

Γραφικά και Εικονική Πραγματικότητα

Αναπαράσταση Μοντέλων

Εισαγωγή

- Οι 3D εικόνες στα Γραφικά αποτελούνται από διάφορα σχήματα & δομές:
 - Γεωμετρικά σχήματα (π.χ. σφαίρες)
 - Μαθηματικές επιφάνειες (π.χ. τμήματα επιφάνειας NURBS)
 - Τυχαίες επιφάνειες, όχι μαθηματικά ορισμένες (π.χ. επιφάνεια ψηφιοποιημένου αντικειμένου)
 - Αντικείμενα όγκου, όπου η εσωτερική δομή του αντικειμένου είναι εξίσου σημαντική με την επιφάνεια του (π.χ. ανθρώπινο όργανο)
 - Ακανόνιστα αντικείμενα (π.χ. καπνός)
- *Μοντέλα*: Προσεγγιστικές αναπαραστάσεις αντικειμένων, κατασκευασμένα ώστε να διατηρούν πολλές από τις ιδιότητες του αντικειμένου
- Τα μοντέλα επιδέχονται την επεξεργασία που απαιτούν οι αλγόριθμοι γραφικών

Εισαγωγή (2)

- *Πολυγωνικά Μοντέλα*: Συνηθέστερη αναπαράσταση επιφανειών
- Η πληροφορία που περιέχεται στα μοντέλα αυξάνεται συνεχώς
- Βασικές εφαρμογές στα Γραφικά συχνά απαιτούν μοντέλα με λιγότερη πληροφορία
- *Απλοποίηση Μοντέλου*: Μειώνει την ποσότητα πληροφορίας που περιέχει ένα μοντέλο, χωρίς να θυσιάζει σημαντικά την ποιότητα της αναπαράστασης

Ανασκόπηση Μοντέλων

- 2 κύριες κατηγορίες μοντέλων:
 - Αναπαράσταση Επιφάνειας (ή αναπαράσταση συνόρου (*b-rep*))
 - Αναπαριστά μόνο την επιφάνεια αντικειμένου
 - Αναπαράσταση Όγκου (ή υποδιαίρεση χώρου)
 - Αναπαριστά όλο τον όγκο που καταλαμβάνει ένα αντικείμενο
- Η αναπαράσταση επιφάνειας χρησιμοποιείται συχνότερα διότι:
 - Πολλά αντικείμενα δεν είναι κλειστά → αναπαράσταση όγκου μη εφαρμόσιμη
 - Τα περισσότερα αντικείμενα είναι αδιαφανή → εξοικονόμηση επεξεργασίας με την αναπαράσταση μόνο της επιφάνειας τους, που καθορίζει την εμφάνιση τους
- Η αναπαράσταση όγκου χρησιμοποιείται:
 - Για ημιδιαφανή αντικείμενα
 - Για αντικείμενα με ενδιαφέρουσα εσωτερική δομή
 - Σαν βοηθητική δομή σε γενικούς αλγόριθμους γραφικών

Ανασκόπηση Μοντέλων (2)

- Κάποια μοντέλα δεν κατηγοριοποιούνται εύκολα σε μια από τις παραπάνω κατηγορίες:
 - *Μοντέλα κατασκευαστικής στερεάς γεωμετρίας (CSG):* αναπαριστούν ένα αντικείμενο συνδυάζοντας στοιχειώδη γεωμετρικά σχήματα
 - *Άμορφα αντικείμενα & φαινόμενα:* μοντελοποιούνται σαν νέφη σημείων ή σαν συνοθύλευμα στοιχειωδών επιφανειών ή όγκων
- Τα Μοντέλα Επιφάνειας κατηγοριοποιούνται:
 - Σε αυτά που έχουν κάποια μαθηματική περιγραφή όπως:
 - u Στοιχειώδη Γεωμετρικά Σχήματα
 - u Επιφάνειες NURBS
 - u Επιφάνειες Υποδιαίρεσης
 - u Γενικές Παραμετρικές Επιφάνειες
 - Και σε αυτά που δεν έχουν κάποια μαθηματική περιγραφή:
 - u Αποτελούνται από ένα σύνολο σημείων & ένα σύνολο πολυγώνων που κατασκευάζονται από τα σημεία του συνόλου σαν κορυφές → *πολυγωνικά μοντέλα*

Παραμετρικές καμπύλες

- Περιγραφές καμπύλων και επιφανειών σε παραμετρική μορφή:
- Καμπύλες σε παραμετρική μορφή:
 - Δίνονται ως 2 (για επίπεδες καμπύλες) ή 3 (για καμπύλες στο χώρο) ανεξάρτητες συνιστώσες συναρτήσεων ως προς παράμετρο t :

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

- Η περιγραφή καμπυλών στο επίπεδο ή στο χώρο είναι τελικά η ίδια, αν σκεφτούμε ότι ισχύει $z(t) = 0$ για επίπεδες καμπύλες

- Επιφάνειες σε παραμετρική μορφή:
 - Δίνονται ως 3 ανεξάρτητες συναρτήσεις συντεταγμένων ως προς παραμέτρους u & v :

$$\mathbf{X}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}$$

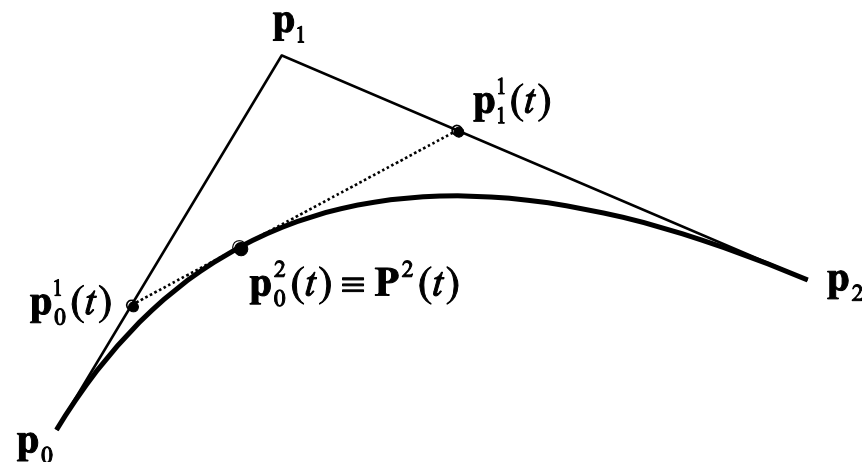
Παραμετρικές καμπύλες

- Ευθύγραμμο Τμήμα σε παραμετρική μορφή:
 - Μεταξύ 2 σημείων $\mathbf{p}_0$ και $\mathbf{p}_1$
 - $\mathbf{P}(t) = (1-t) \mathbf{p}_0 + t \mathbf{p}_1$, $t \in [0,1]$
 - Εκφράζει την γραμμική παρεμβολή ανάμεσα στα σημεία $\mathbf{p}_0$ & $\mathbf{p}_1$

Τετραγωνικές Καμπύλες Bézier

- Έστω 3 σημεία $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ και $\mathbf{p}_2$
- Πρώτο βήμα: παρεμβολή σημείων σε ζεύγη $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1)$ και $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$:
$$\mathbf{p}_0^1(t) = (1-t)\mathbf{p}_0 + t\mathbf{p}_1, \quad t \in [0,1]$$
$$\mathbf{p}_1^1(t) = (1-t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2,$$
- Για κάθε τιμή $t \in [0,1]$, τα $\mathbf{p}_0^1(t)$ και $\mathbf{p}_1^1(t)$ αναπαριστούν σημεία στα ευθύγραμμα τμήματα $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$ και $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$ αντίστοιχα
- Δεύτερο βήμα: παρεμβολή σημείων $\mathbf{p}_0^1(t)$ και $\mathbf{p}_1^1(t)$ για το ίδιο t :

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_0^2(t) &= (1-t)\mathbf{p}_0^1(t) + t\mathbf{p}_1^1(t) \\ &= (1-t)^2 \mathbf{p}_0 + 2t(1-t)\mathbf{p}_1 + t^2 \mathbf{p}_2\end{aligned}$$



Τετραγωνικές Καμπύλες Bézier (2)

