

Γραφικά και Εικονική Πραγματικότητα

2Δ & 3Δ Συστήματα Συντεταγμένων & Μετασχηματισμοί

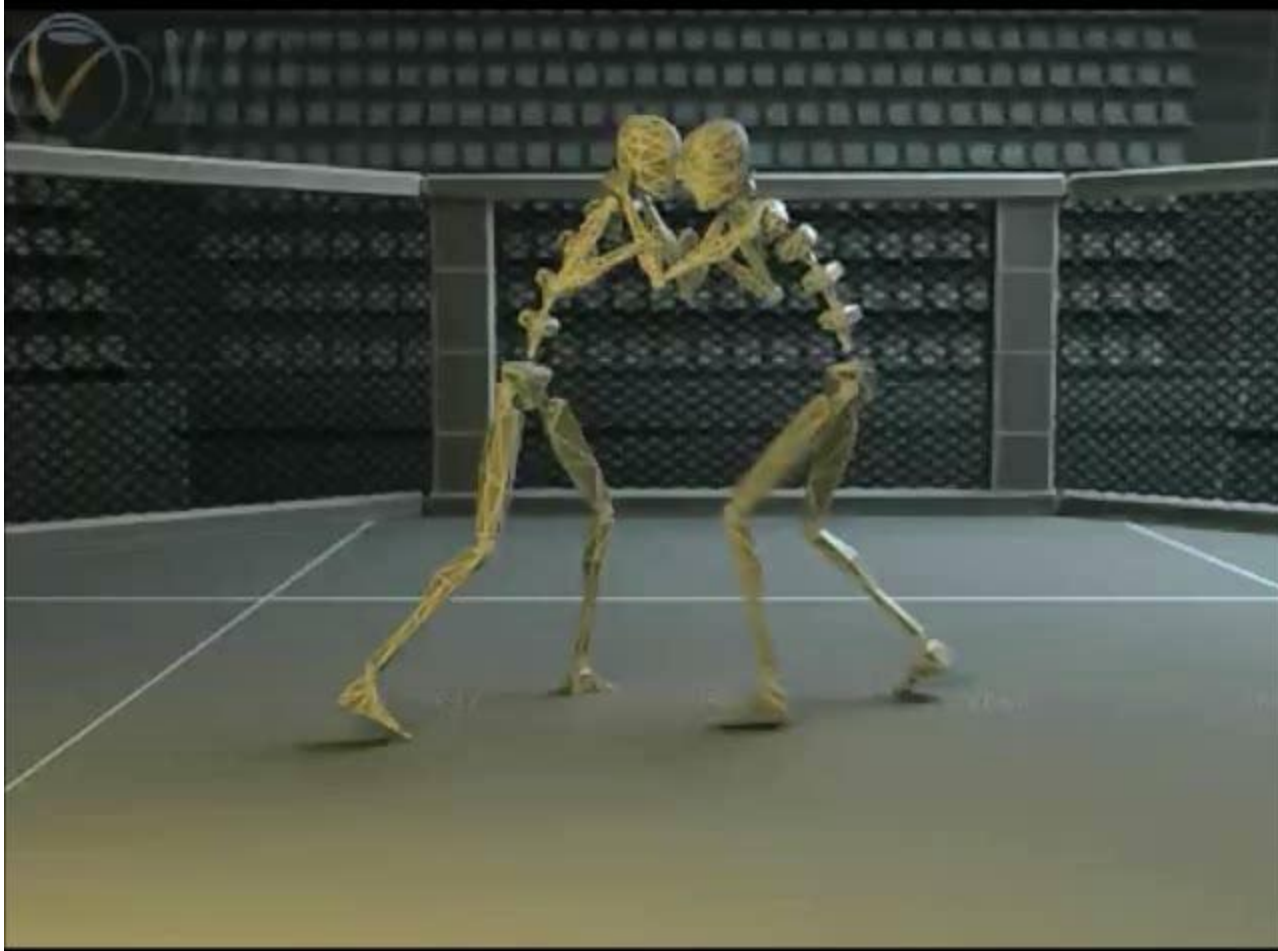
Εισαγωγή

- Στα γραφικά με υπολογιστή συχνά πρέπει να μεταβληθεί:
 - Η μορφή των αντικειμένων
 - Το σύστημα συντεταγμένων
- Παραδείγματα:
 - Σε μια σκηνή, ένα ψηφιοποιημένο αυτοκίνητο μπορεί να χρησιμοποιείται σε διαφορετικά στιγμιότυπα: σε διάφορα σημεία, κατευθύνσεις και μεγέθη
 - Στην συνθετική κίνηση, ένα αντικείμενο μεταβάλλεται μεταξύ των καρέ
 - Καθώς αντικείμενα διασχίζουν την σωλήνωση γραφικών, αλλάζουν το σύστημα συντεταγμένων τους:
 - Σύστημα Συντεταγμένων Αντικειμένου → Σύστημα Συντεταγμένων Κόσμου
 - Σύστημα Συντεταγμένων Κόσμου → Σύστημα Συντεταγμένων Παρατηρητή
 - Μετασχηματισμοί Συντεταγμένων:
 - Εργαλεία για μεταβολή αντικειμένων
 - **Το σημαντικότερο κομμάτι των γραφικών**

Εισαγωγή



Εισαγωγή



Εισαγωγή



Εισαγωγή (2)

- 3Δ σημεία στον Ευκλείδειο χώρο E^3 : 3×1 διανύσματα στήλες

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

- Γραμμικοί μετασχηματισμοί: - 3×3 πίνακες
- πολλαπλασιάζονται **από αριστερά**
με σημείο, παράγοντας νέο σημείο

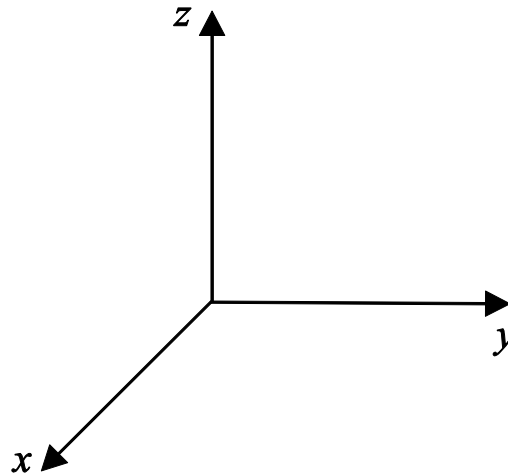
$$\begin{bmatrix} p_{x'} \\ p_{y'} \\ p_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_4 & m_5 & m_6 \\ m_7 & m_8 & m_9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

Εισαγωγή (3)

- Αν αναπαριστούσαμε τα σημεία σαν διανύσματα γραμμής 1×3
 $\mathbf{p} = [p_x \ p_y \ p_z]$ οι γραμμικοί μετασχηματισμοί θα έπρεπε να πολλαπλασιάζονται με το σημείο **από δεξιά**

$$\begin{bmatrix} p_{x'} & p_{y'} & p_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 & m_4 & m_7 \\ m_2 & m_5 & m_8 \\ m_3 & m_6 & m_9 \end{bmatrix}$$

- Χρησιμοποιούμε δεξιόστροφα συστήματα συντεταγμένων:



Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί - Συνδυασμοί

- Μαθηματικά: **Μετασχηματισμοί:**
απεικονίσεις με πεδίο ορισμού και τιμών το ίδιο σύνολο
(π.χ. $E^3 \rightarrow E^3$)
- Γραφικά Υπολογιστή & Οπτικοποίηση:
Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί:
μετασχηματισμοί που διατηρούν αναλλοίωτες σημαντικές γεωμετρικές ιδιότητες των μεταβαλλόμενων αντικειμένων
- Οι Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί διατηρούν τους Συσχετισμένους Συνδυασμούς
- Παραδείγματα συσχετισμένων συνδυασμών :
 - Ευθύγραμμα τμήματα, κυρτά πολύγωνα, τρίγωνα, τετράεδρα $\rightarrow$ δομικά συστατικά των μοντέλων

Συσχετισμένοι Συνδυασμοί

- Συσχετισμένος συνδυασμός των σημείων $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in E^3$ είναι ένα σημείο $\mathbf{p} \in E^3$:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=0}^n a_i \mathbf{p}_i$$

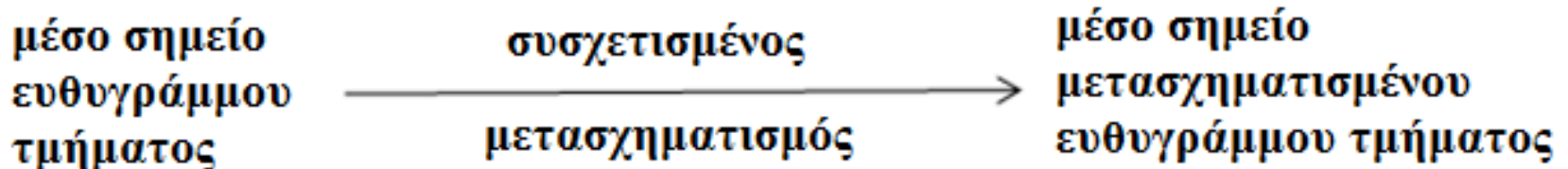
όπου $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

και $\sum_{i=0}^n a_i = 1$: συσχετισμένες συντεταγμένες του $\mathbf{p}$
ως προς τα $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$

- Κυρτός συσχετισμένος συνδυασμός:
 - Αν όλα τα $a_i \geq 0$, $i = 0, 1, \dots, n$
 - Ο συσχετισμένος συνδυασμός $\mathbf{p}$ βρίσκεται εντός του κυρτού περιβλήματος των αρχικών σημείων $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$
 - π.χ. 1: Ευθ. Τμήμα μεταξύ των σημείων $\mathbf{p}_1$ και $\mathbf{p}_2$ είναι το σύνολο σημείων $\mathbf{p}$:
 $\mathbf{p} = a_1 \cdot \mathbf{p}_1 + a_2 \cdot \mathbf{p}_2$ με $0 \leq a_1 \leq 1$ και $a_2 = 1 - a_1$
 - π.χ. 2: Τρίγωνο με κορυφές $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ είναι το σύνολο σημείων $\mathbf{p}$:
 $\mathbf{p} = a_1 \cdot \mathbf{p}_1 + a_2 \cdot \mathbf{p}_2 + a_3 \cdot \mathbf{p}_3$ με $0 \leq a_1, a_2, a_3 \leq 1$ και $a_1 + a_2 + a_3 = 1$

Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί

- Συσχετισμένος Μετασχηματισμός:
 - Μετασχηματισμός που διατηρεί τους συσχετισμένους συνδυασμούς
 - Διατηρεί τη σχέση μεταξύ των σημείων
- Ένας μετασχηματισμός $\Phi: E_n^3 \rightarrow E^3$ είναι συσχετισμένος αν $\Phi(\mathbf{p}) = \sum_{i=0}^n a_i \Phi(\mathbf{p}_i)$ όπου $\mathbf{p} = \sum_{i=0}^n a_i \mathbf{p}_i$: συσχετισμένος συνδυασμός
- Η εφαρμογή ενός συσχετισμένου μετασχηματισμού στο αποτέλεσμα $\mathbf{p}$ συσχετισμένου συνδυασμού *πρέπει να είναι ισοδύναμη* με τον συσχετισμένο συνδυασμό του συσχετισμένου μετασχηματισμού των σημείων ορισμού με τα ίδια βάρη a_i
- π.χ.



Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί (2)

- Πρακτική συνέπεια:
 - Τα εσωτερικά σημεία **δεν** χρειάζεται να μετασχηματιστούν
 - Αρκεί ο μετασχηματισμός των σημείων ορισμού
- Π.χ. εφαρμογή συσχετισμένου μετασχηματισμού σε τρίγωνο:
 - Μόνο στις 3 κορυφές και όχι στα (άπειρα) εσωτερικά σημεία

Γενικός Συσχετισμένος Μετασχηματισμός

Απεικόνιση μορφής $\Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \vec{\mathbf{t}}$ (1) όπου $\mathbf{A}$ ένας 3×3 πίνακας
 $\vec{\mathbf{t}}$ ένας 3×1 πίνακας

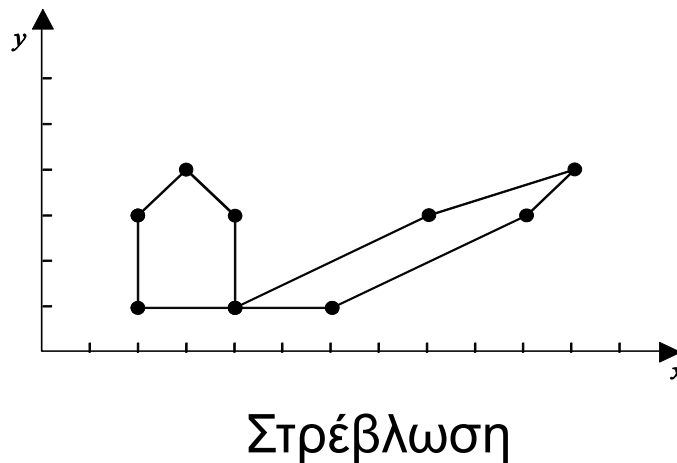
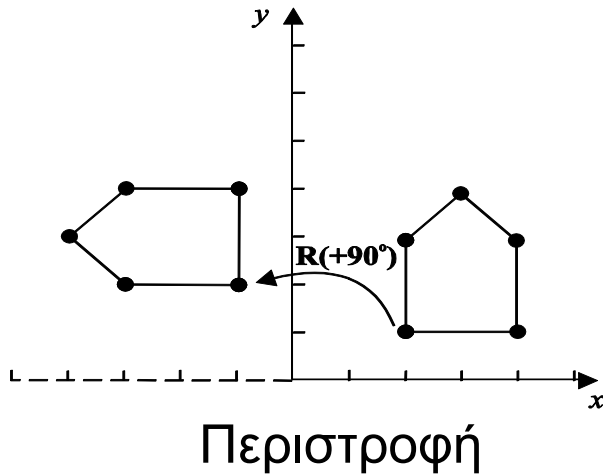
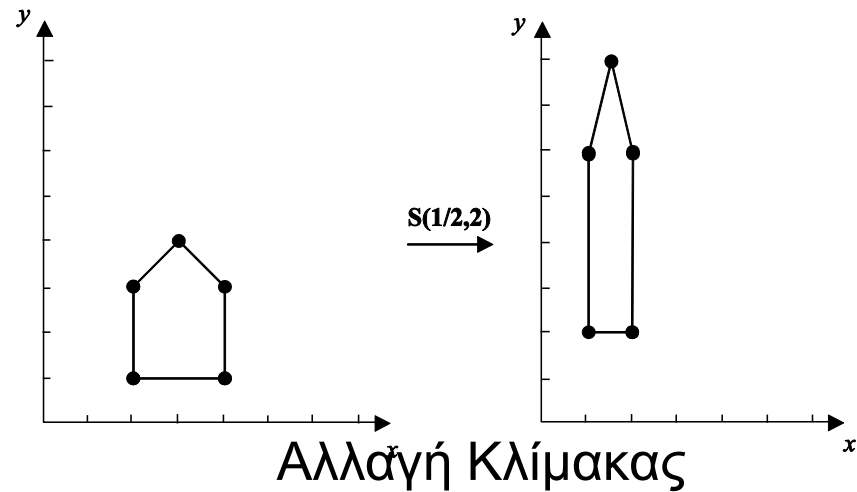
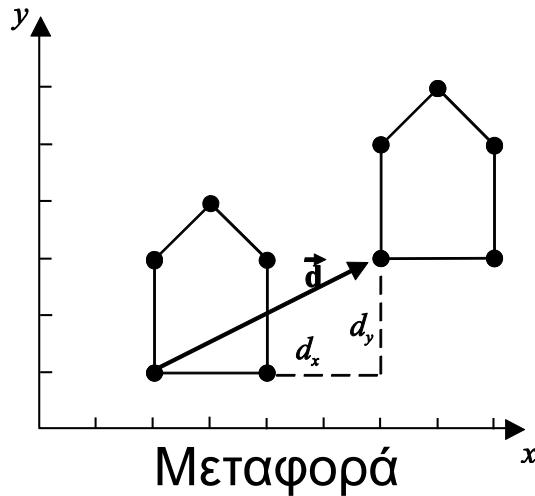
είναι συσχετισμένος μετασχηματισμός στο E^3 .

