{Y}$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{t} + d\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{t}) + \mathbf{P}'(\mathbf{t} + d\mathbf{t}) d\mathbf{t}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{\partial \mathbf{P}''}{\partial \mathbf{P}'} d\mathbf{t} - \frac{\partial \mathbf{P}''}{\partial \mathbf{P}} d\mathbf{t}^2$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{P}''(\mathbf{t}) d\mathbf{t} + \frac{\partial \mathbf{P}''}{\partial \mathbf{P}} \mathbf{P}'(\mathbf{t}) d\mathbf{t}^2$$

Multipoint μέθοδοι

- Οι Multipoint μέθοδοι προσαρμόζουν ένα πολυώνυμο σε διάφορες τιμές του χρόνου. Οι μέθοδοι Adams-Bashforth χρησιμοποιούν μόνο παρελθοντικές τιμές, ενώ η μέθοδος Adams-Moulton τις συνδιάζει με μελλοντικές.
- Second order Adams-Bashforth:

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \frac{\Delta t}{2} \left(3f(t_n, \varphi^n) - f(t_{n-1}, \varphi^{n-1}) \right)$$

- Third order Adams-Moulton:

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \frac{\Delta t}{12} \left(5f(t_{n+1}, \varphi^{n+1}) + 8f(t_n, \varphi^n) - f(t_{n-1}, \varphi^{n-1}) \right)$$

Runge-Kutta μέθοδοι

- Οι μέθοδοι ολοκλήρωσης Runge-Kutta υπολογίζουν την τιμή στο βήμα $n+1$ υπολογίζοντας πολλά μερικά βήματα μεταξύ του n και του $n+1$ και στη συνέχεια κατασκευάζουν ένα πολυώνυμο για τον υπολογισμό της τιμής στο $n+1$
- Second order Runge-Kutta:

$$\varphi^{n+1/2} = \varphi^n + \frac{\Delta t}{2} f(t_n, \varphi^n)$$

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \Delta t \cdot f(t_{n+1/2}, \varphi^{n+1/2})$$

Ευστάθεια ΠΕ

- Για να κάνουμε την ΠΕ ευσταθή, πρέπει να επιλέξουμε μία καλύτερη μέθοδο ολοκλήρωσης, ιδιαίτερα όταν αυτή χρησιμοποιεί μελλοντικές τιμές
- Δεν είναι τόσο δύσκολες όσο φαίνονται...
- Έχουμε βέβαια και άλλες επιλογές:
 - Oversampling: Για ένα βήμα $1/60$, ανανέωση της ΠΕ περισσότερες φορές με μικρότερα βήματα (π.χ. 10 φορές στα $1/600$), σχεδίαση μόνο της τελικής τιμής (κάθε 10 ανανεώσεις της ΠΕ). Αλλά αυτό επηρεάζει την απόδοση...
 - Έλεγχος σταθερών: Υψηλές τιμές σταθεράς ελατηρίου αυξάνουν την αστάθεια. Αλλά αυτό επηρεάζει και το υλικό...