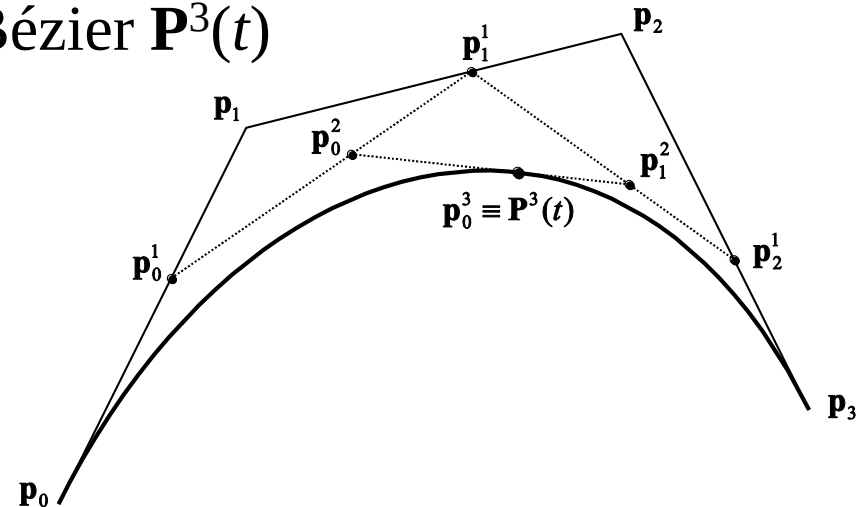
- Όσο το t αυξάνεται από 0 σε 1, τα 3 σημεία $\mathbf{p}_0^1(t)$, $\mathbf{p}_1^1(t)$, $\mathbf{p}_0^2(t)$ μετακινούνται ταυτόχρονα στο αντίστοιχο ευθύγραμμο τμήμα
- Η τελευταία εξίσωση δείχνει ότι το σημείο $\mathbf{p}_0^2(t)$ διαγράφει μια τετραγωνική (2^{ου} βαθμού) καμπύλη ως προς την παράμετρο t
- Αυτή η καμπύλη:
 - Είναι μια τετραγωνική καμπύλη Bézier (ή μια 2^{ου} βαθμού καμπύλη Bézier)
 - Θα δηλώνεται σαν $\mathbf{P}^2(t)$
- **Σημεία ελέγχου** καμπύλης Bézier: τα αρχικά σημεία $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$
- $\mathbf{p}_i^r(t)$:
 - r : βήμα παρεμβολής
 - i : δείκτης στο πρώτο σημείο που παρεμβάλλεται

Καμπύλες Bézier n -οστού Βαθμού

- Η διαδικασία παραγωγής μιας τετραγωνικής καμπύλης Bézier μπορεί να επεκταθεί για περισσότερα σημεία ελέγχου

- Κυβική (ή 3^{ου} βαθμού) καμπύλη Bézier $\mathbf{P}^3(t)$

- Χρειάζεται 4 σημεία ελέγχου
- Εφαρμόζει 3 βήματα γραμμικής παρεμβολής



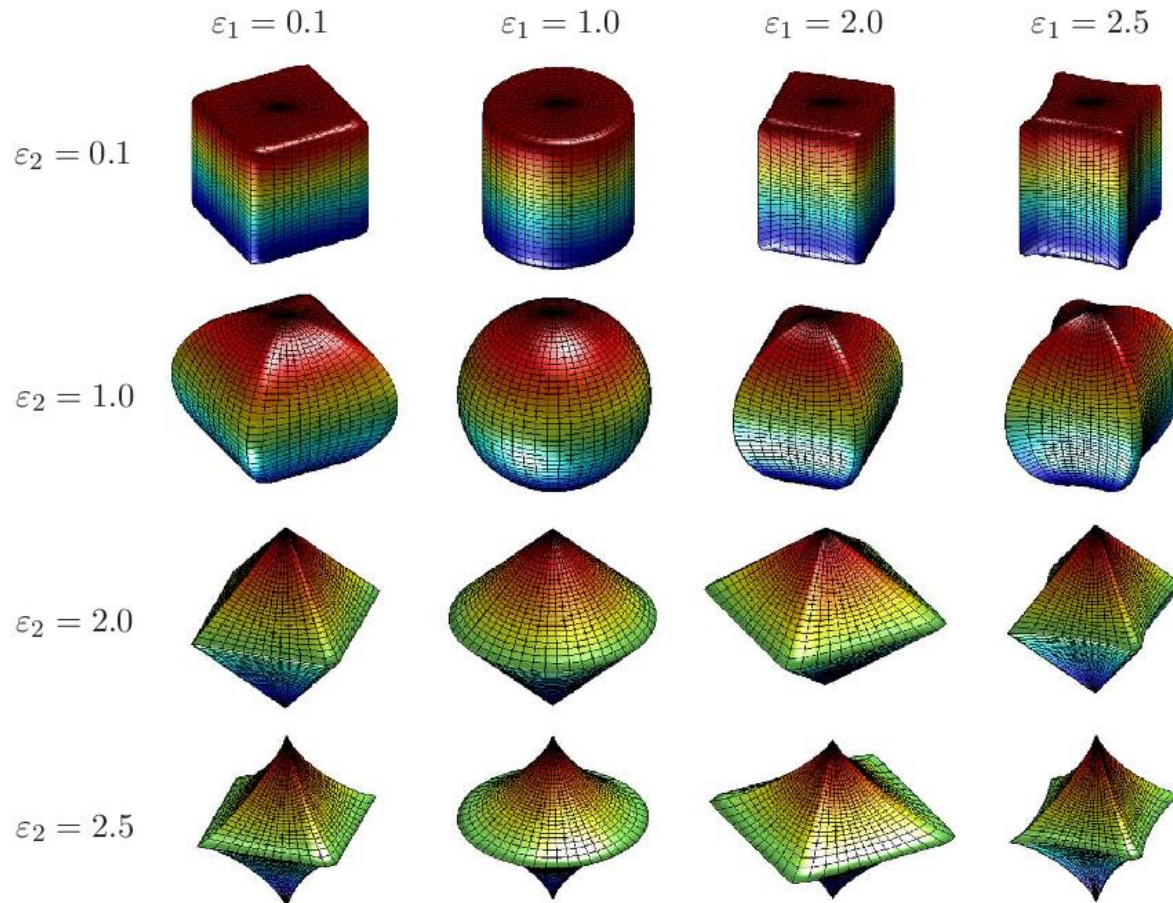
- Γενική περίπτωση: n -οστού βαθμού καμπύλη Bézier $\mathbf{P}^n(t)$

- Χρειάζεται $(n+1)$ σημεία ελέγχου $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$
- Εφαρμόζει n βήματα γραμμικής παρεμβολής
- Πολύγωνο ελέγχου καμπύλης: το πολύγωνο με κορυφές $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$
- Η καμπύλη δίνεται από:
$$\mathbf{P}^n(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \mathbf{p}_i, \quad t \in [0,1] \quad (1)$$

Παράδειγμα παραμετρικής επιφάνειας

- Superquadrics

$$F(x, y, z) = \left(\left(\left(\frac{x}{a_1} \right)^{\frac{2}{\varepsilon_2}} + \left(\frac{y}{a_2} \right)^{\frac{2}{\varepsilon_2}} \right)^{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} + \left(\frac{z}{a_3} \right)^{\frac{2}{\varepsilon_1}} \right)^{\varepsilon_1} = 1$$

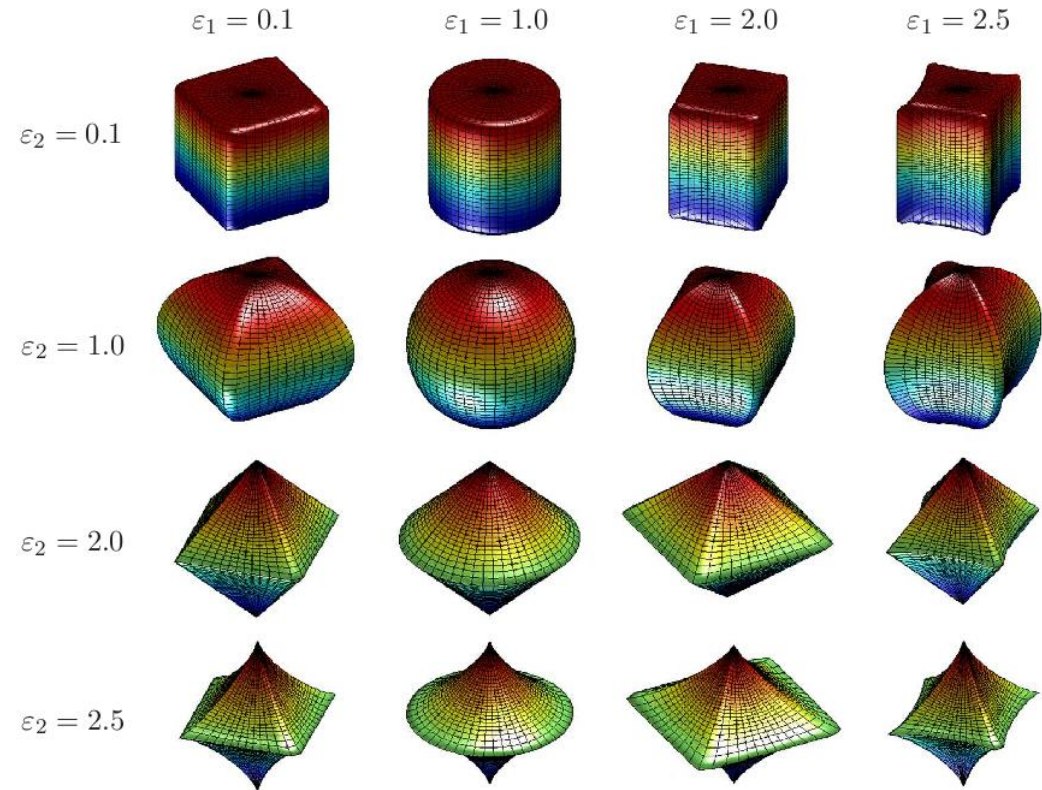


Παράδειγμα παραμετρικής επιφάνειας

- Superquadrics

$$\mathbf{r}_{SQ}(\eta, \omega) = \begin{bmatrix} a_1 \cos^{\varepsilon_1}(\eta) \cos^{\varepsilon_2}(\omega) \\ a_2 \cos^{\varepsilon_1}(\eta) \sin^{\varepsilon_2}(\omega) \\ a_3 \sin^{\varepsilon_1}(\eta) \end{bmatrix}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \eta \leq \frac{\pi}{2} - \pi \leq \omega < \pi$$