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι η (1) διατηρεί τους συσχετισμένους συνδυασμούς

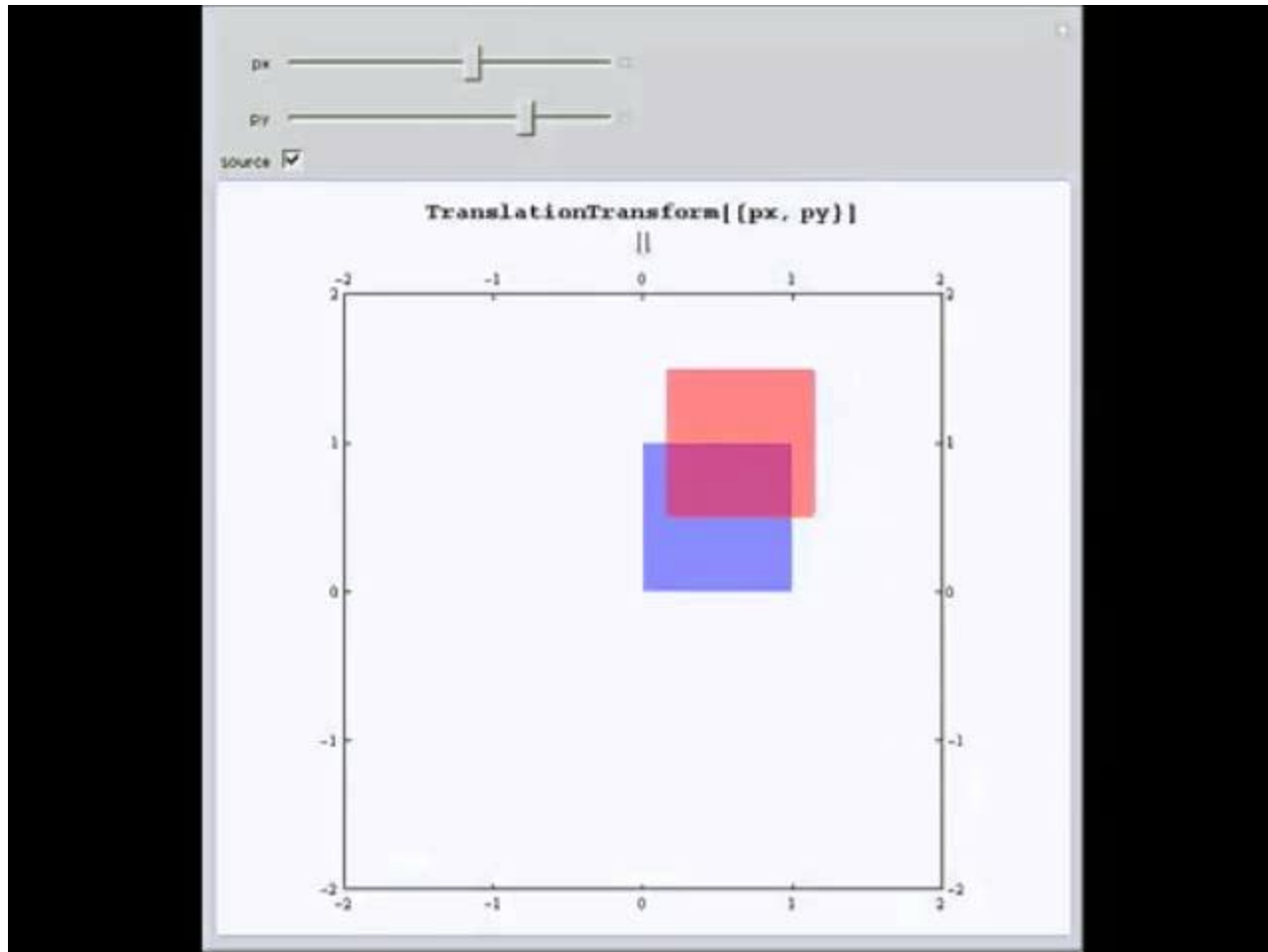
$$\begin{aligned}\Phi\left(\sum_{i=0}^n a_i \mathbf{p}_i\right) &= \mathbf{A}\left(\sum_{i=0}^n a_i \mathbf{p}_i\right) + \vec{\mathbf{t}} = \sum_{i=0}^n a_i \mathbf{A} \mathbf{p}_i + \sum_{i=0}^n a_i \vec{\mathbf{t}} \\ &= \sum_{i=0}^n a_i (\mathbf{A} \mathbf{p}_i + \vec{\mathbf{t}}) = \sum_{i=0}^n a_i \Phi(\mathbf{p}_i).\end{aligned}$$

2Δ Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί

- Αποτελέσματα στις 2Δ γενικεύονται στις 3Δ
- 4 βασικοί συσχετισμένοι μετασχηματισμοί:



Μεταφορά στις 2Δ

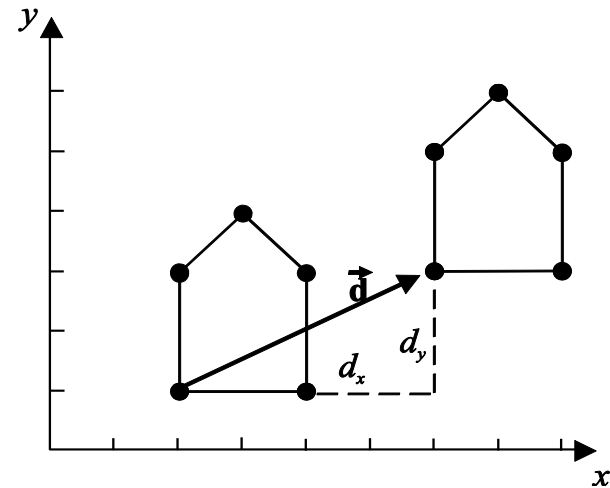


Μεταφορά στις 2Δ

- Ορίζει κίνηση συγκεκριμένης απόστασης και κατεύθυνσης, που ορίζονται από το διάνυσμα μεταφοράς

- Η μετατόπιση στις 2Δ ενός σημείου $\mathbf{p}=[x,y]^T$ κατά διάνυσμα $\vec{\mathbf{d}}=[d_x,d_y]^T$ δίνει ένα νέο σημείο $\mathbf{p}'=[x',y']^T$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \vec{\mathbf{d}}$$



- Η μεταφορά είναι στιγμιότυπο του $\Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \vec{\mathbf{t}}$ όπου $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ και $\vec{\mathbf{t}} = \vec{\mathbf{d}}$ ($\mathbf{I}$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας 2×2)

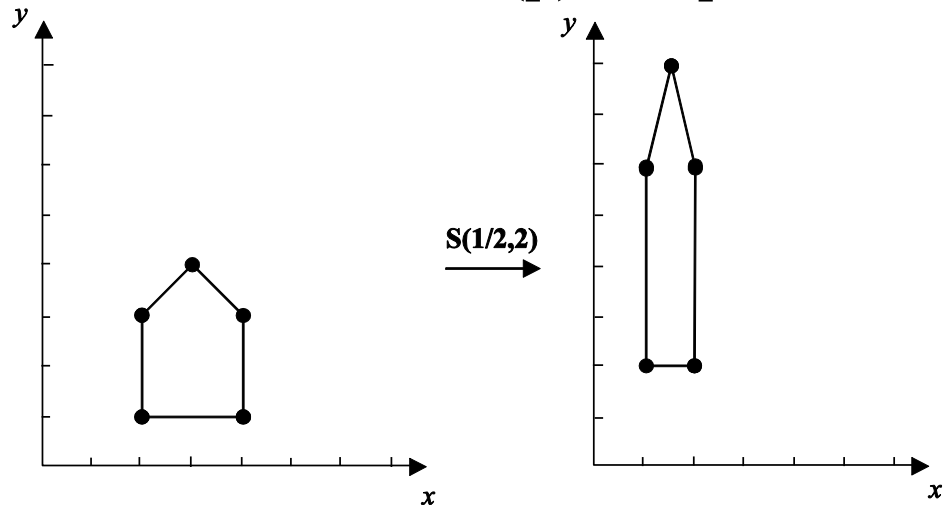
Αλλαγή Κλίμακας στις 2Δ

Αλλαγή Κλίμακας στις 2Δ

- Αλλάζει το μέγεθος των αντικειμένων
- Συντελεστής αλλαγής κλίμακας: ορίζει μεταβολή $\forall$ διάσταση
- 2Δ: s_x & s_y είναι οι συντελεστές αλλαγής κλίμακας που πολλαπλασιάζουν τις αντίστοιχες συντεταγμένες του $\mathbf{p}=[x, y]^T$
- Αλλαγή κλίμακας στις 2Δ σημείου $\mathbf{p}=[x, y]^T$ δίνει το $\mathbf{p}'=[x', y']^T$:

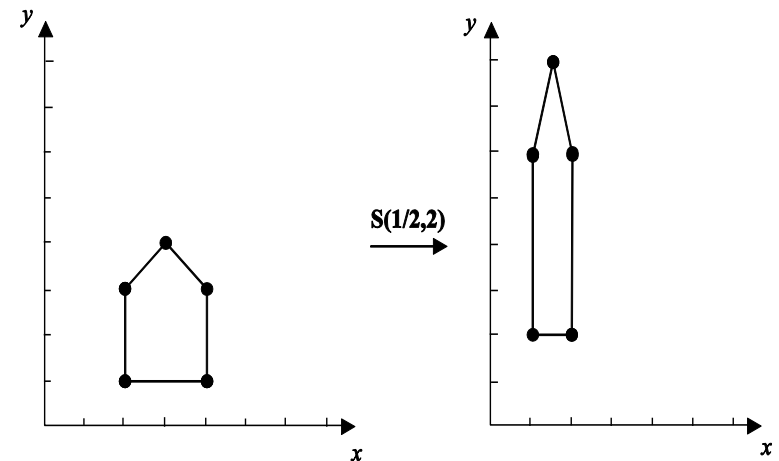
$$\mathbf{p}' = \mathbf{S}(s_x, s_y) \cdot \mathbf{p} \text{ όπου } \mathbf{S}(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$$

- Η αλλαγή κλίμακας είναι στιγμιότυπο του $\Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \vec{\mathbf{t}}$ όπου $\mathbf{A} = \mathbf{S}(s_x, s_y)$ και $\vec{\mathbf{t}} = \vec{\mathbf{0}}$



Αλλαγή Κλίμακας στις 2Δ (2)

- Αλλαγή κλίμακας σε σημείο δεν είναι παρατηρήσιμη
- Αν ο συντελεστής αλλαγής κλίμακας $< 1 \rightarrow$ συρρίκνωση αντικειμένου
ο συντελεστής αλλαγής κλίμακας $> 1 \rightarrow$ μεγέθυνση αντικειμένου
- Παρενέργεια μεταφοράς (ανάλογη συντελεστή αλλαγής κλίμακας):
 - Μετακίνηση αντικειμένου προς την αρχή του άξονα x ($s_x < 1$)
 - Μετακίνηση αντικειμένου μακριά από την αρχή του άξονα y ($s_y > 1$)
- Ομοιόμορφη αλλαγή κλίμακας:
 - Αν όλοι οι συντελεστές αλλαγής κλίμακας είναι ίσοι (στις 2Δ $s_x = s_y$)
 - Διατηρεί τις αναλογίες των αντικειμένων
- Κατοπτρισμός:
 - Ειδική περίπτωση: Συντελεστής αλλαγής κλίμακας -1
 - Για τον άξονα x : $S(1,-1)$ και για τον άξονα y : $S(-1,1)$



Περιστροφή στις 2Δ

- Περιστρέφει τα αντικείμενα γύρω από το κέντρο συντεταγμένων
- *Αλλάζει ο προσανατολισμός αλλά όχι η απόσταση του αντικειμένου σε σχέση με το κέντρο*
- Η αριστερόστροφη περιστροφή είναι θετική (αντίθετη δεικτών ρολ.)
- Το $\mathbf{p}' = [x', y']^T$ μπορεί να υπολογιστεί από το $\mathbf{p} = [x, y]^T$:

$$x' = l \cos(\phi + \theta) = l(\cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta) = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = l \sin(\phi + \theta) = l(\cos \phi \sin \theta + \sin \phi \cos \theta) = x \sin \theta + y \cos \theta$$

