

Statistical Inference

ANOVA - Nonparametric Statistics

Sonia Malefaki

Department of Mechanical Engineering & Aeronautics
University of Patras, Greece.

☎: 2610 997673, ✉: smalefaki@upatras.gr

March 27, 2021

Outline

① Analysis of Variance - ANOVA

One-way ANOVA

② Chi-Square tests

Goodness-of-fit test

Test of independence

Test of Homogeneity

Test for several proportions

③ Nonparametric Tests

Sign Test

Wilcoxon signed-rank test

Kruskal-Wallis Test

Run Test

Analysis of Variance

Introduction

Goal: To test the hypothesis

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

where k is the number of independent populations

Introduction

Goal: To test the hypothesis

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

where k is the number of independent populations

We can do all the possible tests in pairs.

Introduction

Goal: To test the hypothesis

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

where k is the number of independent populations

We can do all the possible tests in pairs.

In this case, **the probability of Type I Error increases**, i.e. the possibility to obtain statistically significant differences when in fact there are not.

Introduction

Goal: To test the hypothesis

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

where k is the number of independent populations

We can do all the possible tests in pairs.

In this case, **the probability of Type I Error increases**, i.e. the possibility to obtain statistically significant differences when in fact there are not.

For example if $k = 10$, there are 45 possible pairs for testing. By using $\alpha = 5\%$ in each of these tests, $0.05 \times 45 \approx 2$ tests may give us statistically significant differences in means completely at random.

Introduction

Goal: To test the hypothesis

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

where k is the number of independent populations

We can do all the possible tests in pairs.

In this case, **the probability of Type I Error increases**, i.e. the possibility to obtain statistically significant differences when in fact there are not.

For example if $k = 10$, there are 45 possible pairs for testing. By using $\alpha = 5\%$ in each of these tests, $0.05 \times 45 \approx 2$ tests may give us statistically significant differences in means completely at random.

► Thus, a new methodology is required.

One-way ANOVA

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$ vs $H_1 : \text{at least one } \mu_i \text{ differs}$

One-way ANOVA

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ vs $H_1 : \text{at least one } \mu_i \text{ differs}$

► Y_{ij} i -th observation that belongs to j -th group, $i = 1, \dots, n_j$ and $j = 1, \dots, k$

► $Y_{.j} = \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}$ the sum of observations of the j -th group.

► $\bar{Y}_{.j} = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}$ sample mean of j -th group

► $Y_{..} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}$ the sum of all the observations

► $\bar{Y}_{..} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}$ the sample mean, where $n = \sum_{j=1}^k n_j$

One-way ANOVA

Two sources of variability in the data:

- ▶ variation among observations within a population
- ▶ variation among populations that is due to the differences in the characteristics of the population,

One-way ANOVA

Two sources of variability in the data:

- ▶ variation among observations within a population
- ▶ variation among populations that is due to the differences in the characteristics of the population,

Part of the goal of the analysis of variance is to determine if the differences among the k sample means are what we would expect due to random variation alone or, rather, due to variation beyond merely random effects.

One-way ANOVA

Two sources of variability in the data:

- ▶ variation among observations within a population
- ▶ variation among populations that is due to the differences in the characteristics of the population,

Part of the goal of the analysis of variance is to determine if the differences among the k sample means are what we would expect due to random variation alone or, rather, due to variation beyond merely random effects.

▶ Assumptions

The k populations are independent and normally distributed with means $\mu_1, \dots, \mu_k$ and common variance σ^2

One-way ANOVA

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = y_{ij} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$$

- ▶ $y_{ij} - \bar{y}_{.j}$ variability within group
- ▶ $\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$ variability between groups .

One-way ANOVA

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = y_{ij} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$$

- ▶ $y_{ij} - \bar{y}_{.j}$ variability within group
- ▶ $\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$ variability between groups .
- ▶ If the variability between groups is large and the variability within groups is small, the null hypothesis must be rejected.
- ▶ If the variability between groups is small and the variability within groups is large, the null hypothesis must not be rejected.

One-way ANOVA

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = y_{ij} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$$

- ▶ $y_{ij} - \bar{y}_{.j}$ variability within group
- ▶ $\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$ variability between groups .
- ▶ If the variability between groups is large and the variability within groups is small, the null hypothesis must be rejected.
- ▶ If the variability between groups is small and the variability within groups is large, the null hypothesis must not be rejected.