Ανασκόπηση Μοντέλων (3)

- Συγκρίνοντας τις δυο μορφές των μοντέλων επιφάνειας:
 - Τα μαθηματικά μοντέλα:
 - u Είναι συνήθως ακριβείς αναπαραστάσεις αντικειμένων
 - u Επιτρέπουν ακριβείς υπολογισμούς για το αντικείμενο (π.χ. κανονικό διάλυσμα)
 - u Περιορίζονται σε ορισμένα είδη αντικειμένων
 - u Δεν μπορούν να περιγράψουν τυχαία σχήματα
 - Τα πολυγωνικά μοντέλα:
 - u Είναι προσεγγίσεις των αρχικών αντικειμένων
 - u Αν χρησιμοποιούνται αρκετές κορυφές, είναι αρκετά ακριβείς προσεγγίσεις
 - u Είναι πιο γενικά
 - u Ακόμα και οι μαθηματικές αναπαραστάσεις συνήθως κατασκευάζονται σε μια 'διακριτή' μορφή πολυγωνικών μοντέλων

Ανασκόπηση Μοντέλων (4)

- Τα πολύγωνα μπορεί να αποτελούνται από οποιοδήποτε πλήθος κορυφών. Στην πράξη:
 - Τετράπλευρα
 - Τρίγωνα
- Πολυγωνικά Μοντέλα Τετραπλεύρων:
 - Παράγονται κατά τον σχεδιασμό παραμετρικών επιφανειών
 - Δυστυχώς, ένα τετράπλευρο στις 3Δ δεν είναι απαραίτητα επίπεδο:
 - u Περιορίζεται το σχήμα και η ευελιξία του μοντέλου
 - u Δυσκολότεροι υπολογισμοί
- Πολυγωνικά Μοντέλα Τριγώνων:
 - Ένα τρίγωνο είναι πάντα επίπεδο
 - Κάθε πολύγωνο τριγωνοποιείται εύκολα → τριγωνικό μοντέλο παράγεται από οποιοδήποτε πολυγωνικό μοντέλο → τριγωνικά μοντέλα (ή *τριγωνικά πλέγματα*) χρησιμοποιούνται σχεδόν πάντα σε εφαρμογές που περιλαμβάνουν πολυγωνικά μοντέλα

Ανασκόπηση Μοντέλων (5)

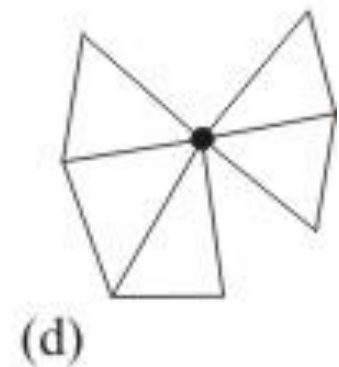
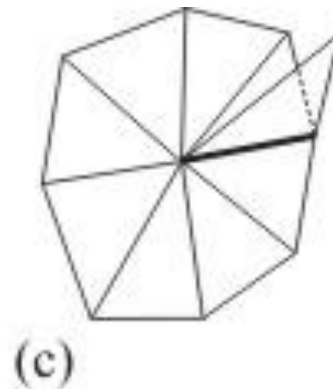
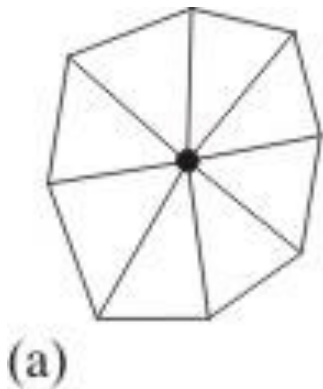
- Τα πολυγωνικά μοντέλα γενικεύονται σε πολυεδρικά μοντέλα για την αναπαράσταση όγκου
- Βασικό πολυεδρικό σχήμα είναι το *τετράεδρο* → τα τετραεδρικά πλέγματα είναι η πιο γενική & ευέλικτη αναπαράσταση όγκου
- Τα μοντέλα που αποτελούνται από παραλληλεπίπεδα είναι πολύ διαδεδομένα, κυρίως σαν παράγωγα διαδικασιών υποδιαίρεσης του χώρου που χρησιμοποιούν ορθογώνια πλέγματα
- Δομικό στοιχείο των παραλληλεπιπέδων καλείται *ογκοστοιχείο*
- Χρησιμοποιούνται ακόμα Ιεραρχικές αναπαραστάσεις όγκου (οκταδικά δέντρα, δέντρα δυαδικής διαμέρισης χώρου)
- Θα επικεντρωθούμε στα πολυγωνικά μοντέλα

Ιδιότητες Πολυγωνικών Μοντέλων

- Μοντέλο επιφάνειας πολλαπλότητας 2Δ (ή απλά πολλαπλότητα): Κάθε σημείο της επιφάνειας έχει γειτνίαση ομοιομορφική με έναν ανοικτό δίσκο (εσωτερικό κύκλου)
 - Αν και η επιφάνεια υπάρχει στον 3Δ χώρο, όταν εξεταστεί σε μια μικρή περιοχή γύρω από ένα σημείο είναι τοπολογικά επίπεδη
- Σε μια επιφάνεια-πολλαπλότητα:
 - Κάθε ακμή μοιράζεται μεταξύ ακριβώς 2 εδρών
 - Γύρω από κάθε κορυφή υπάρχει ένας κλειστός βρόγχος εδρών
- Επιφάνεια πολλαπλότητα με σύνορο: Κάθε σημείο της επιφάνειας έχει γειτνίαση ομοιομορφική με έναν μισό δίσκο
- Σε μια επιφάνεια πολλαπλότητα με σύνορο:
 - Κάποιες ακμές (συνοριακές) ανήκουν ακριβώς σε μια έδρα
 - Γύρω από κάποιες κορυφές (συνοριακές) ο βρόγχος εδρών είναι ανοικτός
- Συνήθως, μια 3Δ επιφάνεια που δεν είναι πολλαπλότητα με σύνορο είναι μια κλειστή επιφάνεια

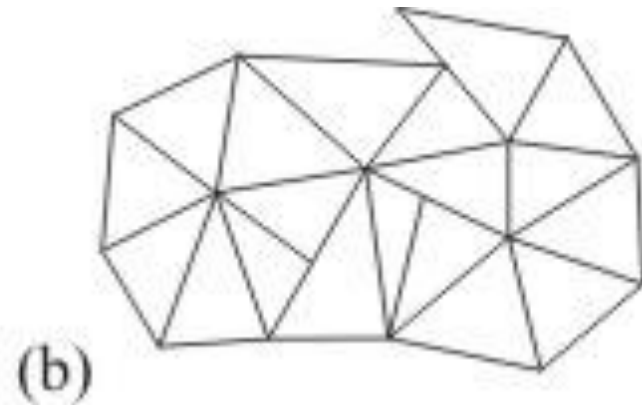
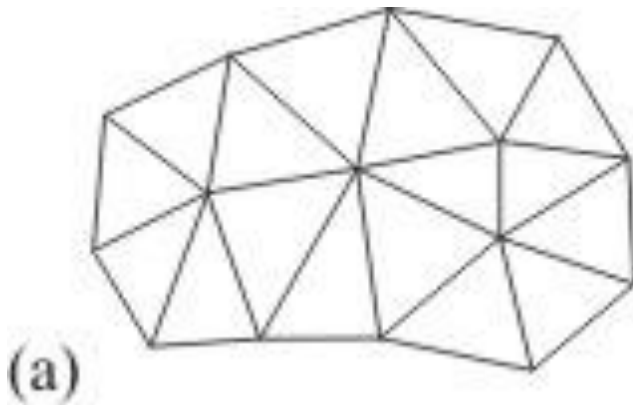
Ιδιότητες Πολυγωνικών Μοντέλων (2)