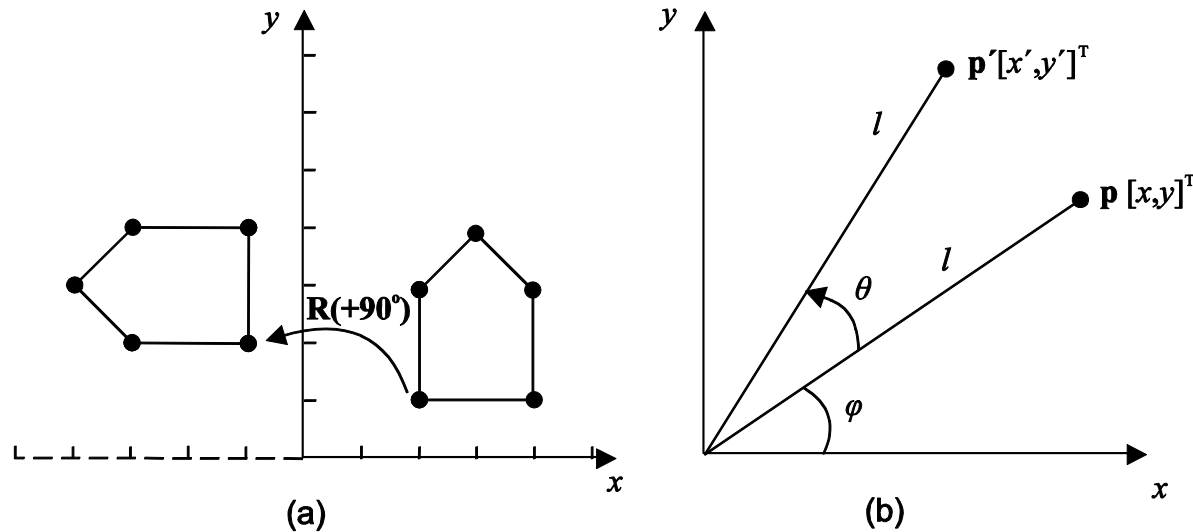
Έτσι:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{p}$$

Περιστροφή στις 2Δ (2)

- Όπου:

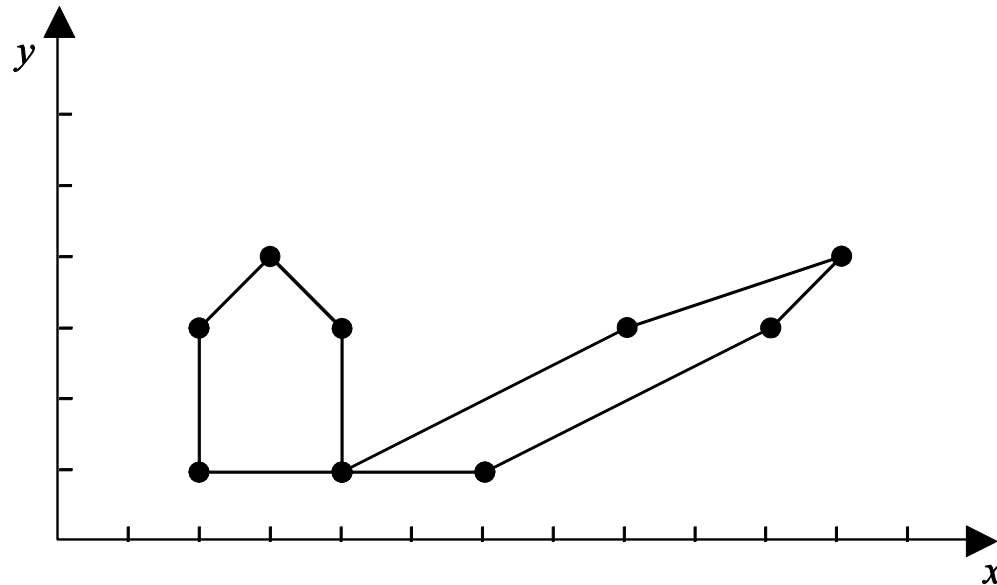
$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



- Η περιστροφή είναι στιγμιάτυπο του $\Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \vec{\mathbf{t}}$
όπου $\mathbf{A} = \mathbf{R}(\theta)$ και $\vec{\mathbf{t}} = \vec{\mathbf{0}}$

Στρέβλωση στις 2Δ

- Αυξάνει μια συντεταγμένη του αντικειμένου κατά ποσότητα ίση με μια άλλη συντεταγμένη επί τον παράγοντα στρέβλωσης



Στρέβλωση στις 2Δ (2)

- Μπορούμε να υπολογίσουμε το $\mathbf{p}' = [x', y']^T$ από το $\mathbf{p} = [x, y]^T$:
στρέβλωση στον άξονα $x \rightarrow x' = x + ay, y' = y$
στρέβλωση στον άξονα $y \rightarrow x' = x, y' = bx + y$
όπου a και b είναι οι αντίστοιχοι παράγοντες στρέβλωσης
- Σε μορφή πινάκων:

$$\text{στρέβλωση στον άξονα } x \rightarrow \mathbf{p}' = \mathbf{SH}_x(a) \cdot \mathbf{p}, \text{ όπου } \mathbf{SH}_x(a) = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{στρέβλωση στον άξονα } y \rightarrow \mathbf{p}' = \mathbf{SH}_y(b) \cdot \mathbf{p}, \text{ όπου } \mathbf{SH}_y(b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$$

- Η στρέβλωση είναι ένα στιγμιότυπο του συσχετισμένου μετασχηματισμού $\Phi(\mathbf{p}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \vec{\mathbf{t}}$, όπου $\mathbf{A} = \mathbf{SH}_x(a)$ ή $\mathbf{A} = \mathbf{SH}_y(b)$ και $\vec{\mathbf{t}} = \vec{\mathbf{0}}$

Σύνθετοι Μετασχηματισμοί

- Πρακτικά, οι μετασχηματισμοί στα γραφικά και στην οπτικοποίηση σπάνια αποτελούνται από έναν απλό συσχετισμένο μετασχηματισμό
- Οι μετασχηματισμοί εφαρμόζονται σε όλα τα αντικείμενα της σκηνής
- Τα αντικείμενα ορίζονται από χιλιάδες ή εκατομμύρια κορυφές
- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Περιστροφή 2Δ αντικειμένου κατά 45° και έπειτα ισότροπη αλλαγή κλίμακας κατά παράγοντα 2

- Εφαρμογή πίνακα περιστροφής:
$$\mathbf{R}(45^\circ) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

- Έπειτα εφαρμογή του πίνακα αλλαγής κλίμακας:

$$\mathbf{S}(2, 2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Σύνθετοι Μετασχηματισμοί (2)

- Εφαρμογή των πινάκων ακολουθιακά σε κάθε κορυφή $\mathbf{p}$:
 $\mathbf{S}(2, 2) (\mathbf{R}(45^\circ) \mathbf{p}) \rightarrow \text{ΜΗ ΑΠΟΔΟΤΙΚΟ}$
- Εναλλακτικά: Χρήση της προσεταιριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού πινάκων & εφαρμογή του (προυπολογισμένου) αποτελέσματος στις κορυφές:
 $(\mathbf{S}(2, 2) \mathbf{R}(45^\circ)) \mathbf{p} \rightarrow \text{ΠΙΟ ΑΠΟΔΟΤΙΚΟ}$
- Ο σύνθετος μετασχηματισμός υπολογίζεται **μόνο μια φορά** και εφαρμόζεται στις κορυφές
- Ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι αντιμεταθετικός $\rightarrow$ η σειρά πολλαπλασιασμού των πινάκων έχει σημασία
- Έχοντας επιλέξει αναπαράσταση των σημείων σαν στήλες $\rightarrow$ οι πίνακες μετασχηματισμού πολλαπλασιάζουν από αριστερά τα σημεία $\rightarrow$ ο σύνθετος πίνακας υπολογίζεται με αντίθετη σειρά από την σειρά εφαρμογής

Σύνθετοι Μετασχηματισμοί (2)

Rotation + Translation

Σύνθετοι Μετασχηματισμοί (3)

- Δηλαδή για την εφαρμογή των μετασχηματισμών $T_1, T_2, \dots, T_m$, υπολογίζουμε τον σύνθετο πίνακα $T_m \cdot \dots \cdot T_2 \cdot T_1$
- Πρόβλημα με τον μετασχηματισμό μεταφοράς: Η μεταφορά δεν μπορεί να περιγραφεί από ένα πίνακα γραμμικού μετασχηματισμού όπως:

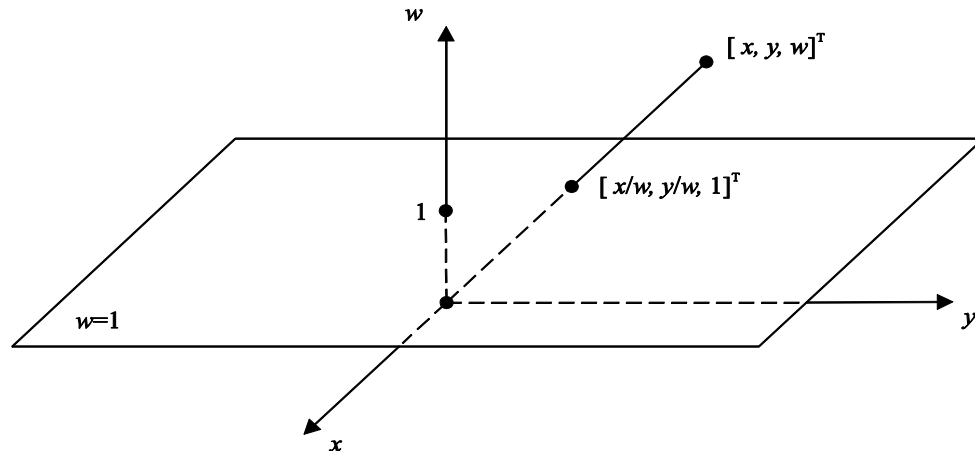
$$x' = ax + by$$

$$y' = cx + dy$$

- Η μεταφορά δεν μπορεί να είναι μέρος σύνθετου μετασχηματισμού
- Λύση στο πρόβλημα αυτό $\rightarrow$ *ομογενείς συντεταγμένες*

Ομογενείς Συντεταγμένες

- Οι ομογενείς συντεταγμένες χρησιμοποιούν μια επιπλέον διάσταση από το χώρο που αναπαρίσταται
- Χώρος 2Δ : $\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$, όπου w η νέα συντεταγμένη που αναπαριστά την επιπλέον διάσταση. Ισχύει $w \neq 0$
- Θέτοντας $w=1$ διατηρούμε την αρχική μας χωρική διάσταση επιλέγοντας το «επίπεδο» $w=1$
- Στις 2Δ χρησιμοποιείται το επίπεδο $w=1$ αντί του επιπέδου xy



Ομογενείς Συντεταγμένες (2)

- Σημεία των οποίων οι ομογενείς συντεταγμένες είναι πολλαπλάσιες, είναι ισοδύναμα:

π.χ., τα $[1,2,3]^T$ και $[2,4,6]^T$ παριστούν το ίδιο σημείο

- Το ακριβές σημείο που παριστάνουν δίνεται από την μοναδική *βασική αναπαράσταση*, για την οποία ισχύει $w = 1$ και δίνεται από την διαίρεση όλων των συντεταγμένων με το w :

$$[x/w, y/w, w/w]^T = [x/w, y/w, 1]^T$$

- Γενικά, η βασική αναπαράσταση χρησιμοποιείται για την παράσταση σημείων και εξασφαλίζουμε ότι οι μετασχηματισμοί την διατηρούν

Ομογενείς Συντεταγμένες (3)

- Πως λειτουργεί η μεταφορά με ομογενείς συντεταγμένες;
- Εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι ισχύει $w=1$ για την αναπαράσταση της μεταφοράς σημείου $\mathbf{p} = [x, y, w]^T$ κατά διάνυσμα $\vec{\mathbf{d}} = [d_x, d_y]$ σαν γραμμικό μετασχηματισμό:

$$x' = 1x + 0y + d_x w = x + d_x$$

$$y' = 0x + 1y + d_y w = y + d_y$$

$$w' = 0x + 0y + 1w = 1$$

- Ο μετασχηματισμός της w συντεταγμένης εξασφαλίζει ότι το προκύπτον $\mathbf{p}' = [x', y', w']^T$ σημείο έχει $w' = 1$

Ομογενείς Συντεταγμένες (4)

- Οι παραπάνω γραμμικές εκφράσεις συνοψίζονται σε μορφή πίνακα
→ η μεταφορά λειτουργεί ακριβώς όπως και οι άλλοι συσχετισμένοι μετασχηματισμοί
- Στους μη ομογενείς μετασχηματισμούς, η αρχή των αξόνων $[0, 0]^T$ είναι σταθερό σημείο:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ομογενείς Συντεταγμένες (5)

- Αρχή των αξόνων στις 2Δ είναι $[0, 0, 1]^T$ & δεν είναι σταθερό σημείο
- Το σημείο $[0, 0, 0]^T$ είναι εκτός του επιπέδου $w = 1 \rightarrow$ μη επιτρεπόμενο καθότι $w = 0$
- Από εδώ και στο εξής τα σημεία θα αναπαρίστανται με τις ομογενείς τους συντεταγμένες:

$$2\Delta \rightarrow [x, y, 1]^T$$
$$3\Delta \rightarrow [x, y, z, 1]^T$$

Ομογενείς Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί στις 2Δ

- Ομογενής πίνακας μεταφοράς στις 2Δ:

$$\mathbf{T}(\vec{\mathbf{d}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Χρήση μεταφοράς όπως και των άλλων βασικών συσχετισμένων μετασχηματισμών:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{T}(\vec{\mathbf{d}}) \cdot \mathbf{p}$$

- Η τελευταία γραμμή του ομογενούς πίνακα μετασχηματισμών είναι πάντα $[0, 0, 1] \rightarrow$ διατηρεί τιμή συντεταγμένης w (1)
- Ομογενής πίνακας αλλαγής κλίμακας στις 2Δ :

$$\mathbf{S}(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ομογενείς Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί στις 2Δ (2)

- Ομογενής πίνακας περιστροφής στις 2Δ:

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ομογενείς πίνακες στρέβλωσης στις 2Δ:

$$\text{Στρέβλωση στον άξονα } x \rightarrow \mathbf{SH}_x(a) = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Στρέβλωση στον άξονα } y \rightarrow \mathbf{SH}_y(b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αντίστροφοι Ομογενείς Μετασχηματισμοί στις 2Δ