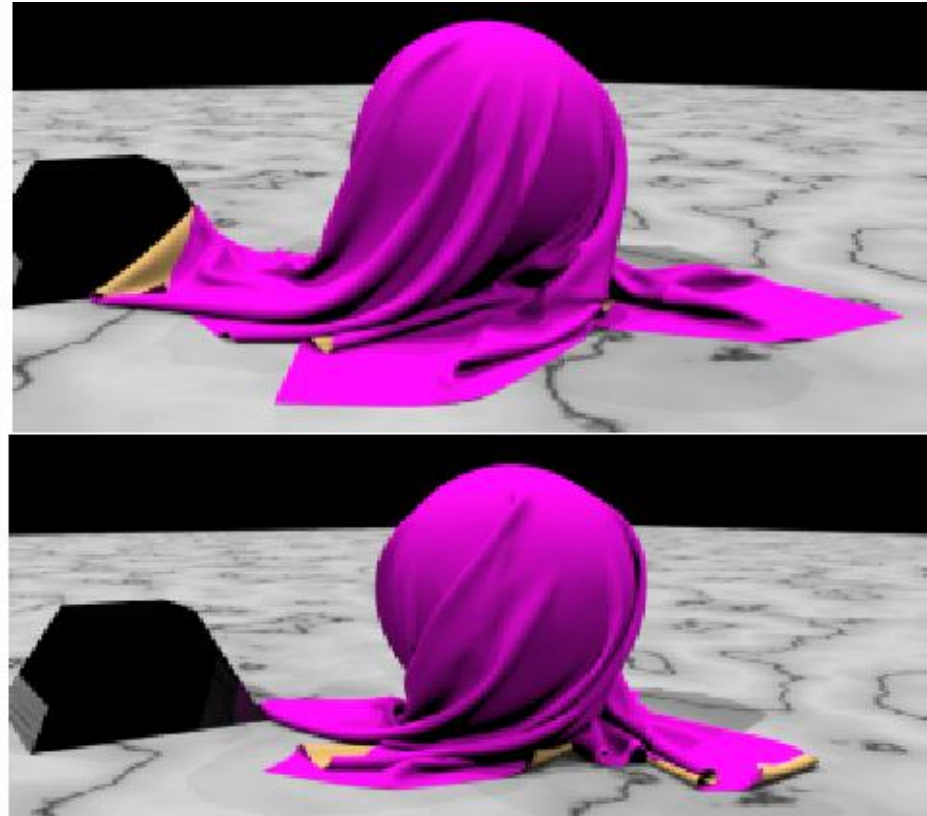
Προχωρημένα θέματα ΠΕ

Συνεχή μοντέλα

- Ρεαλιστικά μοντέλα ΠΕ σπάνια χρησιμοποιούν ελατήρια
- Αντίθετα, οι δυνάμεις υπολογίζονται βάσει παραμορφώσεων των τριγωνικών στοιχείων
- Έτσι, μπορούν να υπολογιστούν κατάλληλα οι εσωτερικές δυνάμεις βάσει της συνεχούς μηχανικής (continuum mechanics)
- Η βασική ιδέα παραμένει ίδια. Αντί να ελέγχουμε τα ελατήρια για να υπολογίζουμε τις δυνάμεις, ελέγχουμε τα τρίγωνα
- Τα συνεχή μοντέλα υπολογίζουν ποσότητες όπως ελαστική παραμόρφωση, πλαστική παραμόρφωση, δυνάμεις κάμψης, ανισοτροπική παραμόρφωση, κ.α.

Ανίχνευση και αντίδραση σύγκρουσης

- Μία ΠΕ που συγκρούεται με ένα συμπαγές αντικείμενο είναι δύσκολο να προσομοιωθεί...
- ...όταν συγκρούεται με τον εαυτό της είναι ακόμη δυσκολότερο
- Έχουν δημοσιευτεί πολλές εργασίες και ακόμα δημοσιεύονται σχετικά με ανίχνευση και αντίδραση σύγκρουσης ΠΕ