- (a) Τμήμα επιφάνειας πολλαπλότητας
- (b) Συνοριακή κορυφή επιφάνειας πολλαπλότητας με σύνορο
- (c) Ακμή που δεν ανήκει σε επιφάνεια πολλαπλότητας
- (d) Μη συνοριακή κορυφή που δεν ανήκει σε επιφάνεια πολλαπλότητας



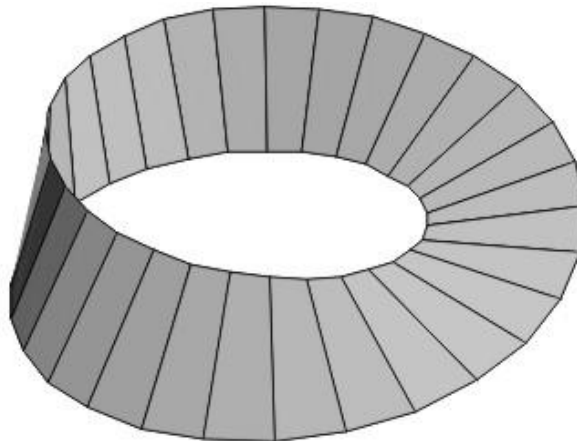
Ιδιότητες Πολυγωνικών Μοντέλων (3)

- Ένα μοντέλο επιφάνειας είναι ένα απλοειδές σύμπλοκο αν τα πολύγωνα που το αποτελούν εφάπτονται μόνο κατά μήκος των ακμών τους, και οι ακμές του μοντέλου τέμνονται μόνο στα άκρα τους
- (a) Απλοειδές σύμπλοκο (τριγωνικό πλέγμα)
- (b) Μη απλοειδές σύμπλοκο (τριγωνικό πλέγμα)

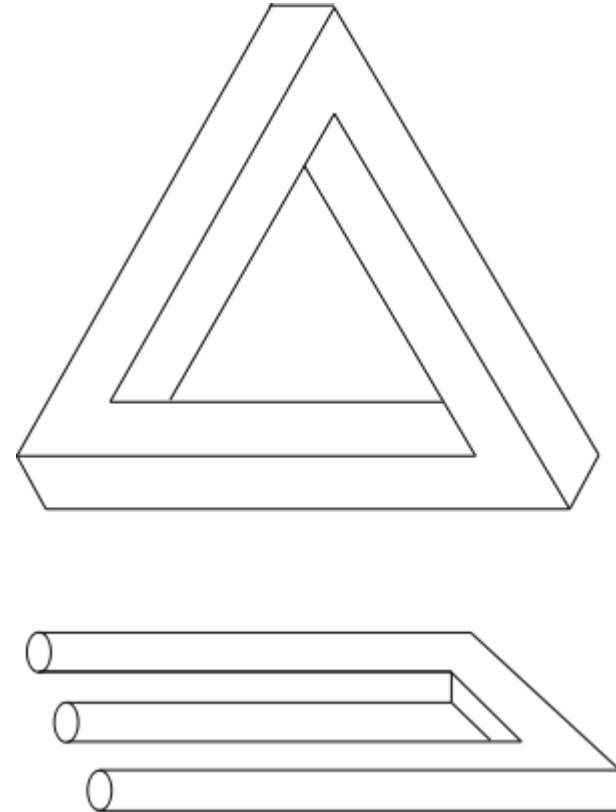


Ιδιότητες Πολυγωνικών Μοντέλων (4)

- Προσανατολισμένη επιφάνεια: Επιφάνεια που έχει 2 “όψεις”
 - Όπως μια κόλλα χαρτιού
- Οι περισσότερες επιφάνειες είναι προσανατολισμένες
- Στις κλειστές προσανατολισμένες επιφάνειες το ‘εσωτερικό’ & ‘εξωτερικό’ τμήμα της επιφάνειας είναι σαφώς διακριτά
- Κατά σύμβαση, το κανονικό διάνυσμα μιας κλειστής προσανατολισμένης επιφάνειας δείχνει προς την ‘έξω’ μεριά
- Η ταινία Moebius είναι μια μη προσανατολισμένη επιφάνεια



Ιδιότητες Πολυγωνικών Μοντέλων (4)



Ιδιότητες Πολυγωνικών Μοντέλων (5)

- Τα κλειστά μοντέλα πολλαπλότητας που είναι ομοιομορφικά ως προς τη σφαίρα, ικανοποιούν τον τύπο του Euler:

$$V - E + F = 2$$

όπου:

$$\left. \begin{array}{l} V: \# \text{ κορυφών} \\ E: \# \text{ ακμών} \\ F: \# \text{ εδρών} \end{array} \right\} \text{ του μοντέλου}$$

Ιδιότητες Πολυγωνικών Μοντέλων (6)

- Για ένα κλειστό τριγωνικό μοντέλο ο παραπάνω τύπος υποδηλώνει:
 - Ότι το πλήθος των τριγώνων του μοντέλου είναι σχεδόν 2-πλάσιο του πλήθους των κορυφών
 - Ότι ο μέσος αριθμός τριγώνων γύρω από μια κορυφή είναι 6
- Ο τύπος του Euler γενικεύεται για μοντέλα που δεν είναι πολλαπλότητες:

$$V - E + F = 2 - 2G$$

όπου G είναι το γένος (genus) του μοντέλου

- Το γένος ενός μοντέλου μπορεί να θεωρηθεί το πλήθος των διαμπερών οπών του μοντέλου:
 - Ο τόρος (torus) έχει γένος 1
 - Ο διπλός τόρος έχει γένος 2

Δομές Δεδομένων για Πολυγωνικά Μοντέλα

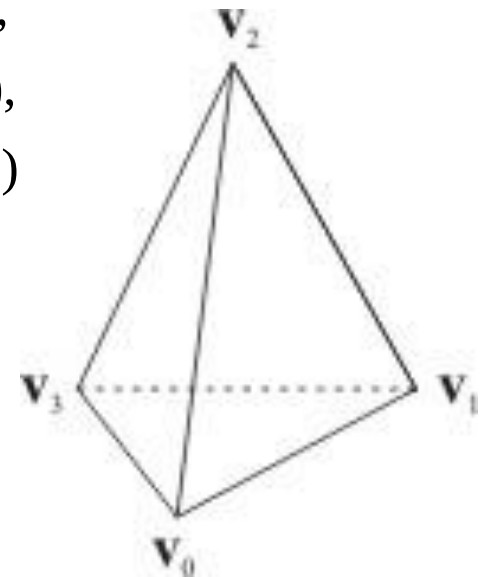
- Πολλές δομές δεδομένων έχουν προταθεί για την αναπαράσταση πολυγωνικών μοντέλων. Διαφέρουν:
 - Στον τύπο των πολυγωνικών μοντέλων που μπορούν να αναπαραστήσουν
 - Στην ποσότητα & τύπο πληροφορίας που φυλάσσουν άμεσα για το μοντέλο
 - Στις λοιπές πληροφορίες που μπορούν να παράγουν έμμεσα για το μοντέλο
- Χρήσιμες πληροφορίες για τα Γραφικά:
 - *Τοπολογικές πληροφορίες:* αν το μοντέλο έχει πολλαπλότητα, είναι κλειστό, έχει όριο ή έχει τρύπες
 - *Πληροφορίες γειτνίασης:* γειτονικές έδρες δοθέντων ακμών και εδρών, γειτονικές ακμές και έδρες γύρω από δοθείσα κορυφή, σύνορο ενός ανοικτού μοντέλου
 - *Χαρακτηριστικά συνημμένα στο μοντέλο:* κανονικά διανύσματα, χρώματα, ιδιότητες υλικού, συντεταγμένες υφής

Δομές Δεδομένων για Πολυγωνικά Μοντέλα (2)

- Οι βασικότερες δομές δεδομένων που χρησιμοποιούνται:
 - Άμεση λίστα ακμών
 - Άμεση λίστα εδρών } περιέχουν για κάθε ακμή/έδρα του μοντέλου τις συντεταγμένες των αντίστοιχων κορυφών

Παράδειγμα:

- Για το τετράεδρο της εικόνας ισχύει:
 - Λίστα ακμών:
 $e_0 = ((x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1))$, $e_3 = ((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2))$,
 $e_1 = ((x_0, y_0, z_0), (x_2, y_2, z_2))$, $e_4 = ((x_1, y_1, z_1), (x_3, y_3, z_3))$,
 $e_2 = ((x_0, y_0, z_0), (x_3, y_3, z_3))$, $e_5 = ((x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3))$
 - Λίστα εδρών:
 $f_0 = ((x_3, y_3, z_3), (x_2, y_2, z_2), (x_1, y_1, z_1))$,
 $f_1 = ((x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_0, y_0, z_0))$,
 $f_2 = ((x_1, y_1, z_1), (x_0, y_0, z_0), (x_3, y_3, z_3))$,
 $f_3 = ((x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2))$