- Συχνά είναι απαραίτητη η αντιστροφή ενός μετασχηματισμού
- Αντίστροφος ομογενής πίνακας μεταφοράς στις 2Δ:

$$\mathbf{T}^{-1}(\vec{\mathbf{d}}) = \mathbf{T}(-\vec{\mathbf{d}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -d_x \\ 0 & 1 & -d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Αντίστροφος ομογενής πίνακας αλλαγής κλίμακας στις 2Δ:

$$\mathbf{S}^{-1}(s_x, s_y) = \mathbf{S}\left(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αντίστροφοι Ομογενείς Μετασχηματισμοί στις 2Δ (2)

- Αντίστροφος ομογενής πίνακας περιστροφής στις 2Δ:

$$\mathbf{R}^{-1}(\theta) = \mathbf{R}(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Αντίστροφος ομογενής πίνακας στρέβλωσης στις 2Δ:

$$\text{στρέβλωση στον άξονα } x \rightarrow \mathbf{SH}_x^{-1}(a) = \mathbf{SH}_x(-a) = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{στρέβλωση στον άξονα } y \rightarrow \mathbf{SH}_y^{-1}(b) = \mathbf{SH}_y(-b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αντίστροφοι Ομογενείς Μετασχηματισμοί στις 2Δ (3)

- Η εφαρμογή ενός μετασχηματισμού πάνω σε ένα αντικείμενο είναι ισοδύναμη με την εφαρμογή του αντίστροφου μετασχηματισμού πάνω στο σύστημα συντεταγμένων (μετασχηματισμός αξόνων)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

- Η ισοτροπική αλλαγή κλίμακας σε ένα αντικείμενο κατά συντελεστή 2 είναι ισοδύναμη με την ισοτροπική αλλαγή κλίμακας στους άξονες του συστήματος συντεταγμένων κατά συντελεστή $\frac{1}{2}$ (συρρίκνωση)

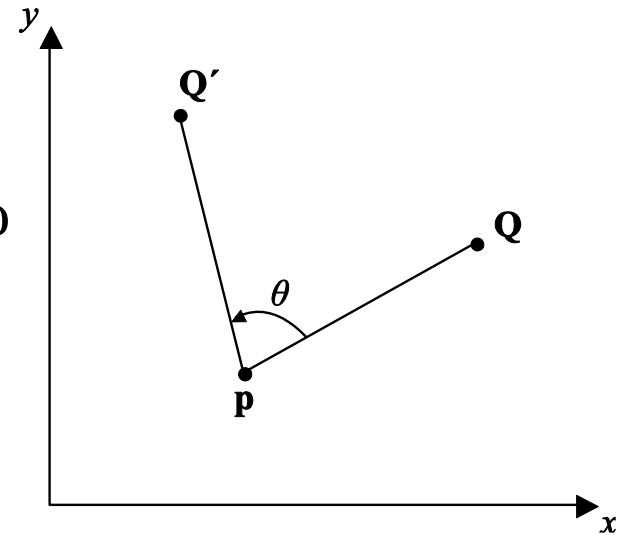
Ιδιότητες Ομογενών Πινάκων

Ιδιότητες πινάκων ομογενών συσχετισμένων μετασχηματισμών:

- $\rightarrow \mathbf{T}(\vec{\mathbf{d1}}) \cdot \mathbf{T}(\vec{\mathbf{d2}}) = \mathbf{T}(\vec{\mathbf{d2}}) \cdot \mathbf{T}(\vec{\mathbf{d1}}) = \mathbf{T}(\vec{\mathbf{d1}} + \vec{\mathbf{d2}})$
- $\rightarrow \mathbf{S}(s_{x1}, s_{y1}) \cdot \mathbf{S}(s_{x2}, s_{y2}) = \mathbf{S}(s_{x2}, s_{y2}) \cdot \mathbf{S}(s_{x1}, s_{y1}) = \mathbf{S}(s_{x1} \cdot s_{x2}, s_{y1} \cdot s_{y2})$
- $\rightarrow \mathbf{R}(\theta1) \cdot \mathbf{R}(\theta2) = \mathbf{R}(\theta2) \cdot \mathbf{R}(\theta1) = \mathbf{R}(\theta1 + \theta2)$
- $\rightarrow \mathbf{S}(s_x, s_y) \cdot \mathbf{R}(\theta) = \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{S}(s_x, s_y)$ μόνο για ισοτροπική αλλαγή κλίμακας ($s_x = s_y$)

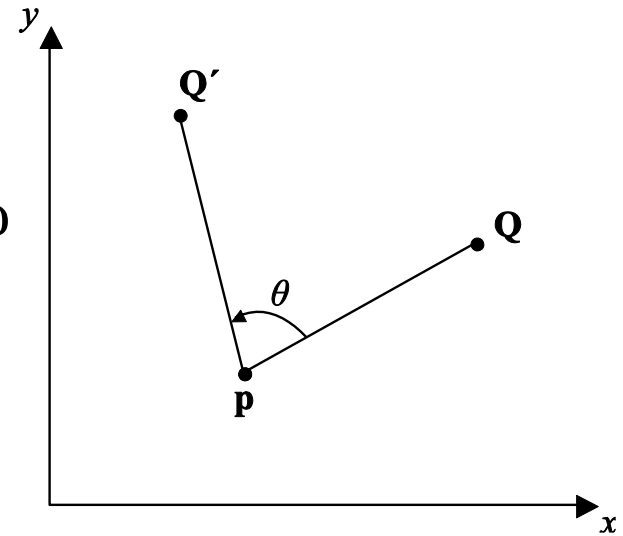
2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 1

Παράδειγμα 1: Περιστροφή γύρω από σημείο
Προσδιορισμός του πίνακα μετασχηματισμού $R(\theta, \mathbf{p})$ που απαιτείται για την περιστροφή γύρω από σημείο $\mathbf{p}$ κατά γωνία θ



2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 1

Παράδειγμα 1: Περιστροφή γύρω από σημείο
Προσδιορισμός του πίνακα μετασχηματισμού $R(\theta, \mathbf{p})$ που απαιτείται για την περιστροφή γύρω από σημείο $\mathbf{p}$ κατά γωνία θ



Λύση:

- Βήμα 1: Μεταφορά κατά $-\vec{\mathbf{p}}, \mathbf{T}(-\vec{\mathbf{p}})$
- Βήμα 2: Περιστροφή κατά $\theta, \mathbf{R}(\theta)$
- Βήμα 3: Μεταφορά κατά $\vec{\mathbf{p}}, \mathbf{T}(\vec{\mathbf{p}})$

$$\mathbf{R}(\theta, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & p_x - p_x \cos \theta + p_y \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & p_y - p_x \sin \theta - p_y \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 2

Παράδειγμα 2: Περιστροφή τριγώνου γύρω από σημείο

Περιστροφή τριγώνου Δabc κατά 45° γύρω από σημείο $\mathbf{p}=[-1,-1]^T$,
όπου $\mathbf{a}=[0,0]^T$, $\mathbf{b}=[1,1]^T$ και $\mathbf{c}=[5,2]^T$

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 2

Παράδειγμα 2: Περιστροφή τριγώνου γύρω από σημείο

Περιστροφή τριγώνου Δabc κατά 45° γύρω από σημείο $\mathbf{p}=[-1,-1]^T$,
όπου $\mathbf{a}=[0,0]^T$, $\mathbf{b}=[1,1]^T$ και $\mathbf{c}=[5,2]^T$

Λύση:

- Το τρίγωνο αναπαρίσταται με τον πίνακα: $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
- Εφαρμογή $\mathbf{R}(\theta, \mathbf{p})$ [Παρ. 1] στο τρίγωνο:

$$\mathbf{R}(45^\circ, [-1, -1]^T) \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2}-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & \frac{3}{2}\sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}-1 & 2\sqrt{2}-1 & \frac{9}{2}\sqrt{2}-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Το προκύπτον τρίγωνο είναι το $\Delta a'b'c'$ όπου $\mathbf{a}'=[-1, \sqrt{2}-1]^T$,
 $\mathbf{b}'=[-1, 2\sqrt{2}-1]^T$ και $\mathbf{c}'=[\frac{3}{2}\sqrt{2}-1, \frac{9}{2}\sqrt{2}-1]^T$

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 3

Παράδειγμα 3: Αλλαγή κλίμακας ως προς τυχαίο σημείο

Κατασκευή πίνακα μετασχηματισμού $S(s_x, s_y, \mathbf{p})$ για αλλαγή κλίμακας κατά s_x και s_y ως προς τυχαίο (σταθερό) σημείο $\mathbf{p}$

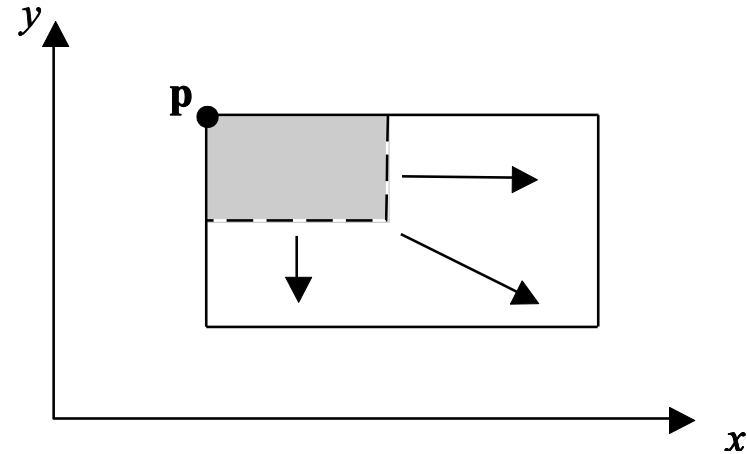
2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 3

Παράδειγμα 3: Αλλαγή κλίμακας ως προς τυχαίο σημείο

Κατασκευή πίνακα μετασχηματισμού $\mathbf{S}(s_x, s_y, \mathbf{p})$ για αλλαγή κλίμακας κατά s_x και s_y ως προς τυχαίο (σταθερό) σημείο $\mathbf{p}$

Λύση:

- Βήμα 1: Μεταφορά κατά $-\vec{\mathbf{p}}, \mathbf{T}(-\vec{\mathbf{p}})$
- Βήμα 2: Αλλαγή κλίμακας κατά s_x και s_y , $\mathbf{S}(s_x, s_y)$
- Βήμα 3: Μεταφορά κατά $\vec{\mathbf{p}}, \mathbf{T}(\vec{\mathbf{p}})$



$$\mathbf{S}(s_x, s_y, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & p_x - p_x s_x \\ 0 & s_y & p_y - p_y s_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 4

Παράδειγμα 4: Αλλαγή κλίμακας τριγώνου ως προς σημείο

Διπλασιασμός του μήκους των πλευρών τριγώνου Δabc κρατώντας σταθερή την κορυφή c . Οι συντεταγμένες των κορυφών είναι $\mathbf{a}=[0,0]^T$, $\mathbf{b}=[1,1]^T$, $\mathbf{c}=[5,2]^T$

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 4

Παράδειγμα 4: Αλλαγή κλίμακας τριγώνου ως προς σημείο

Διπλασιασμός του μήκους των πλευρών τριγώνου Δabc κρατώντας σταθερή την κορυφή c . Οι συντεταγμένες των κορυφών είναι $\mathbf{a}=[0,0]^T$, $\mathbf{b}=[1,1]^T$, $\mathbf{c}=[5,2]^T$

Λύση:

- Το τρίγωνο αναπαρίσταται από τον πίνακα $\mathbf{T}$ [Παρ. 2]
- Εφαρμογή πίνακα $\mathbf{S}(s_x, s_y, \mathbf{p})$ [Παρ. 3] στο τρίγωνο, θέτοντας τους παράγοντες αλλαγής κλίμακας $=2$ και $\mathbf{p}=\mathbf{c}$

$$\mathbf{S}(2, 2, [5, 2, 1]^T) \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Το νέο τρίγωνο είναι το $\Delta a'b'c'$ με $\mathbf{a}'=[-5,-2]^T$, $\mathbf{b}'=[-3,0]^T$, $\mathbf{c}'=[5,2]^T$

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 5

Παράδειγμα 5: Μετασχηματισμός άξονα

Έστω ότι το σύστημα συντεταγμένων μεταφέρεται κατά διάνυσμα $\vec{v} = [v_x, v_y]^T$. Κατασκευάστε τον πίνακα που περιγράφει το παραπάνω

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 5

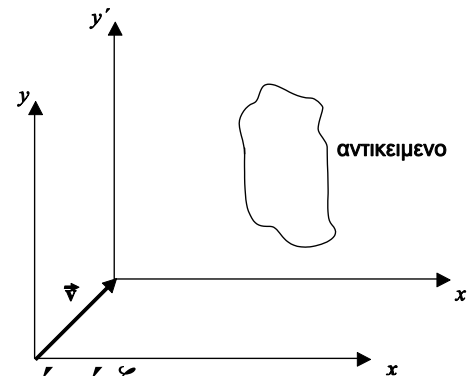
Παράδειγμα 5: Μετασχηματισμός άξονα

Έστω ότι το σύστημα συντεταγμένων μεταφέρεται κατά διάνυσμα $\vec{v} = [v_x, v_y]^T$. Κατασκευάστε τον πίνακα που περιγράφει το παραπάνω

Λύση:

- Ο ζητούμενος πίνακας μετασχηματισμού πρέπει να παράγει τις συντεταγμένες των αντικειμένων ως προς το νέο σύστημα συντεταγμένων. Αυτό επιτυγχάνεται με εφαρμογή της αντίστροφης μεταφοράς στα αντικείμενα:

$$\mathbf{T}(-\vec{v}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -v_x \\ 0 & 1 & -v_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- Όμοια, για οποιοδήποτε μετασχηματισμό άξονα:
 - Ζητούμενο $\rightarrow$ Εφαρμογή αντίστροφου μετασχηματισμού στα αντικείμενα

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 6

Παράδειγμα 6: Κατοπτρισμός σε τυχαίο άξονα

Κατασκευή πίνακα μετασχηματισμού για κατοπτρισμό σε τυχαίο άξονα που ορίζεται από σημείο $\mathbf{p}=[p_x, p_y]^T$ και κατεύθυνση $\vec{\mathbf{v}}=[v_x, v_y]^T$