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_{.j})^2 + \sum_{j=1}^k n_j (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2$$

where

- ▶ SST Total Sum of Squares
- ▶ SSW Sum of Squares Within group
- ▶ SSB Sum of Squares Between groups

One-way ANOVA

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = y_{ij} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$$

- ▶ $y_{ij} - \bar{y}_{.j}$ variability within group
- ▶ $\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$ variability between groups .
- ▶ If the variability between groups is large and the variability within groups is small, the null hypothesis must be rejected.
- ▶ If the variability between groups is small and the variability within groups is large, the null hypothesis must not be rejected.

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_{.j})^2 + \sum_{j=1}^k n_j (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2$$

where

- ▶ SST Total Sum of Squares
- ▶ SSW Sum of Squares Within group
- ▶ SSB Sum of Squares Between groups

$$MSW = \frac{SSW}{n - k}, \quad MSB = \frac{SSB}{k - 1},$$

One-way ANOVA

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = y_{ij} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$$

- ▶ $y_{ij} - \bar{y}_{.j}$ variability within group
- ▶ $\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$ variability between groups .
- ▶ If the variability between groups is large and the variability within groups is small, the null hypothesis must be rejected.
- ▶ If the variability between groups is small and the variability within groups is large, the null hypothesis must not be rejected.

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_{.j})^2 + \sum_{j=1}^k n_j (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2$$

where

- ▶ SST Total Sum of Squares
- ▶ SSW Sum of Squares Within group
- ▶ SSB Sum of Squares Between groups

$$MSW = \frac{SSW}{n - k}, \quad MSB = \frac{SSB}{k - 1},$$

$$F = \frac{MSB}{MSW} \sim F_{k-1, n-k}$$

One-way ANOVA

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = y_{ij} - \bar{y}_{.j} + \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$$

- ▶ $y_{ij} - \bar{y}_{.j}$ variability within group
- ▶ $\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}$ variability between groups .
- ▶ If the variability between groups is large and the variability within groups is small, the null hypothesis must be rejected.
- ▶ If the variability between groups is small and the variability within groups is large, the null hypothesis must not be rejected.

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_{.j})^2 + \sum_{j=1}^k n_j (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..})^2$$

where

- ▶ SST Total Sum of Squares
- ▶ SSW Sum of Squares Within group
- ▶ SSB Sum of Squares Between groups

$$MSW = \frac{SSW}{n - k}, \quad MSB = \frac{SSB}{k - 1},$$

$$F = \frac{MSB}{MSW} \sim F_{k-1, n-k}$$

One-way ANOVA

Variability	Degrees of Freedom	Sum of Squares	Mean Square
Between groups	$k - 1$	$\sum_{j=1}^k n_j (\bar{y}_{\cdot j} - \bar{y}_{..})^2 = SSB$	$\frac{SSB}{k - 1} = MSB$
Within groups	$n - k$	$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_{\cdot j})^2 = SSW$	$\frac{SSW}{n - k} = MSW$
Total	$n - 1$	$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = SST$	$\frac{SST}{n - 1} = MST$

$$F = \frac{MSB}{MSW} \sim F_{k-1, n-k}$$

Reject H_0 when $F > F_{k-1, n-k, \alpha}$.

One-way ANOVA

► **Homoscedasticity.** Levene's test is applied for testing the equality of variances in the k populations which is a generalization of the standard F-test for testing the equality of variances in two populations.

One-way ANOVA

- ▶ **Homoscedasticity.** Levene's test is applied for testing the equality of variances in the k populations which is a generalization of the standard F-test for testing the equality of variances in two populations.
- ▶ When the above assumptions are not valid, either the response variable is transformed, or the corresponding nonparametric test, named Kruskal Wallis test is applied.

One-way ANOVA

- ▶ **Homoscedasticity.** Levene's test is applied for testing the equality of variances in the k populations which is a generalization of the standard F-test for testing the equality of variances in two populations.
- ▶ When the above assumptions are not valid, either the response variable is transformed, or the corresponding nonparametric test, named Kruskal Wallis test is applied.
- ▶ If H_0 is rejected, i.e. if it is assumed that there is a statistically significant difference between three or more groups, then it is important to find between which groups there is difference.

One-way ANOVA

- ▶ **Homoscedasticity.** Levene's test is applied for testing the equality of variances in the k populations which is a generalization of the standard F-test for testing the equality of variances in two populations.
- ▶ When the above assumptions are not valid, either the response variable is transformed, or the corresponding nonparametric test, named Kruskal Wallis test is applied.
- ▶ If H_0 is rejected, i.e. if it is assumed that there is a statistically significant difference between three or more groups, then it is important to find between which groups there is difference.
- ▶ Bonferroni's method. N tests are applied and the p -value is readjusted to $p' = N p$ with the assumption that $p' \leq 1$.

One-way ANOVA

22 patients who underwent heart surgery were divided into three groups.