Δομές Δεδομένων για Πολυγωνικά Μοντέλα (3)

- Λίστα ακμών:
 - Δεν αναπαριστά επιφάνεια
 - Δεν καθορίζει τις έδρες του μοντέλου
 - Οι έδρες πρέπει να συμπεραθούν από τα δεδομένα των ακμών → οδηγεί σε πιθανές ασάφειες
- Λίστα εδρών:
 - Οι συντεταγμένες κάθε κορυφής επαναλαμβάνονται για κάθε ακμή ή έδρα που την περιέχει → σπατάλη χώρου
 - Δεν δίνει πληροφορίες για την γειτνίαση των εδρών και των ακμών
 - Οι κορυφές μπορούν να ανιχνευθούν με σύγκριση συντεταγμένων → μπορεί να προκύψουν προβλήματα αριθμητικής ακρίβειας → ο υπολογισμός της γειτνίασης μπορεί να παρουσιάζει προβλήματα

Δομές Δεδομένων για Πολυγωνικά Μοντέλα (4)

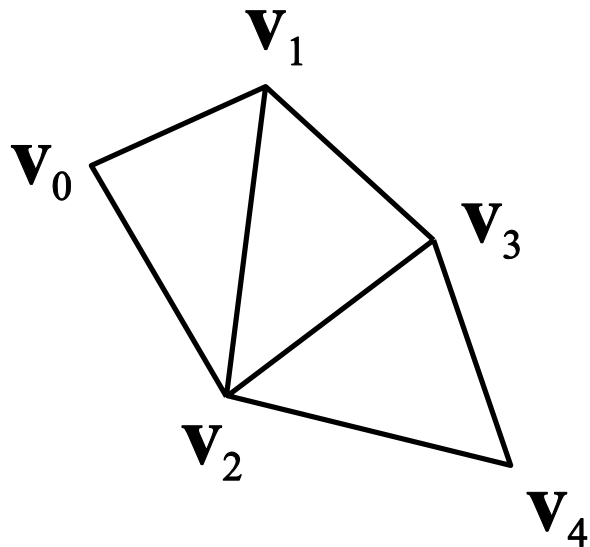
- Αρκετά από τα παραπάνω μειονεκτήματα επιλύονται από την δεικτοδοτημένη λίστα εδρών:
 - Περιέχει λίστα κορυφών & λίστα εδρών του μοντέλου
 - Οι κορυφές των εδρών δίνονται σαν αναφορές στη λίστα κορυφών
- Παράδειγμα: το προηγούμενο τετράεδρο αναπαρίσταται ως:
$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= (x_0, y_0, z_0), & \mathbf{f}_0 &= (\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1), \\ \mathbf{v}_1 &= (x_1, y_1, z_1), & \mathbf{f}_1 &= (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0), \\ \mathbf{v}_2 &= (x_2, y_2, z_2), & \mathbf{f}_2 &= (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_3), \\ \mathbf{v}_3 &= (x_3, y_3, z_3), & \mathbf{f}_3 &= (\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \end{aligned}$$
- Για την αναπαράσταση προσανατολισμένων μοντέλων με χρήση της δεικτοδοτημένης λίστας εδρών, συνηθίζεται να ταξινομούνται οι κορυφές των εδρών είτε με την φορά των δεικτών του ρολογιού είτε αντίστροφα $\rightarrow$ ευκολότεροι υπολογισμοί

Δομές Δεδομένων για Πολυγωνικά Μοντέλα (5)

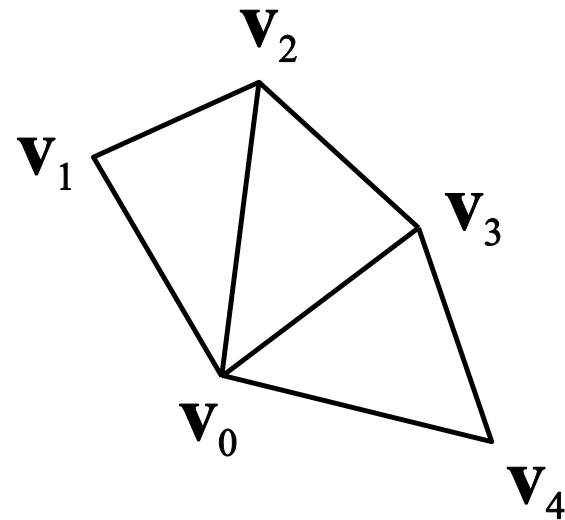
- Δεικτοδοτημένη λίστα εδρών:
 - Μπορεί να αναπαραστήσει όλα τα είδη πολυγωνικών μοντέλων
 - Επιτρέπει άμεσες τροποποιήσεις στις θέσεις των κορυφών του μοντέλου
 - Οι ακμές των πολυγώνων μπορούν να διαπιστωθούν έμμεσα αλλά επαναλαμβάνονται για κάθε πολύγωνο που τις χρησιμοποιεί
 - Απαιτείται κάποια διαδικασία για παραγωγή λίστας μοναδικών ακμών
 - Δεν παρέχει πληροφορίες γειτνίασης αν και τα δεδομένα της δομής επαρκούν για τον υπολογισμό της γειτνίασης

Δομές Δεδομένων για Πολυγωνικά Μοντέλα (6)

- Ειδικά για τριγωνικά μοντέλα, τα γειτονικά τρίγωνα μπορούμε να τα χειριστούμε πιο αποδοτικά σαν *ταινία τριγώνων* ή *βεντάλια τριγώνων*, προκειμένου να μειωθούν οι επαναλήψεις δεδομένων



Ταινία τριγώνων
(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4)



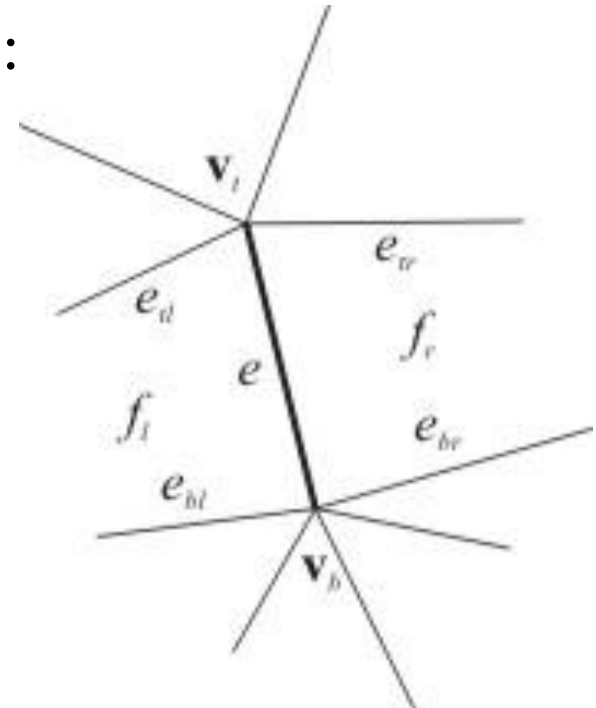
Βεντάλια τριγώνων
(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4)

Δομές Δεδομένων για Πολυγωνικά Μοντέλα (7)

- Οι δεικτοδοτημένη λίστα εδρών μπορεί να συνδυαστεί με άλλα δεικτοδοτημένα (ως προς κορυφές ή έδρες) δεδομένα που αφορούν άλλα γνωρίσματα του μοντέλου :
 - Πχ. χρώμα
- Κάποιες δομές δεδομένων μπορούν να αναπαραστήσουν απευθείας κάποια πληροφορία γειτνίασης & επιτρέπουν την εύκολη παραγωγή πληροφοριών που αφορούν την γειτνίαση
- Αυτές οι δομές δεδομένων είναι δεικτοδοτημένες, περιέχουν τουλάχιστον μια λίστα κορυφών και πραγματεύονται μοντέλα πολλαπλότητας