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 6

Παράδειγμα 6: Κατοπτρισμός σε τυχαίο άξονα

Κατασκευή πίνακα μετασχηματισμού για κατοπτρισμό σε τυχαίο άξονα που ορίζεται από σημείο $\mathbf{p}=[p_x, p_y]^T$ και κατεύθυνση $\vec{\mathbf{v}}=[v_x, v_y]^T$

Λύση:

- Βήμα 1: Μεταφορά κατά $-\vec{\mathbf{p}}, \mathbf{T}(-\vec{\mathbf{p}})$
- Βήμα 2: Περιστροφή κατά $-\theta$ (φορά ρολογιού), $\mathbf{R}(-\theta)$,
 θ η γωνία που σχηματίζει ο άξονας x και το διάνυσμα $\vec{\mathbf{v}}$ και:

$$\sin \theta = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \qquad \cos \theta = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$$

(Τα 2 παραπάνω βήματα ταυτίζουν τον τυχαίο άξονα με τον x)

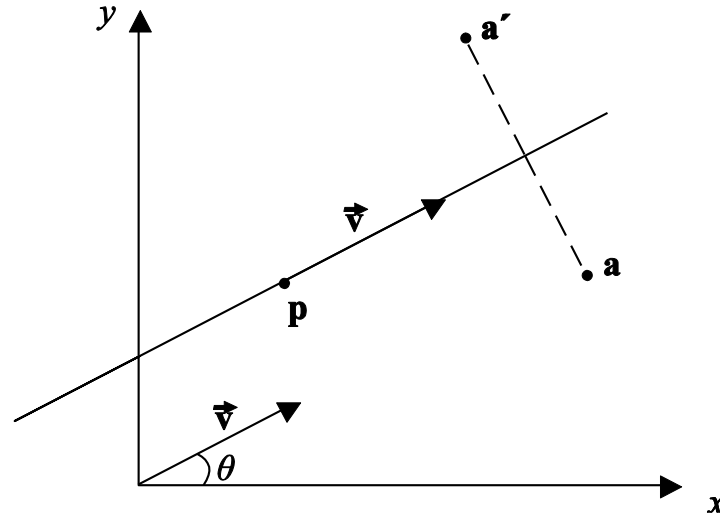
- Βήμα 3: Κατοπτρισμός στον άξονα x , $\mathbf{S}(1, -1)$
- Βήμα 4: Περιστροφή κατά θ , $\mathbf{R}(\theta)$

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 6 (2)

- Βήμα 5: Μεταφορά κατά $\vec{\mathbf{p}}, \mathbf{T}(\vec{\mathbf{p}})$

Συνεπώς έχουμε:

$$\mathbf{M}_{\text{SYM}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -p_x \\ 0 & 1 & -p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & p_x - p_x (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - 2 p_y \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta - \cos^2 \theta & p_y - p_y (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) - 2 p_x \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 7

Παράδειγμα 7: Κατοπτρισμός Πολυγώνου

Δοθέντος ενός πολυγώνου, κατασκευάστε τον κατοπτρισμό του ως προς α) την γραμμή $y=2$ και (β) τον άξονα που ορίζεται από το σημείο $\mathbf{p}=[0,2]^T$ και το διάνυσμα $\vec{\mathbf{v}}=[1,1]^T$. Το πολύγωνο δίνεται από τις κορυφές του $\mathbf{a}=[-1,0]^T$, $\mathbf{b}=[0,-2]^T$, $\mathbf{c}=[1,0]^T$ και $\mathbf{d}=[0,2]^T$

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 7

Παράδειγμα 7: Κατοπτρισμός Πολυγώνου

Δοθέντος ενός πολυγώνου, κατασκευάστε τον κατοπτρισμό του ως προς α) την γραμμή $y=2$ και (β) τον άξονα που ορίζεται από το σημείο $\mathbf{p}=[0,2]^T$ και το διάνυσμα $\vec{\mathbf{v}}=[1,1]^T$. Το πολύγωνο δίνεται από τις κορυφές του $\mathbf{a}=[-1,0]^T$, $\mathbf{b}=[0,-2]^T$, $\mathbf{c}=[1,0]^T$ και $\mathbf{d}=[0,2]^T$

Λύση:
Το πολύγωνο αναπαρίσταται από τον πίνακα: $\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- Στην περίπτωση (α) $\mathbf{p}=[0,2]^T$ και $\vec{\mathbf{v}}=[1,0]^T$ έτσι $\theta=0^\circ$, $\sin\theta=0$, $\cos\theta=1$ και έχουμε:

$$\mathbf{\Pi}' = \mathbf{M}_{\text{SYM}} \cdot \mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 7 (2)

- Στην περίπτωση (β) $\mathbf{p}=[0,2]^T$ και $\vec{\mathbf{v}}=[1,1]^T$, έτσι $\sin\theta = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

και έχουμε:

$$\Pi' = \mathbf{M}_{\text{SYM}} \cdot \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

όπου $\mathbf{M}_{\text{SYM}}$ είναι ο πίνακας του [Παρ. 6]

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 8

Παράδειγμα 8: Μετασχηματισμός Παράστασης

Τα περιεχόμενα ενός 2Δ παραθύρου πρέπει να μεταφερθούν σε ένα 2Δ ‘πεδίο παράστασης’. Το παράθυρο και το ‘πεδίο παράστασης’ είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα με πλευρές παράλληλες στους άξονες x , y . Προσδιορίστε τον πίνακα μετασχηματισμού παράστασης. Επίσης προσδιορίστε την παραμόρφωση των αντικειμένων με βάση τον μετασχηματισμό αυτό.

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 8

Παράδειγμα 8: Μετασχηματισμός Παράστασης

Τα περιεχόμενα ενός 2Δ παραθύρου πρέπει να μεταφερθούν σε ένα 2Δ ‘πεδίο παράστασης’. Το παράθυρο και το ‘πεδίο παράστασης’ είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα με πλευρές παράλληλες στους άξονες x , y . Προσδιορίστε τον πίνακα μετασχηματισμού παράστασης. Επίσης προσδιορίστε την παραμόρφωση των αντικειμένων με βάση τον Μετασχηματισμό αυτό.

Λύση:

Έστω ότι το παράθυρο και το πεδίο παράστασης ορίζονται από δυο κορυφές $[w_{xmin}, w_{ymin}]^T, [w_{xmax}, w_{ymax}]^T$ και $[v_{xmin}, v_{ymin}]^T, [v_{xmax}, v_{ymax}]^T$

- Βήμα 1: Μεταφορά του $[w_{xmin}, w_{ymin}]^T$ στην αρχή των αξόνων, χρησιμοποιώντας $T(-\vec{w}_{min})$ με $\vec{w}_{min} = [w_{xmin}, w_{ymin}]^T$

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 8 (2)

- Βήμα 2: Αλλαγή κλίμακας του παραθύρου στο μέγεθος του πεδίου παράστασης, με $S(s_x, s_y)$ όπου

$$s_x = \frac{V_{xmax} - V_{xmin}}{W_{xmax} - W_{xmin}} \quad s_y = \frac{V_{ymax} - V_{ymin}}{W_{ymax} - W_{ymin}}$$

- Βήμα 3: Μεταφορά του πεδίου παράστασης κατά την κορυφή $[v_{xmin}, v_{ymin}]^T$ με $T(\vec{v}_{min})$, όπου $\vec{v}_{min} = [v_{xmin}, v_{ymin}]^T$
Συνεπώς έχουμε:

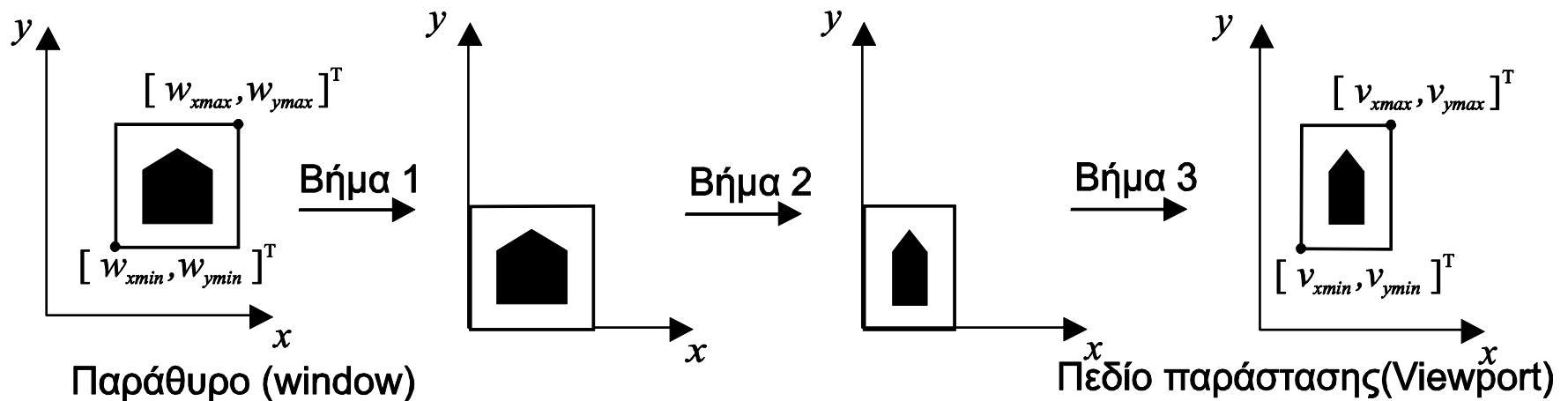
$$\mathbf{M}_{wv} = \mathbf{T}(\vec{v}_{min}) \cdot \mathbf{S}(s_x, s_y) \cdot \mathbf{T}(-\vec{w}_{min})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & v_{xmin} \\ 0 & 1 & v_{ymin} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{v_{xmax} - v_{xmin}}{w_{xmax} - w_{xmin}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_{ymax} - v_{ymin}}{w_{ymax} - w_{ymin}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -w_{xmin} \\ 0 & 1 & -w_{ymin} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 8 (3)

Τελικά:

$$\mathbf{M}_{wv} = \begin{bmatrix} \frac{v_{xmax} - v_{xmin}}{w_{xmax} - w_{xmin}} & 0 & v_{xmin} - w_{xmin} \frac{v_{xmax} - v_{xmin}}{w_{xmax} - w_{xmin}} \\ 0 & \frac{v_{ymax} - v_{ymin}}{w_{ymax} - w_{ymin}} & v_{ymin} - w_{ymin} \frac{v_{ymax} - v_{ymin}}{w_{ymax} - w_{ymin}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 8 (4)

- $\mathbf{M}_{wv}$ εκφράζει μη ισότροπη αλλαγή κλίμακας ($s_x \neq s_y$) $\rightarrow$ παραμόρφωση αντικειμένων. Ο κύκλος μετατρέπεται σε έλλειψη και το τετράγωνο σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
- Οι *λόγοι εικόνας* του παραθύρου και του πεδίου παράστασης ορίζονται σαν οι λόγοι των διαστάσεών τους x, y :

$$a_w = \frac{W_{xmax} - W_{xmin}}{W_{ymax} - W_{ymin}}, a_v = \frac{V_{xmax} - V_{xmin}}{V_{ymax} - V_{ymin}}$$

- Αν $a_w \neq a_v$ τότε τα αντικείμενα παραμορφώνονται.
- Λύση $\rightarrow$ χρήση του μεγαλύτερου δυνατού πεδίου παράστασης με τον ίδιο λόγο εικόνας με αυτόν του παραθύρου:

- Πχ: αλλαγή του συνόρου v_{xmax} ή v_{ymax} του πεδίου παράστασης ως εξής:

$$\begin{array}{llll} \text{Αν} & (a_v > a_w) & \text{τότε} & v_{xmax} = v_{xmin} + a_w * (v_{ymax} - v_{ymin}) \\ \text{Αλλιώς αν} & (a_v < a_w) & \text{τότε} & v_{ymax} = v_{ymin} + \frac{(v_{xmax} - v_{xmin})}{a_w} \end{array}$$

2Δ Μετασχηματισμοί: Παράδειγμα 9

Παράδειγμα 9: Περίπτωση Μετασχηματισμού Παράστασης

Προσδιορισμός του μετασχηματισμού παράστασης από το παράθυρο:

$[w_{xmin}, w_{ymin}]^T = [1, 1]^T, [w_{xmax}, w_{ymax}]^T = [3, 5]^T$ στο πεδίο παράστασης:

$[v_{xmin}, v_{ymin}]^T = [0, 0]^T, [v_{xmax}, v_{ymax}]^T = [1, 1]^T$

Αν υπάρχει παραμόρφωση, πως μπορεί να διορθωθεί;

Λύση:

- Άμεση εφαρμογή του $\mathbf{M}_{wv}$ [Παρ. 8]

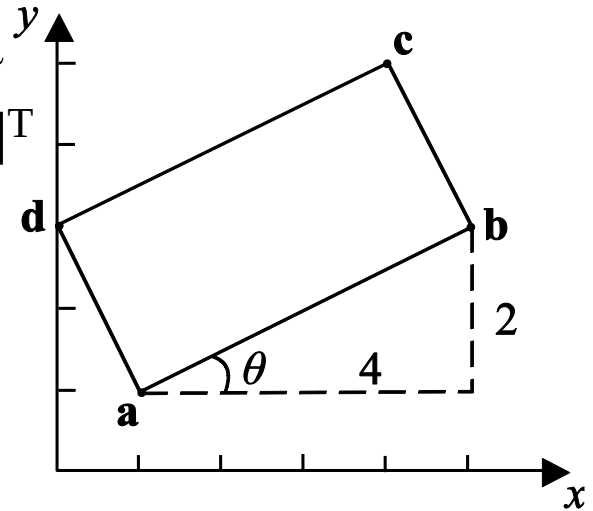
Για τα παραπάνω δεδομένα έχουμε: $\mathbf{M}_{wv} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Ισχύει $a_w = \frac{1}{2}$ και $a_v = \frac{1}{1} \rightarrow$ υπάρχει παραμόρφωση καθώς ($a_v > a_w$). Μπορεί να διορθωθεί μειώνοντας το μέγεθος του πεδίου παράστασης ως εξής:
$$v_{xmax} = v_{xmin} + a_w * (v_{ymax} - v_{ymin}) = \frac{1}{2}$$