- ▶ Group 1. Patients who were treated with a mixture of 50% nitrous oxide and 50% oxygen for 24 hours.
- ▶ Group 2. Patients who were treated with a mixture of 50% nitrous oxide and 50% oxygen Only during surgery.
- ▶ Group 3. Patients who were treated with a mixture of 35 – 50% nitrous oxide and 50% oxygen for 24 hours.

In the following table the value of folic acid mg/l in erythrocytes of patients is presented.

Patients	Group 1	Group 2	Group 3
1	243	206	241
2	251	210	258
3	275	226	270
4	291	249	293
5	347	255	328
6	354	273	
7	380	285	
8	392	295	
9		309	

Do the patients of the three groups have the same mean level of folic acid mg/l in their erythrocytes?

Βασικά παραγοντικά πειράματα

Βασικά παραγοντικά πειράματα

- ▶ Επίδραση δύο ή περισσότερων παραγόντων πάνω σε μία μεταβλητή απόκρισης

Βασικά παραγοντικά πειράματα

- ▶ Επίδραση δύο ή περισσότερων παραγόντων πάνω σε μία μεταβλητή απόκρισης
- ▶ Γίνονται παρατηρήσεις της μεταβλητής απόκρισης πάνω σε όλους τους συνδυασμούς των επιπέδων των παραγόντων

Βασικά παραγοντικά πειράματα

- ▶ Επίδραση δύο ή περισσότερων παραγόντων πάνω σε μία μεταβλητή απόκρισης
- ▶ Γίνονται παρατηρήσεις της μεταβλητής απόκρισης πάνω σε όλους τους συνδυασμούς των επιπέδων των παραγόντων

Βασικά παραγοντικά πειράματα

- ▶ Επίδραση δύο ή περισσότερων παραγόντων πάνω σε μία μεταβλητή απόκρισης
- ▶ Γίνονται παρατηρήσεις της μεταβλητής απόκρισης πάνω σε όλους τους συνδυασμούς των επιπέδων των παραγόντων
- ▶ Επιδράσεις στη μεταβλητή απόκρισης
 - Κύριες επιδράσεις των παραγόντων
 - Αλληλεπιδράσεις δύο ή περισσότερων παραγόντων

Βασικά παραγοντικά πειράματα

- ▶ Επίδραση δύο ή περισσότερων παραγόντων πάνω σε μία μεταβλητή απόκρισης
- ▶ Γίνονται παρατηρήσεις της μεταβλητής απόκρισης πάνω σε όλους τους συνδυασμούς των επιπέδων των παραγόντων
- ▶ Επιδράσεις στη μεταβλητή απόκρισης
 - Κύριες επιδράσεις των παραγόντων
 - Αλληλεπιδράσεις δύο ή περισσότερων παραγόντων
- ▶ Απλές γραφικές παραστάσεις

Βασικά παραγοντικά πειράματα

- ▶ Επίδραση δύο ή περισσότερων παραγόντων πάνω σε μία μεταβλητή απόκρισης
- ▶ Γίνονται παρατηρήσεις της μεταβλητής απόκρισης πάνω σε όλους τους συνδυασμούς των επιπέδων των παραγόντων
- ▶ Επιδράσεις στη μεταβλητή απόκρισης
 - Κύριες επιδράσεις των παραγόντων
 - Αλληλεπιδράσεις δύο ή περισσότερων παραγόντων
- ▶ Απλές γραφικές παραστάσεις
- ▶ Στατιστική συμπερασματολογία

Παραγοντικά πειράματα

πειράματα στα οποία υπεισέρχονται δύο ή περισσότεροι παράγοντες και όλα τα επίπεδα τους ενός παράγοντα συνδυάζονται με τα επίπεδα όλων των άλλων παραγόντων για να παρατηρηθεί η μεταβλητή απόκρισης σε κάθε συνδυασμό.

Παραγοντικά πειράματα

πειράματα στα οποία υπεισέρχονται δύο ή περισσότεροι παράγοντες και όλα τα επίπεδα τους ενός παράγοντα συνδυάζονται με τα επίπεδα όλων των άλλων παραγόντων για να παρατηρηθεί η μεταβλητή απόκρισης σε κάθε συνδυασμό.

► Παράδειγμα:

Έστω ότι έχουμε ένα παραγοντικό πείραμα με δύο παράγοντες, το **Μορφωτικό επίπεδο** με 4 επίπεδα (αναλφάβητος, πρωτοβάθμια, δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εκπαίδευση) και το **ετήσιο εισόδημα** (< 10000 ευρώ, $10000 - 20000$ ευρώ και > 20000 ευρώ).