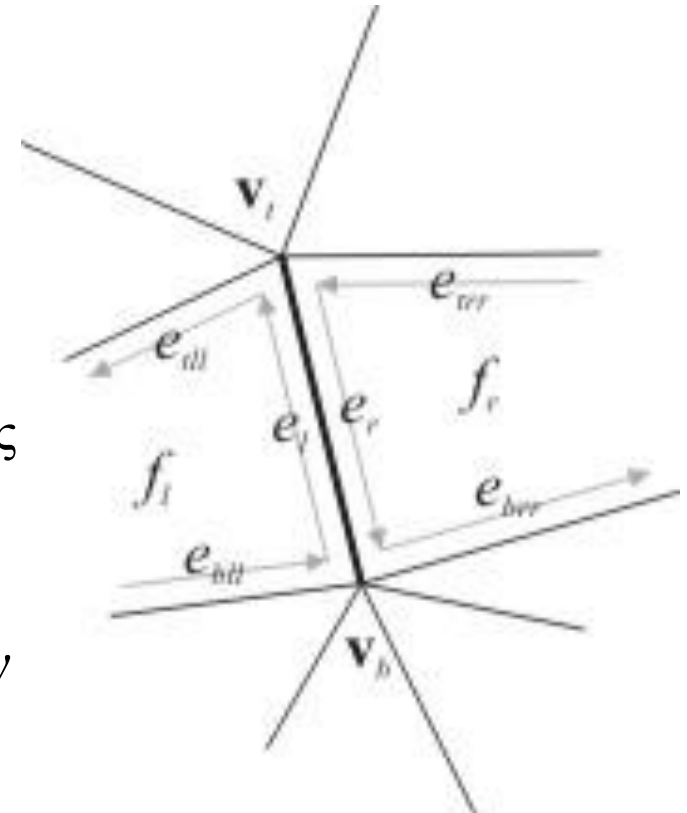
Δομές Δεδομένων για Πολυγωνικά Μοντέλα (8)

- Η δομή *winged-edge*, είναι μια τέτοια δομή:
 - Κεντρικός κόμβος πληροφορίας είναι η ακμή
 - Κάθε ακμή αποθηκεύει αναφορές:
 - u Στις 2 κορυφές της
 - u Στις 2 γειτονικές της έδρες
 - u Στις 4 γειτονικές της ακμές



Δομές Δεδομένων για Πολυγωνικά Μοντέλα (9)

- Η δομή ημι-ακμής είναι παρόμοια με την δομή winged-edge, αλλά χρησιμοποιεί προσανατολισμένες ακμές:
 - Κάθε ακμή διαχωρίζεται σε 2 ημι-ακμές
 - Κάθε ημι-ακμή αποθηκεύει μια αναφορά:
 - u Στην κορυφή που αρχίζει & την κορυφή που τελειώνει
 - u Στη γειτονική έδρα της
 - u Στις 2 γειτονικές της ημι-ακμές κατά μήκος της γειτονικής της έδρας
 - u Στην αντίθετή της ημι-ακμή
 - Η δομή ημι-ακμής είναι πιο αποδοτική από την δομή winged-edge για αρκετές ερωτήσεις γειννίας



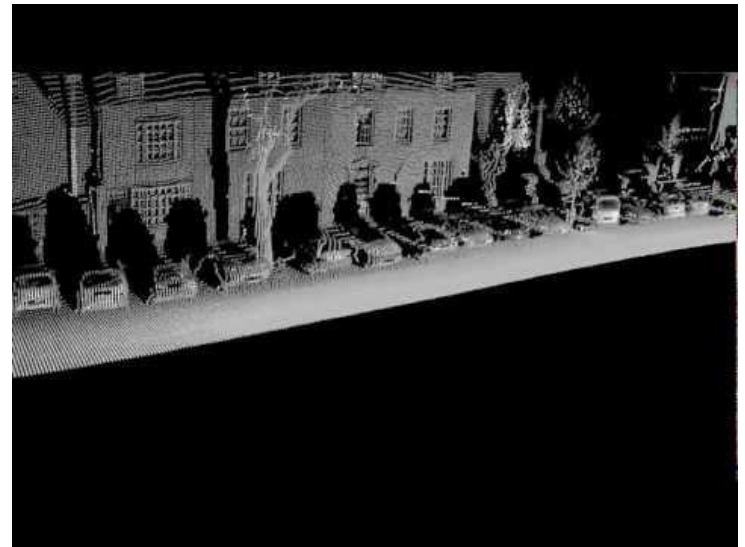
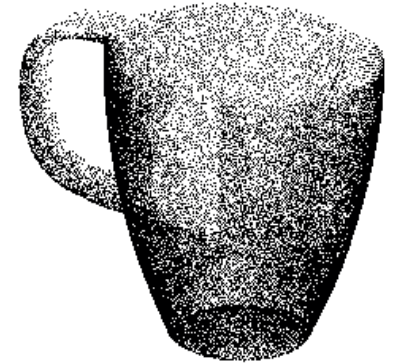
Δομές Δεδομένων για Πολυγωνικά Μοντέλα (10)

- Η δομή *Quad-edge* είναι παρόμοια με τις παραπάνω:
 - Είναι πιο πολύπλοκη
 - Χρησιμοποιείται για τον αποδοτικό υπολογισμό ερωτήσεων γειτνίασης
 - Μπορεί να αναπαραστήσει ταυτόχρονα ένα μοντέλο πολλαπλότητας & το *δυϊκό* του
 - u Το *δυϊκό* μοντέλο κατασκευάζεται περιστρέφοντας τις ακμές κατά 90° , και αντικαθιστώντας τις κορυφές με έδρες & αντίστροφα
- Π.χ. Το *δυϊκό* ενός τετραέδρου είναι ένα τετράεδρο
- Το *δυϊκό* ενός κύβου είναι ένα οκτάεδρο & αντίστροφα
- Χρήσιμη στην *υπολογιστική γεωμετρία*, την αλγοριθμική δηλαδή μελέτη γεωμετρικών προβλημάτων

Απλοποίηση Πολυγωνικού Μοντέλου

- Τα πολυγωνικά μοντέλα συχνά δημιουργούνται αυτόματα με:
 - Σχεδίαση των επιφανειών, που είναι ορισμένες με μαθηματικό τρόπο
 - 3D σάρωση αληθινών αντικειμένων
- Η αύξηση της δύναμης των υπολογιστών και τα πλεονεκτήματα της 3D σάρωσης οδηγούν σε μοντέλα με μεγάλο αριθμό κορυφών και εδρών
- Το έργο *Digital Michelangelo*, π.χ., χρησιμοποίησε σαρωτές προηγμένης τεχνολογίας για να σαρώσει και ανακατασκευάσει κάποια από τα γλυπτά του Μιχαήλ Άγγελου
 - Αποτέλεσμα εκατομμύρια τρίγωνα (1/4 mm πλέγμα σάρωσης)
 - Μερικά gigabytes για δεδομένα
 - Το μέγεθος αυτό της πληροφορίας είναι δύσκολο στην επεξεργασία
 - Αυτή η λεπτομέρεια είναι χρήσιμη μόνο σε συγκεκριμένες εφαρμογές

Απλοποίηση Πολυγωνικού Μοντέλου

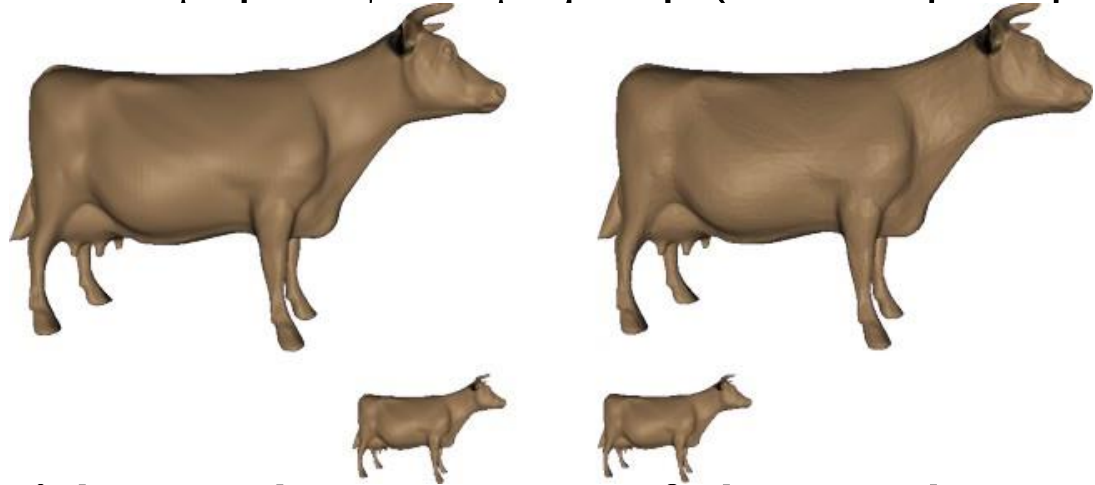


Απλοποίηση Πολυγωνικού Μοντέλου (2)

- Οι εφαρμογές των γραφικών μπορούν να ωφεληθούν από πολλαπλές αναλύσεις (επίπεδα λεπτομέρειας (LODs)) του μοντέλου που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε διαφορετικές συνθήκες θέασης:
 - Όταν η προβολή του μοντέλου είναι μικρή, μόνο ένα μικρό τμήμα λεπτομέρειας είναι ορατό
- Είναι επίσης ωφέλιμο να μεταβάλλεται η λεπτομέρεια σε διαφορετικά σημεία του ίδιου μοντέλου:
 - Συνεπίπεδα τρίγωνα συγχωνεύονται σε λιγότερα και μεγαλύτερα τρίγωνα
 - Περιοχές κοντά στον παρατηρητή χρειάζονται περισσότερη λεπτομέρεια από εκείνες που βρίσκονται μακριά
- Τα επίπεδα λεπτομέρειας και η επιλεκτική λεπτομέρεια, που εξηγήσαμε παραπάνω, είναι κατάλληλα για αλληλεπιδραστικές εφαρμογές