Μετασχηματισμοί 2Δ: Παράδειγμα 10

Παράδειγμα 10: Μετασχηματισμός Παράστασης με Κλίση

Υποθέστε ότι το παράθυρο έχει κλίση και δίνεται από τις 4 κορυφές του $\mathbf{a}=[1,1]^T$, $\mathbf{b}=[5,3]^T$, $\mathbf{c}=[4,5]^T$ και $\mathbf{d}=[0,3]^T$. Υπολογίστε το μετασχηματισμό $\mathbf{M}_{\mathbf{wv}}^{\text{TILT}}$ που το απεικονίζει στο πεδίο παράστασης $[v_{x\min}, v_{y\min}]^T = [0,0]^T, [v_{x\max}, v_{y\max}]^T = [1,1]^T$



ΛΥΣΗ

- Βήμα1: Στροφή του παραθύρου κατά γωνία $-\theta$ με σταθερό το σημείο $\mathbf{a}$. Πίνακας μετασχηματισμού $\mathbf{R}(-\theta, \mathbf{a})$ [Παρ. 1] όπου

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

- Βήμα 2: Εφαρμογή του μετασχηματισμού παράστασης $\mathbf{M}_{\mathbf{wv}}$ [Παρ. 8]

Μετασχηματισμοί 2Δ: Παράδειγμα 10 (2)

Πριν το Βήμα 2 πρέπει να καθοριστούν οι μέγιστες x- και y- συντεταγμένες του περιστρεφόμενου παραθύρου, υπολογίζοντας:

$$\mathbf{c}' = \mathbf{R}(-\theta, a) \cdot \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 + 2\sqrt{5} \\ 1 + \sqrt{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Έτσι $[w_{xmin}, w_{ymin}]^T = \mathbf{a}, [w_{xmax}, w_{ymax}]^T = \mathbf{c}'$, και έχουμε:

$$\mathbf{M}_{\text{wv}}^{\text{TILT}} = \mathbf{M}_{\text{wv}} \cdot \mathbf{R}(-\theta, a) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 1 - \frac{3}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Συσχετισμένοι Μετασχηματισμοί 3Δ

- Ομογενείς συντεταγμένες 3Δ παρόμοιες με 2Δ
 - 1 επιπλέον συντεταγμένη $[x, y, z, w]^T$ όπου w αντιστοιχεί στην επιπλέον διάσταση
 - Σημεία των οποίων οι ομογενείς συντεταγμένες είναι πολλαπλάσια είναι ισοδύναμα π.χ. $[1, 2, 3, 2]^T$ και $[2, 4, 6, 4]^T$
 - Βασική παράσταση
 - Μοναδική
 - Έχει $w = 1$
 - Βρίσκεται με διαίρεση με w : $[x/w, y/w, z/w, w/w]^T = [x/w, y/w, z/w, 1]^T$, $w \neq 0$
- Παράδειγμα: $[\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{2}]^T = [\frac{2}{4}, \frac{4}{4}, \frac{6}{4}, \frac{4}{4}]^T = [\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 1]^T$
- Έχουμε 3Δ προβολή ενός 4Δ χώρου θέτοντας $w=1$
 - Σημεία: διανύσματα 4×1 . Μετασχηματισμοί: πίνακες 4×4

3Δ Ομογενής Μεταφορά

- Ορίζεται με 3Δ διάνυσμα $\vec{\mathbf{d}} = [d_x, d_y, d_z]^T$

- Μορφή πίνακα:

$$\mathbf{T}(\vec{\mathbf{d}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{T}(\vec{\mathbf{d}})$ μπορεί να συνδυαστεί με άλλους συσχετισμένους μετασχηματισμούς με πολλαπλασιασμό πινάκων.
- Αντίστροφος μετασχηματισμός μεταφοράς: $\mathbf{T}^{-1}(\vec{\mathbf{d}}) = \mathbf{T}(-\vec{\mathbf{d}})$

3Δ Ομογενής Αλλαγή Κλίμακας

- 3 παράγοντες αλλαγής κλίμακας: s_x, s_y, s_z
- Αν παράγοντας $< 1 \rightarrow$ σμίκρυνση αντικειμένου στην αντίστοιχη διάσταση
παράγοντας $> 1 \rightarrow$ μεγέθυνση αντικειμένου
- Με μορφή πίνακα:

$$\mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

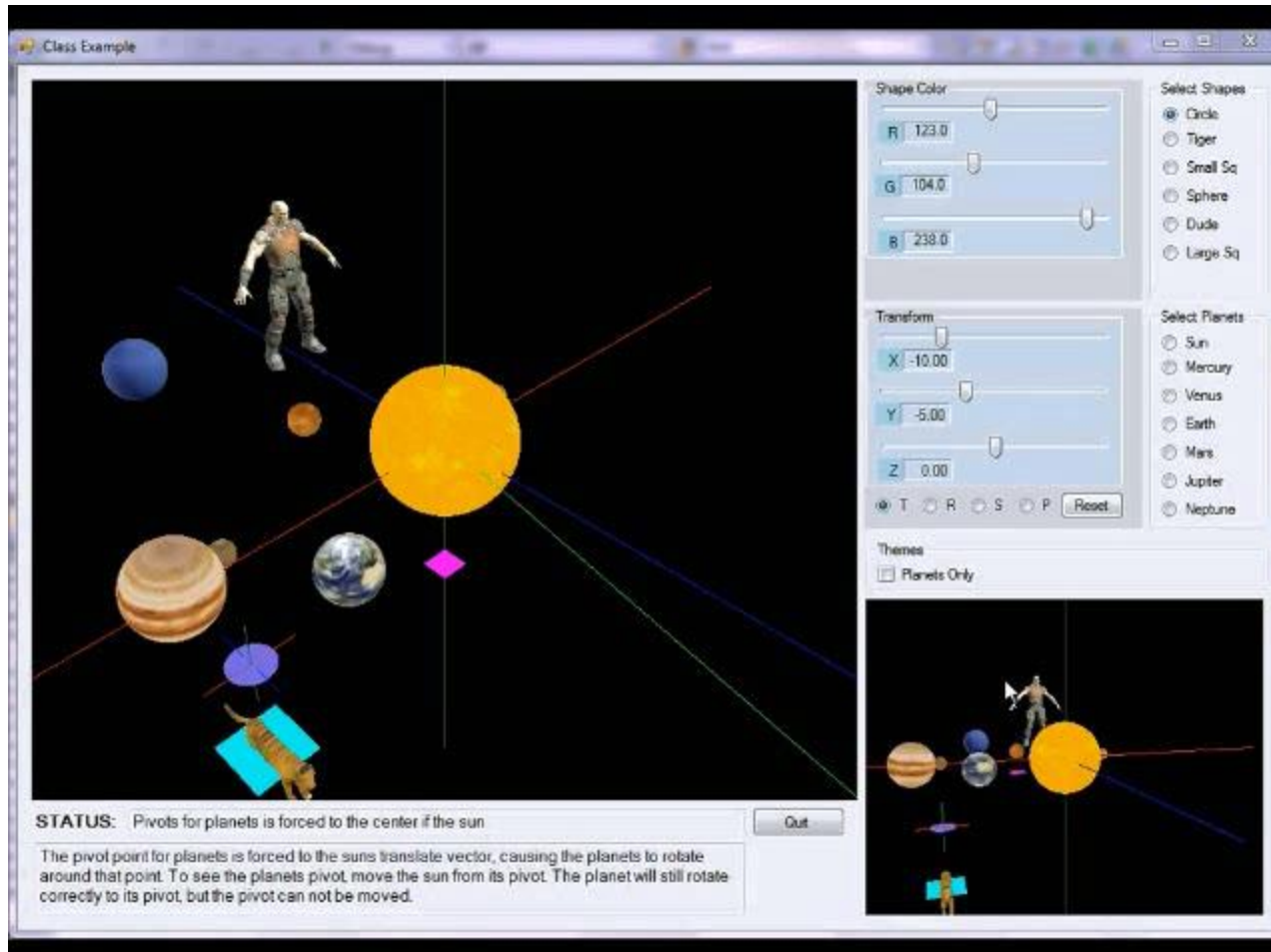
- Η αλλαγή κλίμακας έχει σαν παρενέργεια τη μετακίνηση του αντικειμένου, ανάλογα με τον παράγοντα αλλαγής κλίμακας

3Δ Ομογενής Αλλαγή Κλίμακας (2)

- Ισοτροπική Αλλαγή Κλίμακας:
 - Αν $s_x = s_y = s_z$
 - Διατηρεί το σχήμα των αντικειμένων (γωνίες)
- Κατοπτρισμός:
 - Σε ένα από τα κύρια επίπεδα (xy, xz, yz)
 - Χρήση του -1 σαν παράγοντα αλλαγής κλίμακας
 - Π.χ. κατοπτρισμός στο επίπεδο xy : $S(1, 1, -1)$
- Αντίστροφος μετασχηματισμός αλλαγής κλίμακας:

$$S^{-1}(s_x, s_y, s_z) = S\left(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}, \frac{1}{s_z}\right)$$

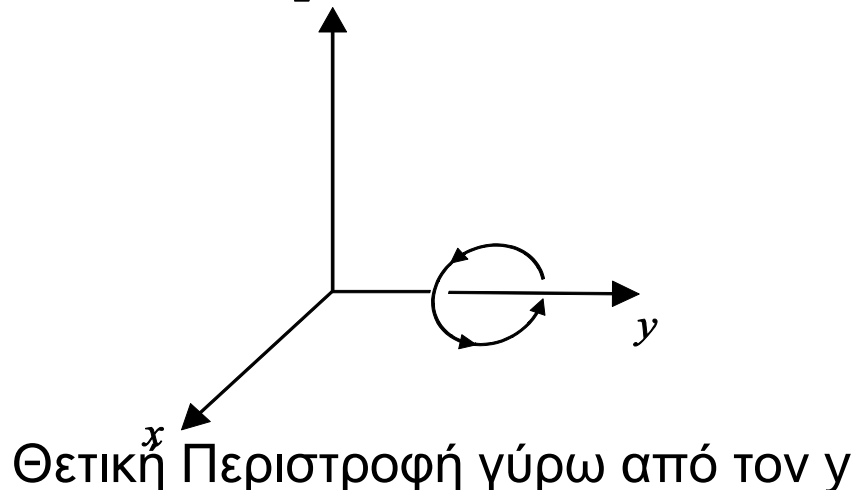
3Δ Περιστροφή



3Δ Ομογενής Περιστροφή

- Διαφορετική από την περιστροφή 2Δ: περιστροφή γύρω από **άξονα**
- Βασικοί μετασχηματισμοί περιστροφής: γύρω από τους 3 κύριους άξονες x, y, z
- Περιστροφή γύρω από τυχαίο άξονα: συνδυασμός βασικών περιστροφών
- Θετική περιστροφή γύρω από άξονα α :

σε δεξιόστροφα συστήματα είναι η περιστροφή με κατεύθυνση αντίστροφη της φοράς των δεικτών του ρολογιού κοιτώντας από τον θετικό άξονα προς το κέντρο



3Δ Ομογενής Περιστροφή(2)

- Δεν αλλάζει η απόσταση από τον άξονα περιστροφής
- Δεν επηρεάζεται η συντεταγμένη που αντιστοιχεί στον άξονα περιστροφής
- Πίνακες περιστροφής γύρω από τους κύριους άξονες:

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Αντίστροφη περιστροφή :
 $\mathbf{R}_x^{-1}(\theta) = \mathbf{R}_x(-\theta)$, $\mathbf{R}_y^{-1}(\theta) = \mathbf{R}_y(-\theta)$ και $\mathbf{R}_z^{-1}(\theta) = \mathbf{R}_z(-\theta)$
- Περιστροφές γίνονται και με τη βοήθεια των quaternions

3Δ Ομογενής Στρέβλωση

- Στρέβλωση αντικειμένου σε ένα από τα κύρια επίπεδα
- Αυξάνει 2 συντεταγμένες ανάλογα με την 3^η συντεταγμένη επί τον αντίστοιχο παράγοντα στρέβλωσης
- 3 είδη στρέβλωσης στις 3Δ: xy, xz, yz
- Στρέβλωση στο xy επίπεδο: αύξηση της x-συντεταγμένης κατά $a \times z$
αύξηση της y-συντεταγμένης κατά $b \times z$

Όμοια για xz & yz :

$$\mathbf{SH}_{xy}(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{SH}_{xz}(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{SH}_{yz}(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Αντίστροφη στρέβλωση: $\mathbf{SH}_{xy}^{-1}(a,b) = \mathbf{SH}_{xy}(-a,-b)$,
 $\mathbf{SH}_{xz}^{-1}(a,b) = \mathbf{SH}_{xz}(-a,-b)$,
 $\mathbf{SH}_{yz}^{-1}(a,b) = \mathbf{SH}_{yz}(-a,-b)$

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 11

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11: Σύνθετη Περιστροφή - Καμπή

Υπολογίστε τον πίνακα καμπής:

Περιστροφή κατά γωνία θ_x γύρω από x-άξονα $\rightarrow$

Περιστροφή κατά γωνία θ_y γύρω από y-άξονα

Παίζει ρόλο η σειρά που γίνονται οι περιστροφές;

ΛΥΣΗ

$$1. \mathbf{M}_{\text{BEND}} = \mathbf{R}_y(\theta_y) \cdot \mathbf{R}_x(\theta_x) = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x & 0 \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & \sin \theta_x \sin \theta_y & \cos \theta_x \sin \theta_y & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x & 0 \\ -\sin \theta_y & \sin \theta_x \cos \theta_y & \cos \theta_x \cos \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Υπολογισμός με την αντίστροφη σειρά:

$$\mathbf{M}'_{\text{BEND}} = \mathbf{R}_x(\theta_x) \cdot \mathbf{R}_y(\theta_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x & 0 \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y & 0 \\ \sin \theta_x \sin \theta_y & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \cos \theta_y & 0 \\ -\cos \theta_x \sin \theta_y & \sin \theta_x & \cos \theta_x \cos \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{M}_{\text{BEND}} \neq \mathbf{M}'_{\text{BEND}}$ οπότε η σειρά που εκτελούνται οι περιστροφές παίζει ρόλο

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 12

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12: Ευθυγράμμιση Διανύσματος με Άξονα