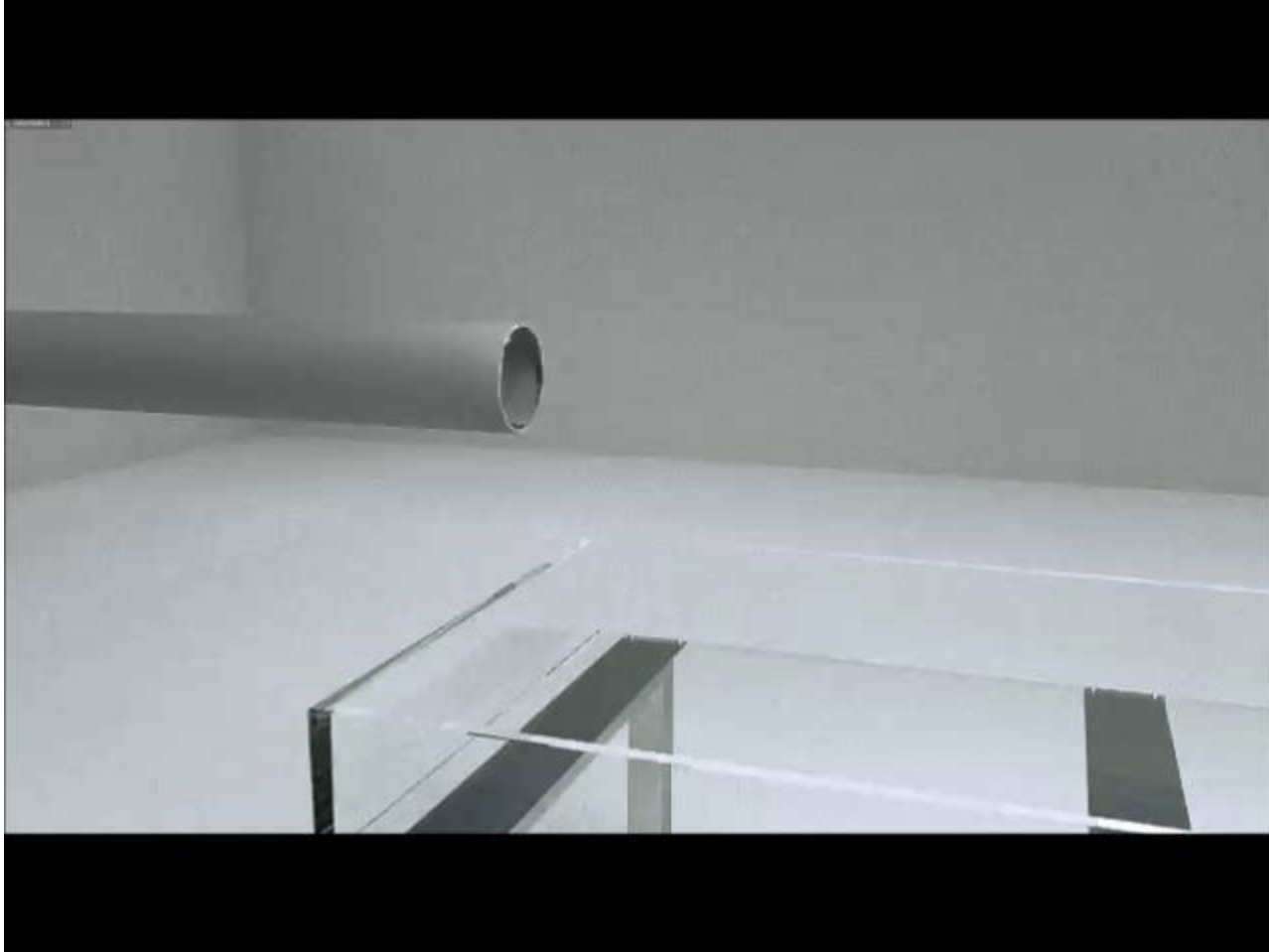
Συστήματα Σωματιδίων

- Καμιά προηγούμενη τεχνική δεν μπορεί να αναπαραστήσει ρεαλιστικά την κίνηση αντικειμένων ασαφούς μορφής όπως πυροτεχνήματα, καπνό, νερό ή σύννεφα
 - Το σχήμα τους δεν περιγράφεται εύκολα με μαθηματικά και οι αλλαγές γίνονται φαινομενικά τυχαία σε σχέση με το χρόνο
- Τα *συστήματα σωματιδίων* έχουν αναπτυχθεί για αυτό το σκοπό
 - Πρώτη εφαρμογή: Συνθετική κίνηση φωτιάς που απλώνεται σε έναν πλανήτη στην ταινία Star Trek II
- Ένα φαινόμενο περιγράφεται από μεγάλο πλήθος σωματιδίων, που το καθένα έχει το δικό σύνολο χαρακτηριστικών (θέση, ταχύτητα, χρώμα, διαφάνεια, σχήμα & μέγεθος)
- Τα σωματίδια κινούνται διαδικαστικά & τα χαρακτηριστικά τους μεταβάλλονται με το χρόνο, ανάλογα με κανόνες που προσομοιώνουν τη συμπεριφορά του πραγματικού συστήματος

Συστήματα Σωματιδίων



Συστήματα Σωματιδίων



Συστήματα Σωματιδίων (2)

- Σε κάθε καρτέ:
 - 1) Νέα σωματίδια παράγονται και προστίθενται
 - 2) Σε κάθε νέο σωματίδιο εκχωρούνται οι αρχικές τιμές χαρακτηριστικών του
 - 3) Σωματίδια που έχουν υπερβεί το χρόνο ζωής τους αφαιρούνται
 - 4) Σε κάθε τρέχον σωματίδιο εκχωρούνται νέες (ενημερωμένες) τιμές χαρακτηριστικών
 - 5) Τα τρέχοντα σωματίδια σχεδιάζονται για να παράγουν το νέο καρτέ
- Δημιουργία “ασάφειας” → τα παραπάνω βήματα υλοποιούνται με τυχαίες μεταβλητές
- Για το καρτέ f , μια τυχαία μεταβλητή X , που παριστάνει κάποιο από τα χαρακτηριστικά του σωματιδίου, παίρνει τη μορφή:

$$X(f) = X_{mean}(f) + rand() \cdot X_{var}(f)$$

όπου X_{mean} : η μέση τιμή της X , X_{var} : η διακύμανση της X
 $rand()$: γεννήτρια τυχαίων αριθμών