Απλοποίηση Πολυγωνικού Μοντέλου (3)

- Διαφορετικά επίπεδα λεπτομέρειας και μεγέθη: (5000 –αριστερά- vs. 1000 –δεξιά- τρίγωνα)



- Για τους παραπάνω λόγους, έχουν αναπτυχθεί αρκετές τεχνικές απλοποίησης μοντέλων
- Μειώνουν τον αριθμό των εδρών ενός πολυγωνικού μοντέλου, ενώ παράλληλα προσπαθούν να διατηρούν την εμφάνιση και δομή του αρχικού μοντέλου
- Οι σχετικές εφαρμογές, συνήθως έχουν το αρχικό μοντέλο σε διαφορετικά επίπεδα λεπτομέρειας και δυναμικά επιλέγουν την κατάλληλη

Απλοποίηση Πολυγωνικού Μοντέλου (4)

- Οι αλγόριθμοι απλοποίησης:
 - Αντιμετωπίζουν ευκολότερα κλειστά πλέγματα που είναι πολλαπλότητες
 - Χειρίζονται συχνά και το σύνορο των μη-κλειστών μοντέλων
 - Μόνο λίγοι μπορούν να εφαρμοσθούν σε μοντέλα που δεν είναι πολλαπλότητες

Απλοποίηση Πολυγωνικού Μοντέλου (5)

- Οι μέθοδοι απλοποίησης χωρίζονται σε 2 μεγάλες ομάδες:
 - Αυτές που παράγουν *διακριτά* επίπεδα λεπτομέρειας του αρχικού μοντέλου
 - Αυτές που παράγουν *συνεχή* επίπεδα λεπτομέρειας του αρχικού μοντέλου
- Διακριτά επίπεδα λεπτομέρειας:
 - Ορίζεται ο επιθυμητός αριθμός εδρών
 - Δημιουργείται ένα νέο μοντέλο με τον επιθυμητό αριθμό εδρών
 - Αν ζητηθεί άλλο επίπεδο λεπτομέρειας, ο αλγόριθμος εκτελείται ξανά
- Συνεχή επίπεδα λεπτομέρειας:
 - Παράγεται μια συνεχής ακολουθία από όλο και περισσότερο απλοποιημένα μοντέλα, χρησιμοποιώντας τοπικές απλοποιήσεις του αρχικού μοντέλου
 - Μπορεί να παραχθεί οποιοδήποτε ενδιάμεσο επίπεδο λεπτομέρειας, με καταγραφή των βημάτων απλοποίησης

Απλοποίηση Πολυγωνικού Μοντέλου (6)

- Οι αλγόριθμοι συνεχούς απλοποίησης είναι πιο ενδιαφέροντες από τους διακριτούς
- Είναι προσαρμοστικοί και εύκολα *αντιστρέψιμοι* → επιτρέπουν στην εφαρμογή να κινείται «πάνω» και «κάτω» μεταξύ των επιπέδων λεπτομέρειας
- Υποστηρίζουν την *επιλεκτική εκλέπτυνση*, δηλαδή την δυναμική προσαρμογή της λεπτομέρειας σε διάφορα μέρη του μοντέλου
- *Ομαλή* εκλέπτυνση του πλέγματος → ελαχιστοποίηση οπτικών ατελειών κατά την εναλλαγή επιπέδων λεπτομέρειας σε διαδραστικές εφαρμογές.

Απλοποίηση Πολυγωνικού Μοντέλου (7)

- Πως εκτιμούμε την ποιότητα του απλοποιημένου μοντέλου σε σχέση με το αρχικό;
- Οι περισσότεροι αλγόριθμοι οδηγούνται από συγκεκριμένα μέτρα για να ορίσουν, π.χ.:
 - Ποια είναι η κατάλληλη θέση για μια νέα κορυφή
 - Ποια ακμή πρέπει να αφαιρεθεί πρώτη για να μειωθεί η διαφορά μεταξύ αρχικού και απλοποιημένου μοντέλου
- Αυτά τα μέτρα δίνουν επίσης μια εκτίμηση της ποιότητας του τελικού μοντέλου → οι αλγόριθμοι απλοποίησης μπορούν να συγκριθούν

Απλοποίηση Πολυγωνικού Μοντέλου (8)

- Τα πιο διαδεδομένα μέτρα, εκτιμούν κάποια απόσταση του απλοποιημένου μοντέλου από το αρχικό:

- *Απόσταση Hausdorff*: μετράει τη μέγιστη απόσταση μεταξύ 2 οποιωνδήποτε σημείων 2 επιφανειών M και M'

$$d_{\infty}(M, M') = \max(\max_{\mathbf{v} \in M} \{d(\mathbf{v}, M')\}, \max_{\mathbf{v}' \in M'} \{d(\mathbf{v}', M)\}),$$

όπου $d(\mathbf{v}, M) = \min_{\mathbf{w} \in M} \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ είναι η απόσταση ενός σημείου $\mathbf{v}$ από μια επιφάνεια M , ορισμένη ως η απόσταση του $\mathbf{v}$ από το πιο κοντινό σημείο $\mathbf{w}$ της επιφάνειας

- *Μέση τετραγωνική απόσταση 2 επιφανειών*:

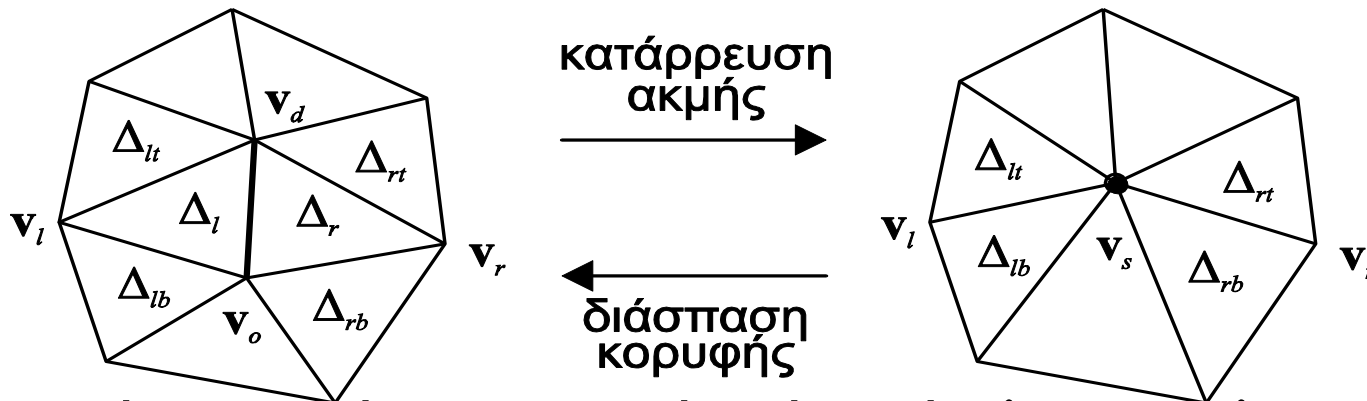
$$d_2(M, M') = \frac{1}{s} \int_{\mathbf{v} \in M} d(\mathbf{v}, M') + \frac{1}{s'} \int_{\mathbf{v}' \in M'} d(\mathbf{v}', M),$$

όπου s και s' είναι επιφάνειες των M και M' αντίστοιχα

- Αυτές οι εξισώσεις πρέπει να είναι διακριτές για να μπορούν να υπολογιστούν πάνω σε πολυγωνικά μοντέλα $\rightarrow$ επιτυγχάνεται με τη δειγματοληψία σημείων πάνω στις επιφάνειες

Απλοποίηση με Διαδοχικές Καταρρεύσεις Ακμών

- Κατάρρευση Ακμής (edge collapse):
 - Τοπική πράξη σε τριγωνικό πλέγμα
 - Αφαιρεί μια ακμή του μοντέλου και 2 γειτονικά της τρίγωνα με την κατάρρευση μιας ακμής σε μία κορυφή



- Χρησιμοποιώντας κατάρρευση ακμών, είναι εύκολος ο υπολογισμός της απόστασης μεταξύ του απλοποιημένου και του αρχικού μοντέλου $\rightarrow$ διαφέρουν στις έδρες γύρω από την ακμή που κατέρρευσε
- Υποθέτουμε μοντέλα που είναι πολλαπλότητες, αλλά υπάρχουν και παραλλαγές για μη πολλαπλότητες