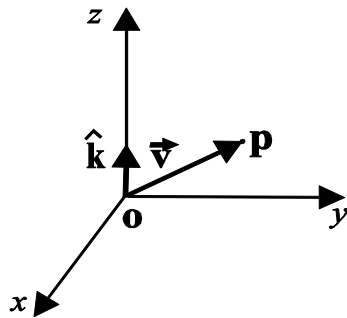
Υπολογίστε τον μετασχηματισμό $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}})$ που ευθυγραμμίζει το διάνυσμα $\vec{\mathbf{v}} = [a, b, c]^T$ με το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{k}}$ κατά μήκος του θετικού άξονα z

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 12

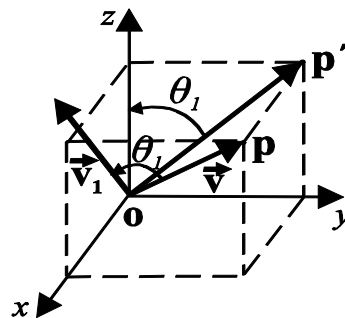
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12: Ευθυγράμμιση Διανύσματος με Άξονα

Υπολογίστε τον μετασχηματισμό $\mathbf{A}(\vec{v})$ που ευθυγραμμίζει το διάνυσμα $\vec{v} = [a, b, c]^T$ με το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{k}}$ κατά μήκος του θετικού άξονα z

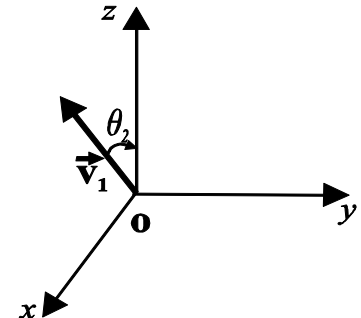
ΛΥΣΗ



Αρχικά



$\vec{v}$ Βήμα 1



Βήμα 2

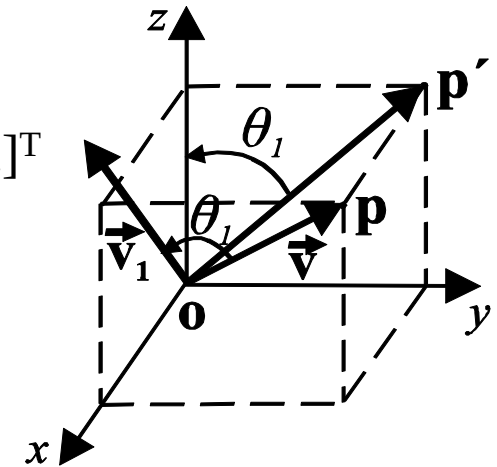
Χρησιμοποιούμε 2 περιστροφές:

- Βήμα 1: Στροφή γύρω από x -άξονα κατά θ_1 έτσι ώστε το $\vec{v}$ να απεικονίζεται στο $\vec{v}_1$ πάνω στο επίπεδο xz , $\mathbf{R}_x(\theta_1)$
- Βήμα 2: Στροφή του $\vec{v}_1$ γύρω από τον y -άξονα κατά θ_2 έτσι ώστε να ταυτισθεί με το $\hat{\mathbf{k}}$, $\mathbf{R}_y(\theta_2)$

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 12 (2)

- Πίνακας ευθυγράμμισης $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}}) : \mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}}) = \mathbf{R}_y(\theta_2) \cdot \mathbf{R}_x(\theta_1)$
- Υπολογισμός γωνίας θ_1 :
 - θ_1 ισούται με τη γωνία που σχηματίζει η προβολή του $\vec{\mathbf{v}}$ πάνω στο επίπεδο yz με τον άξονα z
 - Η κορυφή $\mathbf{p}$ του $\vec{\mathbf{v}}$ είναι $\mathbf{p}=[a, b, c]^T$
 - Η κορυφή της προβολής πάνω στο yz είναι $\mathbf{p}'=[0, b, c]^T$
 - Έστω ότι τα b, c δεν είναι ταυτόχρονα 0 :

$$\sin \theta_1 = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} \quad , \quad \cos \theta_1 = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$



Οπότε,

$$\mathbf{R}_x(\theta_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ 0 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} & -\frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} & 0 \\ 0 & \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} & \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

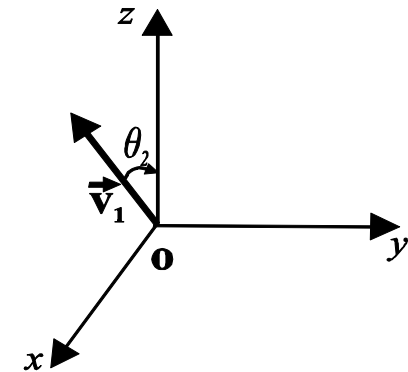
Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 12 (3)

- Επιδρώντας με τον $R_x(\theta_1)$ στο $\vec{v}$, προκύπτει η προβολή του $\vec{v}_1$ στο xz

$$\vec{v}_1 = R_x(\theta_1) \cdot \vec{v} = R_x(\theta_1) \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ \sqrt{b^2 + c^2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Σημείωση: $|\vec{v}_1| = |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- Υπολογισμός θ_2 :

$$\sin \theta_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos \theta_2 = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



- Οπότε

$$R_y(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} & 0 & \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 12 (4)

- Υπολογισμός του $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}})$:

$$\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}}) = \mathbf{R}_y(\theta_2) \cdot \mathbf{R}_x(\theta_1) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{|\vec{\mathbf{v}}|} & -\frac{ab}{\lambda |\vec{\mathbf{v}}|} & -\frac{ac}{\lambda |\vec{\mathbf{v}}|} & 0 \\ 0 & \frac{c}{\lambda} & -\frac{b}{\lambda} & 0 \\ \frac{a}{|\vec{\mathbf{v}}|} & \frac{b}{|\vec{\mathbf{v}}|} & \frac{c}{|\vec{\mathbf{v}}|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{οπου } |\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \text{ και } \lambda = \sqrt{b^2 + c^2}$$

- Υπολογισμού του $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}})^{-1}$ (χρήσιμο για επόμενο παράδειγμα):

$$\mathbf{A}^{-1}(\vec{\mathbf{v}}) = (\mathbf{R}_y(\theta_2) \cdot \mathbf{R}_x(\theta_1))^{-1} = \mathbf{R}_x(\theta_1)^{-1} \cdot \mathbf{R}_y(\theta_2)^{-1} = \mathbf{R}_x(-\theta_1) \cdot \mathbf{R}_y(-\theta_2) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{|\vec{\mathbf{v}}|} & 0 & \frac{a}{|\vec{\mathbf{v}}|} & 0 \\ -\frac{ab}{\lambda |\vec{\mathbf{v}}|} & \frac{c}{\lambda} & \frac{b}{|\vec{\mathbf{v}}|} & 0 \\ -\frac{ac}{\lambda |\vec{\mathbf{v}}|} & -\frac{b}{\lambda} & \frac{c}{|\vec{\mathbf{v}}|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

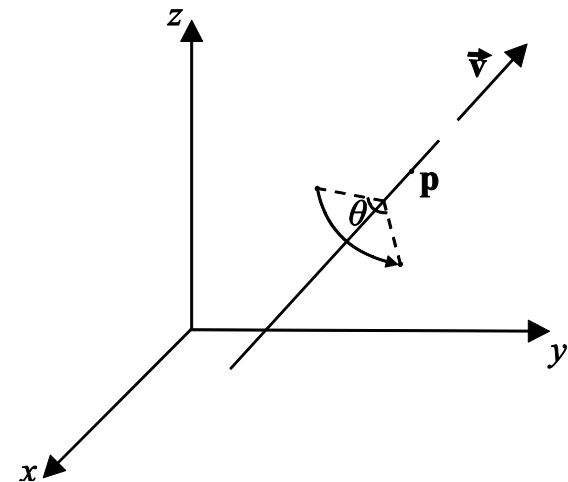
- Αν $b=c=0$ τότε το $\vec{\mathbf{v}}$ ταυτίζεται με τον άξονα $x \rightarrow$
 στροφή γύρω από y κατά 90° ή -90° $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}}) = \mathbf{R}_y(-\theta_2) =$
 σύμφωνα με το πρόσημο του a

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{a}{|a|} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{|a|} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 13

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13: Στροφή γύρω από τυχαίο άξονα με 2 Μεταφορές & 5 Στροφές

Βρείτε το μετασχηματισμό που εκτελεί περιστροφή κατά γωνία θ ως προς τυχαίο άξονα που ορίζεται από διάνυσμα $\vec{v}$ και σημείο $\mathbf{p}$.



Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 13

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13: Στροφή γύρω από τυχαίο άξονα με 2 Μεταφορές & 5 Στροφές

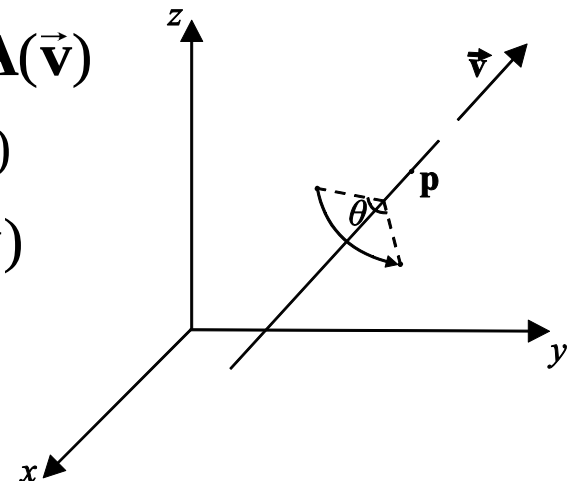
Βρείτε το μετασχηματισμό που εκτελεί περιστροφή κατά γωνία θ ως προς τυχαίο άξονα που ορίζεται από διάνυσμα $\vec{v}$ και σημείο $\mathbf{p}$.

ΛΥΣΗ

Ο μετασχηματισμός $\mathbf{A}(\vec{v})$ [Π.χ. 12] :

- Ευθυγραμμίζει ένα τυχαίο διάνυσμα με τον άξονα z
- Τον χρησιμοποιούμε για να μετασχηματίσουμε το π.χ. σε στροφή γύρω από το z
- Βήμα 1: Μεταφορά του $\mathbf{p}$ στην αρχή των αξόνων, $\mathbf{T}(-\vec{p})$
- Βήμα 2: Ευθυγράμμιση του $\vec{v}$ με τον άξονα z , $\mathbf{A}(\vec{v})$
- Βήμα 3: Στροφή γύρω από z κατά γωνία θ , $\mathbf{R}_z(\theta)$
- Βήμα 4: Αντιστροφή της ευθυγράμμισης, $\mathbf{A}^{-1}(\vec{v})$
- Βήμα 5: Αντιστροφή της μεταφοράς, $\mathbf{T}(\vec{p})$

$$\mathbf{M}_{\text{ROT-AXIS}} = \mathbf{T}(\vec{p}) \cdot \mathbf{A}^{-1}(\vec{v}) \cdot \mathbf{R}_z(\theta) \cdot \mathbf{A}(\vec{v}) \cdot \mathbf{T}(-\vec{p})$$



Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 14

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14:Μετασχηματισμός Συντεταγμένων με 1 μεταφορά & 3 στροφές

Βρείτε το μετασχηματισμό $\mathbf{M}_{\text{ALIGN}}$ που ευθυγραμμίζει ένα 3Δ σύστημα συν/νων με διανύσματα βάσης $(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$ με το σύστημα συν/νων xyz με διανύσματα βάσης $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$.

Η αρχή των αξόνων του 1^{ου} συστήματος σε σχέση με το xyz είναι $\mathbf{O}_{lmn}$.

ΛΥΣΗ

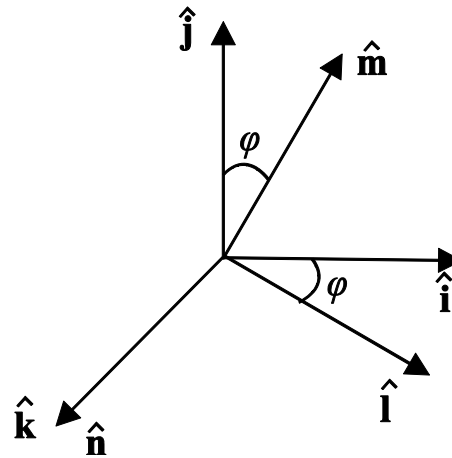
Μετασχηματισμός άξονα:

- ευθυγράμμιση της βάσης $(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$ με τη βάση $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}) \implies$
- αλλαγή του συστήματος αξόνων του αντικειμένου από $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ σε $(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$

Η λύση είναι επέκταση του $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}})$ [Παρ. 12]

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 14 (2)

- Βήμα 1: Μεταφορά κατά $-\mathbf{O}_{lmn}$ για ταύτιση των 2 κέντρων, $\mathbf{T}(-\vec{\mathbf{O}}_{lmn})$
- Βήμα 2: Ευθυγράμμιση του διανύσματος βάσης $\hat{\mathbf{n}}$ με το διάνυσμα βάσης $\hat{\mathbf{k}}$, χρησιμοποιώντας τον $\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}})$ του [Παρ. 12], $\mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}})$



- Βήμα 3: Περιστροφή κατά φ γύρω από το άξονα z για να ευθυγραμμιστούν οι 2 άλλοι άξονες, $\mathbf{R}_z(\varphi)$

$$\mathbf{M}_{\text{ALIGN}} = \mathbf{R}_z(\varphi) \cdot \mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{T}(-\vec{\mathbf{O}}_{lmn})$$

Μετασχηματισμός του $\hat{\mathbf{i}}$ ή του $\hat{\mathbf{m}}$ με $\mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}})$ για υπολογισμό της γωνίας φ .
Π.χ. $\hat{\mathbf{m}}' = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{m}}$: τα $\sin\varphi$ και $\cos\varphi$ θα είναι τα x και y του $\hat{\mathbf{m}}'$

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 14(3)

ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Τα διανύσματα της ορθοκανονικής βάσης των 2 συστημάτων αξόνων :

$$\hat{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$
$$\hat{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{29}} \\ \frac{4}{\sqrt{29}} \\ \frac{2}{\sqrt{29}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} -\frac{32}{\sqrt{1653}} \\ \frac{25}{\sqrt{1653}} \\ -\frac{2}{\sqrt{1653}} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{57}} \\ -\frac{2}{\sqrt{57}} \\ \frac{7}{\sqrt{57}} \end{bmatrix}$$

Η αρχή των αξόνων για τα 2 συστήματα ταυτίζεται ($\mathbf{O}_{lmn} = [0.0.0]^T$).