Συστήματα Σωματιδίων (3)

- X_{mean} & X_{var} μπορούν να αλλάζουν μεταξύ καρέ
- Τα σωματίδια σχεδιάζονται με διάφορους τρόπους, ανάλογα την εφαρμογή
 - Λόγω του μεγάλου πλήθους σωματιδίων που απαρτίζουν ένα σύστημα, η απεικόνισή τους πρέπει να είναι αποδοτική
 - Ένας τρόπος: σωματίδιο θεωρείται ως σημειακή φωτεινή πηγή
 - Εναλλακτικά, τα σωματίδια σχεδιάζονται σαν μικρές χρωματιστές γραμμές (π.χ. πυροτεχνήματα)
 - Τέλος, ένα σωματίδιο μπορεί να πρέπει να σχεδιαστεί ως 3D αντικείμενο, π.χ. σφαίρα, οπότε για κάθε σωματίδιο πρέπει να γίνουν πλήρεις υπολογισμοί φωτισμού και σκίασης (υπολογιστικά ακριβό)
- Αύξηση ρεαλισμού σε σύστημα σωματιδίων → εφαρμογή χωρικής & χρονικής αντιταύτισης

Συστήματα Σωματιδίων: Παράδειγμα

- Νερό αναβλύζει από ένα σιντριβάνι υπό γωνία α_0 ως προς το έδαφος
- Κάθε σωματίδιο νερού ξεκινά με τυχαία γωνία:

$$\alpha = \alpha_0 + rand() \cdot \alpha_{var}$$

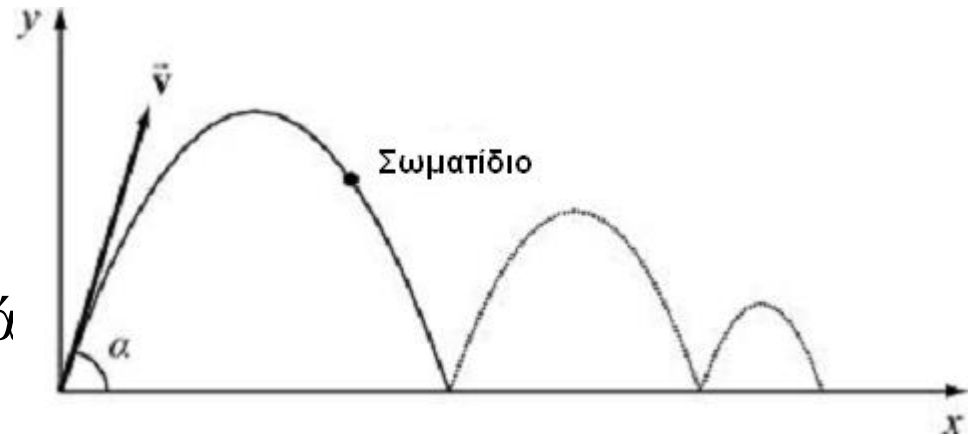
και με τυχαία αρχική ταχύτητα:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + rand() \cdot \vec{v}_{var}$$

- Η κίνηση αναλύεται σε 2 συνιστώσες:

- Την κατακόρυφη που υπόκειται στη βαρύτητα
- Την οριζόντια που είναι σταθερή

που παράγουν μια παραβολική τροχιά του σωματιδίου μέχρι να πέσει στην επιφάνεια του νερού



Συστήματα Σωματιδίων: Παράδειγμα (2)

- Η θέση του σωματιδίου τη χρονική στιγμή t συνεπώς είναι:

$$x(t) = |\vec{v}| \cos \alpha t$$

$$y(t) = |\vec{v}| \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2$$

- Για ένα καρέ τη στιγμή t , οι παραπάνω σχέσεις δίνουν τη θέση του σωματιδίου και χρησιμοποιούνται για την απεικόνισή του
- Για μεγαλύτερο ρεαλισμό:
 - Το χρώμα των σωματιδίων μπορεί να αλλάζει με το χρόνο
 - Τα σωματίδια μπορούν να αναπηδούν όταν φτάσουν στην επιφάνεια του νερού