Απλοποίηση με Διαδοχικές Καταρρεύσεις Ακμών

- Παράδειγμα

Απλοποίηση με Διαδοχικές Καταρρεύσεις Ακμών (2)

- Αλγόριθμος κατάρρευσης ακμής:
 1. Για κάθε ακμή του μοντέλου που μπορεί να καταρρεύσει, υπολόγισε μια προτεραιότητα κατάρρευσης και ταξινόμησε τις ακμές σε μια ουρά προτεραιότητας
 2. Όσο υπάρχουν υποψήφιος ακμές στην ουρά και ο στόχος απλοποίησης (μέγιστο σφάλμα, πλήθος εδρών του μοντέλου) δεν έχει επιτευχθεί:
 - a) Αφαίρεσε την πρώτη ακμή από την ουρά
 - b) Κατέρρευσε την ακμή (το πλέγμα αλλάζει μόνο τοπικά γύρω από την ακμή)
 - c) Επανυπολόγισε τις προτεραιότητες των ακμών που επηρέασε η κατάρρευση
- Παράγοντες που επηρεάζουν το αποτέλεσμα της μεθόδου:
 - Το μέτρο εκτίμησης μεταβολής του πλέγματος για κάθε κατάρρευση ακμής (εκχώρηση της προτεραιότητας)
 - Η θέση της νέα κορυφής κατά την κατάρρευση ακμής

Απλοποίηση με Διαδοχικές Καταρρεύσεις Ακμών (3)

- Σε μερικές υλοποιήσεις, η θέση της νέας κορυφής είναι σταθερή (π.χ. ένα από τα δύο άκρα ή μέσον)
- Σε άλλες υλοποιήσεις, οι παραπάνω 2 παράγοντες είναι συσχετισμένοι:
 - Η θέση της νέας κορυφής υπολογίζεται σαν αποτέλεσμα μιας μεθόδου βελτιστοποίησης, που ελαχιστοποιεί το σφάλμα απλοποίησης
 - Το ελάχιστο σφάλμα που επιτυγχάνεται χρησιμοποιείται και σαν προτεραιότητα της κατάρρευσης ακμής

Απλοποίηση με Διαδοχικές Καταρρεύσεις Ακμών (4)

- Απλοποίηση με τη μέθοδο *τετραγωνικού σφάλματος*:
 - Ελαχιστοποιεί την τετραγωνική απόσταση της νέας κορυφής από τις έδρες γύρω από την ακμή που κατέρρευσε
 - Έστω Δ μια τριγωνική πλευρά του μοντέλου με εξίσωση επιπέδου:

$$ax + by + cz + d = 0$$

- Τετραγωνική απόσταση σημείου $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$ από το επίπεδο Δ :

$$Q_{\Delta}(\mathbf{x}) = \frac{(ax + by + cz + d)^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{(\vec{\mathbf{n}}^T \mathbf{x} + d)^2}{|\vec{\mathbf{n}}|^2} = (\hat{\mathbf{n}}^T \mathbf{x} + \hat{d})^2 = \mathbf{x}^T (\hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}}^T) \mathbf{x} + 2\hat{d} \hat{\mathbf{n}}^T \mathbf{x} + \hat{d}^2,$$

όπου $\hat{\mathbf{n}} = \frac{\vec{\mathbf{n}}}{|\vec{\mathbf{n}}|}$ είναι το μοναδιαίο κανονικό διάνυσμα του Δ και $\hat{d} = \frac{d}{|\vec{\mathbf{n}}|}$

- Μπορεί να αναπαρασταθεί από την τετραγωνική μορφή:

$$Q_{\Delta} = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, p) = (\hat{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{n}}^T, \hat{d} \hat{\mathbf{n}}, \hat{d}^2),$$

οπότε:

$$Q_{\Delta}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x} + p$$

Απλοποίηση με Διαδοχικές Καταρρεύσεις Ακμών (5)

- Έτσι, το άθροισμα των τετραγωνικών αποστάσεων του $\mathbf{x}$ από 2 τρίγωνα Δ_1 και Δ_2 υπολογίζεται με άθροιση των τετραγωνικών μορφών:

$$Q_{\Delta_1} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_1, p_1) \quad \text{και} \quad Q_{\Delta_2} = (\mathbf{A}_2, \mathbf{b}_2, p_2) :$$

$$Q_{\Delta_1}(\mathbf{x}) + Q_{\Delta_2}(\mathbf{x}) = (Q_{\Delta_1} + Q_{\Delta_2})(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \mathbf{x} + 2(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)^T \mathbf{x} + (p_1 + p_2)$$

- Το αποτέλεσμα είναι επίσης τετραγωνικής μορφής
- Γενικεύεται για οποιοδήποτε αριθμό τριγώνων
- Ο αλγόριθμος απλοποίησης αρχικά αποδίδει σε κάθε κορυφή $\mathbf{v}$ του πλέγματος, τη μορφή που εκφράζει το άθροισμα των τετραγωνικών αποστάσεων ενός σημείου από τις έδρες γύρω από την κορυφή:

$$Q_v = \sum_{\Delta \text{ around } \mathbf{x}} w_{\Delta} Q_{\Delta}$$

όπου w_{Δ} είναι το βάρος της επιφάνειας της αντίστοιχης έδρας $\rightarrow$ καλύτερη κλιμάκωση

Απλοποίηση με Διαδοχικές Καταρρεύσεις Ακμών (6)

- Αφού η ακμή $e(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_d)$ καταρρεύσει, η συνολική τετραγωνική απόσταση της προκύπτουσας κορυφής $\mathbf{v}_s$ από όλες τις έδρες γύρω από τις $\mathbf{v}_0$ και $\mathbf{v}_d$ είναι:

$$Q(\mathbf{v}_s) = Q_{\mathbf{v}_0}(\mathbf{v}_s) + Q_{\mathbf{v}_d}(\mathbf{v}_s) \quad \text{ή} \quad Q = Q_{\mathbf{v}_0} + Q_{\mathbf{v}_d}$$

που είναι η γνωστή μορφή $Q = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, p)$

- Η θέση που ελαχιστοποιεί το Q είναι η **βέλτιστη** για την $\mathbf{v}_s$
- Μετά από παραγωγή, προκύπτει ότι το ελάχιστο του Q επιτυγχάνεται για $\mathbf{v}_s = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ και το ελάχιστο είναι:

$$Q(\mathbf{v}_s) = -\mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} + p = \mathbf{b}^T \mathbf{v}_s + p$$

- Αν ο $\mathbf{A}$ είναι ιδιάζων πίνακας $\rightarrow$ η ελαχιστοποίηση περιορίζεται πάνω στην ακμή $e(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_d)$
 - Αν αποτύχει, η $\mathbf{v}_s$ επιλέγεται ανάμεσα στις $\mathbf{v}_0$ και $\mathbf{v}_d$, ανάλογα με το ποια κορυφή δίνει τη μικρότερη τιμή στο Q

Απλοποίηση με Διαδοχικές Καταρρεύσεις Ακμών (7)

- Η απλοποίηση με επαναληπτική κατάρρευση ακμών έχει όλες τις ιδιότητες των μεθόδων συνεχών επιπέδων λεπτομέρειας:
 - Είναι εύκολα αντιστρέψιμη με την πράξη διάσπασης κορυφής σε αντίστροφη σειρά σε σχέση με τις καταρρεύσεις ακμών → πρέπει να διατηρούνται οι αρχικές θέσεις κορυφών για κάθε κατάρρευση ακμής
 - Προοδευτικό πλέγμα: το απλοποιημένο πλέγμα μαζί με την ακολουθία διασπάσεων κορυφών που οδηγούν στο αρχικό
 - Με τη φύλαξη πληροφορίας για γειτονικές κορυφές και έδρες κάθε κατάρρευσης ακμής, είναι δυνατή η εφαρμογή επιλεκτικής εκλέπτυνσης και εκτράχυνσης του πλέγματος σε περιοχές ενδιαφέροντος
 - Μπορούν να εφαρμοσθούν διάφορα μέτρα σφάλματος και στρατηγικές για την τοποθέτηση κορυφής, οπότε η μέθοδος προσαρμόζεται σε πολλαπλούς σκοπούς και διαθέσιμους πόρους.

Απλοποίηση με Διαδοχικές Καταρρεύσεις Ακμών (8)

- Η απλοποίηση μεγάλων μοντέλων είναι χρονοβόρος
 - Αν χρησιμοποιείται διαδικασία βελτιστοποίησης, κοστίζει ακόμα περισσότερο → συνήθως προϋπολογίζεται
 - Τα επίπεδα λεπτομέρειας μπορούν να αξιοποιηθούν *διαδραστικά* σε πραγματικό χρόνο για επιλεκτική εκλέπτυνση του μοντέλου
- Η απλοποίηση με βάση την κατάρρευση ακμών διαδίδεται και υπάρχει σε αρκετές βιβλιοθήκες γραφικών (π.χ. DirectX)