Βρείτε το μετασχηματισμό $\mathbf{M}_{\text{ALIGN}}$.

- Τα διανύσματα βάσης του 2^{ου} συστήματος εκφράζονται ως προς το 1^ο
- Από τις συντεταγμένες του $\hat{\mathbf{n}}$ [Παρ. 12] έχουμε:

$$a = -\frac{2}{\sqrt{57}}, b = -\frac{2}{\sqrt{57}}, c = \frac{7}{\sqrt{57}} \text{ και } \lambda = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{\left(-\frac{2}{\sqrt{57}}\right)^2 + \left(\frac{7}{\sqrt{57}}\right)^2}$$

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 14 (4)

- Υπολογισμός $\mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}})$: $\mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}}) = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{53}{57}} & -\frac{4}{\sqrt{3021}} & \frac{14}{\sqrt{3021}} & 0 \\ 0 & \frac{7}{\sqrt{53}} & \frac{2}{\sqrt{53}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{57}} & -\frac{2}{\sqrt{57}} & \frac{7}{\sqrt{57}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Υπολογισμός $\hat{\mathbf{m}}'$:

$$\hat{\mathbf{m}}' = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{m}} = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}}) \cdot \begin{bmatrix} -\frac{32}{\sqrt{1653}} \\ \frac{25}{\sqrt{1653}} \\ \frac{2}{\sqrt{1653}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{32}{\sqrt{1537}} \\ 3\sqrt{\frac{57}{1537}} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Οπότε $\sin \varphi = -\frac{32}{\sqrt{1537}}$ και $\cos \varphi = 3\sqrt{\frac{57}{1537}}$ (μοναδιαία υποτείνουσα)

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 14 (5)

- Υπολογισμός $\mathbf{R}_z(\varphi)$:

$$\mathbf{R}_z(\varphi) = \begin{bmatrix} 3\sqrt{\frac{57}{1537}} & \frac{32}{\sqrt{1537}} & 0 & 0 \\ -\frac{32}{\sqrt{1537}} & 3\sqrt{\frac{57}{1537}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- Υπολογισμός $\mathbf{T}(-\vec{\mathbf{O}}_{\text{lmn}})$: οι αρχές των αξόνων των 2 συστημάτων συντεταγμένων ταυτίζονται $\mathbf{T}(-\vec{\mathbf{O}}_{\text{lmn}}) = \mathbf{ID}$
- Άρα, $\mathbf{M}_{\text{ALIGN}} = \mathbf{R}_z(\varphi) \cdot \mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{T}(-\vec{\mathbf{O}}_{\text{lmn}})$

$$\mathbf{M}_{\text{ALIGN}} = \mathbf{R}_z(\varphi) \cdot \mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{ID} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{\frac{57}{1537}} & \frac{32}{\sqrt{1537}} & 0 & 0 \\ -\frac{32}{\sqrt{1537}} & 3\sqrt{\frac{57}{1537}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{53}{57}} & -\frac{4}{\sqrt{3021}} & \frac{14}{\sqrt{3021}} & 0 \\ 0 & \frac{7}{\sqrt{53}} & \frac{2}{\sqrt{53}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{57}} & -\frac{2}{\sqrt{57}} & \frac{7}{\sqrt{57}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{29}} & \frac{4}{\sqrt{29}} & \frac{2}{\sqrt{29}} & 0 \\ -\frac{32}{\sqrt{1653}} & \frac{25}{\sqrt{1653}} & -\frac{2}{\sqrt{1653}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{57}} & -\frac{2}{\sqrt{57}} & \frac{7}{\sqrt{57}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμοί 3Δ:(Παράδειγμα 15)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15: Αλλαγή Βάσης

Βρείτε το μετασχηματισμό $\mathbf{M}_{\text{BASIS}}$ που χρειάζεται για την αλλαγή της ορθοκανονικής βάσης ενός συστήματος συντεταγμένων $B1=(\hat{\mathbf{i}}_1, \hat{\mathbf{j}}_1, \hat{\mathbf{k}}_1)$ στην $B2=(\hat{\mathbf{i}}_2, \hat{\mathbf{j}}_2, \hat{\mathbf{k}}_2)$ και αντίστροφα.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι οι συντεταγμένες του ίδιου διανύσματος στις 2 βάσεις είναι $\vec{\mathbf{v}}_{B1}$ και $\vec{\mathbf{v}}_{B2}$

Αν οι συντεταγμένες των διανυσμάτων βάσης $\hat{\mathbf{i}}_2, \hat{\mathbf{j}}_2, \hat{\mathbf{k}}_2$ στην $B1$ είναι:

$$\hat{\mathbf{i}}_{2,B1} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{j}}_{2,B1} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{k}}_{2,B1} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

Τότε αποδεικνύεται ότι:

$$\vec{\mathbf{v}}_{B1} = \begin{bmatrix} a & d & p \\ b & e & q \\ c & f & r \end{bmatrix} \cdot \vec{\mathbf{v}}_{B2}$$

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 15 (2)

Έτσι ,

$$\mathbf{M}_{\text{BASIS}}^{-1} = \begin{bmatrix} a & d & p \\ b & e & q \\ c & f & r \end{bmatrix}$$

$B2$ είναι ορθοκανονική βάση $\Rightarrow \mathbf{M}_{\text{BASIS}}^{-1}$ είναι ορθοκανονικός πίνακας $\Rightarrow$

$$\mathbf{M}_{\text{BASIS}} = (\mathbf{M}_{\text{BASIS}}^{-1})^T = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{bmatrix}$$

Σε ομογενή μορφή:

$$\mathbf{M}_{\text{BASIS}} = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ p & q & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 16

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 16: Μετασχηματισμός συντεταγμένων με την αλλαγή βάσης

Χρησιμοποιήστε την αλλαγή βάσης του παρ. 15 για να ευθυγραμμίσετε σύστημα συντεταγμένων με διανύσματα βάσης $(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$ με το σύστημα συντεταγμένων xyz με διανύσματα βάσης $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$

Η αρχή των αξόνων του 1^{ου} συστήματος σε σχέση με το xyz είναι $\mathbf{O}_{lmn}$.

ΛΥΣΗ

Είναι μετασχηματισμός άξονα:

- Αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων από $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ σε $(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$
- Η αλλαγή βάσης αντικαθιστά τις 3 περιστροφές του παρ. 14
- Βήμα 1: Μεταφορά κατά $-\mathbf{O}_{lmn}$ για να ταυτιστούν τα 2 κέντρα: $T(-\vec{\mathbf{O}}_{lmn})$
- Βήμα 2: Χρήση του $\mathbf{M}_{BASIS}$ για αλλαγή της βάσης από $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ σε $(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 16 (2)

$$\mathbf{M}_{\text{ALIGN2}} = \mathbf{M}_{\text{BASIS}} \cdot \mathbf{T}(-\vec{\mathbf{O}}_{\text{lmn}}) = \begin{bmatrix} a & b & c & -(a o_x + b o_y + c o_z) \\ d & e & f & -(d o_x + e o_y + f o_z) \\ p & q & r & -(p o_x + q o_y + r o_z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Όπου τα διανύσματα βάσης $(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$ εκφρασμένα στη βάση $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ είναι:

$$\hat{\mathbf{l}} = [a, b, c]^T, \hat{\mathbf{m}} = [d, e, f]^T, \hat{\mathbf{n}} = [p, q, r]^T \text{ και } \mathbf{O}_{\text{lmn}} = [o_x, o_y, o_z]$$

ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ [Παρ. 14]:

Όχι μεταφορά αφού ταυτίζονται τα 2 κέντρα.

$$\mathbf{M}_{\text{BASIS}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{29}} & \frac{4}{\sqrt{29}} & \frac{2}{\sqrt{29}} \\ -\frac{32}{\sqrt{1653}} & \frac{25}{\sqrt{1653}} & -\frac{2}{\sqrt{1653}} \\ -\frac{2}{\sqrt{57}} & -\frac{2}{\sqrt{57}} & \frac{7}{\sqrt{57}} \end{bmatrix}$$

σε
ομογενή
μορφή

$$\mathbf{M}_{\text{BASIS}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{29}} & \frac{4}{\sqrt{29}} & \frac{2}{\sqrt{29}} & 0 \\ -\frac{32}{\sqrt{1653}} & \frac{25}{\sqrt{1653}} & -\frac{2}{\sqrt{1653}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{57}} & -\frac{2}{\sqrt{57}} & \frac{7}{\sqrt{57}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 17

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 17: Στροφή γύρω από τυχαίο άξονα με Αλλαγή Βάσης
Χρησιμοποιήστε την αλλαγή βάσης του παρ.15 για να βρείτε έναν εναλλακτικό μετασχηματισμό για περιστροφή κατά γωνία θ γύρω από τυχαίο άξονα που ορίζεται με διάνυσμα $\vec{v}$ και σημείο $\mathbf{p}$.

ΛΥΣΗ

- Έστω $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ και $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$
- Το επίπεδο που είναι κάθετο στο $\vec{v}$ μέσω του $\mathbf{p}$: $a(x-x_p)+b(y-y_p)+c(z-z_p)=0$
- Έστω $\mathbf{q}$ ένα σημείου του επιπέδου αυτού: $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$ και $\vec{m} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$ και $\vec{l} = \vec{m} \times \vec{v}$
- Κανονικοποίηση των $\vec{l}, \vec{m}, \vec{v}$ για εύρεση βάσης $(\hat{l}, \hat{m}, \hat{v})$ με έναν άξονα τον $\vec{v}$ και τους άλλους 2 άξονες πάνω στο δοθέν επίπεδο
- Χρήση του $\mathbf{M}_{\text{BASIS}}$ για ευθυγράμμιση με το xyz-σύστημα
- Εκτέλεση της περιστροφής κατά θ γύρω από τον z

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 17 (2)

- Βήμα 1: Μεταφορά του $\mathbf{p}$ στην αρχή των αξόνων, $\mathbf{T}(-\vec{\mathbf{p}})$
- Βήμα 2: Ευθυγράμμιση της βάσης $(\hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$ με τη βάση $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$, $\mathbf{M}_{\text{BASIS}}$
- Βήμα 3: Περιστροφή ως προς z κατά γωνία θ , $\mathbf{R}_z(\theta)$
- Βήμα 4: Αντιστροφή της ευθυγράμμισης, $\mathbf{M}_{\text{BASIS}}^{-1}$
- Βήμα 5: Αντιστροφή της μεταφοράς, $\mathbf{T}(\vec{\mathbf{p}})$

$$\mathbf{M}_{\text{ROT-AXIS2}} = \mathbf{T}(\vec{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{M}_{\text{BASIS}}^{-1} \cdot \mathbf{R}_z(\theta) \cdot \mathbf{M}_{\text{BASIS}} \cdot \mathbf{T}(-\vec{\mathbf{p}})$$

Ο αλγεβρικός υπολογισμός του $\mathbf{M}_{\text{ROT-AXIS2}}$ είναι πιο απλός από τον $\mathbf{M}_{\text{ROT-AXIS}}$

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 18

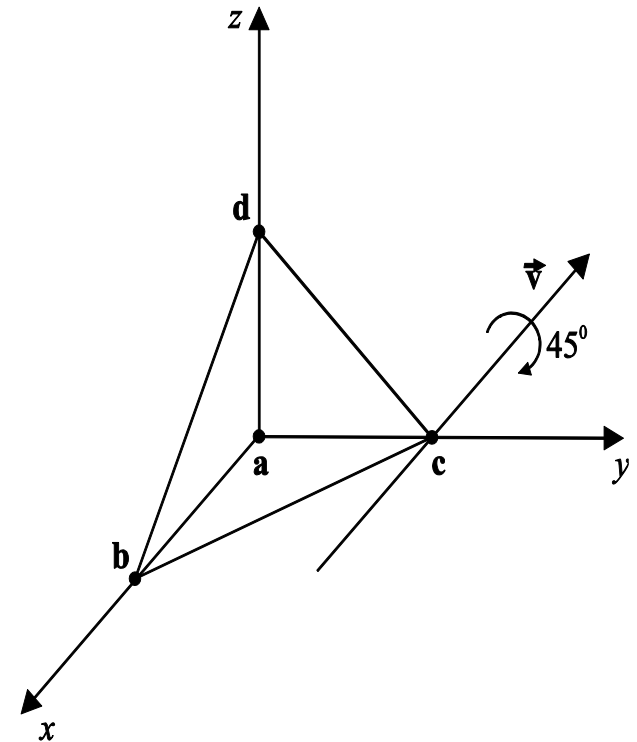
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 18: Περιστροφή Πυραμίδας

Περιστρέψτε την πυραμίδα που ορίζεται από τις κορυφές $\mathbf{a}=[0,0,0]^T$, $\mathbf{b}=[1,0,0]^T$, $\mathbf{c}=[0,1,0]^T$ και $\mathbf{d}=[0,0,1]^T$ κατά γωνία 45° γύρω από τον άξονα που ορίζεται από το σημείο $\mathbf{c}$ και το διάνυσμα $\vec{\mathbf{v}}=[0,1,1]^T$

ΛΥΣΗ

Η πυραμίδα αναπαρίσταται με τον πίνακα $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 18 (2)

- Περιστροφή της πυραμίδας με χρήση του πίνακα $\mathbf{M}_{\text{ROT-AXIS}}$

$$\mathbf{M}_{\text{ROT-AXIS}} = \mathbf{T}(\vec{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{A}^{-1}(\vec{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{R}_z(\theta) \cdot \mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{T}(-\vec{\mathbf{p}})$$

- Οι υποπίνακες:

$$\mathbf{T}(-\vec{\mathbf{c}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_z(45^\circ) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1}(\vec{\mathbf{v}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}(\vec{\mathbf{c}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Μετασχηματισμοί 3Δ: Παράδειγμα 18 (3)

- Συνδυασμός των υποπινάκων:

$$\mathbf{M}_{\text{ROT-AXIS}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Υπολογισμός της νέας πυραμίδας:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{M}_{\text{ROT-AXIS}} \cdot \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1+\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{4-\sqrt{2}}{4} & 1 & \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}-4}{4} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Οι κορυφές της νέας πυραμίδας είναι:

$$\mathbf{a}' = \left[\frac{1}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}-2}{4} \right]^T, \mathbf{b}' = \left[\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{4-\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}-4}{4} \right]^T, \mathbf{c}' = [0, 1, 0]^T \text{ και } \mathbf{d}' = \left[1, \frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]^T$$