Παραγοντικά πειράματα

πειράματα στα οποία υπεισέρχονται δύο ή περισσότεροι παράγοντες και όλα τα επίπεδα τους ενός παράγοντα συνδυάζονται με τα επίπεδα όλων των άλλων παραγόντων για να παρατηρηθεί η μεταβλητή απόκρισης σε κάθε συνδυασμό.

► Παράδειγμα:

Έστω ότι έχουμε ένα παραγοντικό πείραμα με δύο παράγοντες, το **Μορφωτικό επίπεδο** με 4 επίπεδα (αναλφάβητος, πρωτοβάθμια, δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εκπαίδευση) και το **ετήσιο εισόδημα** (< 10000 ευρώ, $10000 - 20000$ ευρώ και > 20000 ευρώ).

$$\text{Σύνολο θεραπειών: } 4 \times 3 = 12$$

Παραγοντικά πειράματα

πειράματα στα οποία υπεισέρχονται δύο ή περισσότεροι παράγοντες και όλα τα επίπεδα τους ενός παράγοντα συνδυάζονται με τα επίπεδα όλων των άλλων παραγόντων για να παρατηρηθεί η μεταβλητή απόκριση σε κάθε συνδυασμό.

► Παράδειγμα:

Έστω ότι έχουμε ένα παραγοντικό πείραμα με δύο παράγοντες, το **Μορφωτικό επίπεδο** με 4 επίπεδα (αναλφάβητος, πρωτοβάθμια, δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εκπαίδευση) και το **ετήσιο εισόδημα** (< 10000 ευρώ, $10000 - 20000$ ευρώ και > 20000 ευρώ).

$$\text{Σύνολο θεραπειών: } 4 \times 3 = 12$$

► Μετράμε τη μεταβλητή απόκριση μέσα σε κάθε μία από αυτές τις θεραπείες.

Παραγοντικά πειράματα

πειράματα στα οποία υπεισέρχονται δύο ή περισσότεροι παράγοντες και όλα τα επίπεδα τους ενός παράγοντα συνδυάζονται με τα επίπεδα όλων των άλλων παραγόντων για να παρατηρηθεί η μεταβλητή απόκριση σε κάθε συνδυασμό.

► Παράδειγμα:

Έστω ότι έχουμε ένα παραγοντικό πείραμα με δύο παράγοντες, το **Μορφωτικό επίπεδο** με 4 επίπεδα (αναλφάβητος, πρωτοβάθμια, δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια εκπαίδευση) και το **ετήσιο εισόδημα** (< 10000 ευρώ, $10000 - 20000$ ευρώ και > 20000 ευρώ).

$$\text{Σύνολο θεραπειών: } 4 \times 3 = 12$$

- Μετράμε τη μεταβλητή απόκριση μέσα σε κάθε μία από αυτές τις θεραπείες.
- Μπορούμε να έχουμε μία ή περισσότερες παρατηρήσεις της μεταβλητής απόκρισης μέσα σε κάθε θεραπεία.

Είδη παραγόντων

► **Σταθεροί:** τα επίπεδα τους είναι συγκεκριμένα και είναι αυτά για τα οποία ενδιαφερόμαστε.

Είδη παραγόντων

► **Σταθεροί:** τα επίπεδα τους είναι συγκεκριμένα και είναι αυτά για τα οποία ενδιαφερόμαστε.

Το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται στις μέσες τιμές της απόκρισης που αντιστοιχεί στους συνδυασμούς αυτών των επιπέδων

Είδη παραγόντων

► **Σταθεροί:** τα επίπεδα τους είναι συγκεκριμένα και είναι αυτά για τα οποία ενδιαφερόμαστε.

Το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται στις μέσες τιμές της απόκρισης που αντιστοιχεί στους συνδυασμούς αυτών των επιπέδων

► **Τυχαίοι:** τα επίπεδα του παράγοντα που χρησιμοποιούνται είναι ένα τυχαίο δείγμα από το σύνολο των δυνατών επιπέδων του παράγοντα.

Είδη παραγόντων

► **Σταθεροί:** τα επίπεδα τους είναι συγκεκριμένα και είναι αυτά για τα οποία ενδιαφερόμαστε.

Το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται στις μέσες τιμές της απόκρισης που αντιστοιχεί στους συνδυασμούς αυτών των επιπέδων

► **Τυχαίοι:** τα επίπεδα του παράγοντα που χρησιμοποιούνται είναι ένα τυχαίο δείγμα από το σύνολο των δυνατών επιπέδων του παράγοντα.

Το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται στην ανάλυση της διασποράς της μεταβλητής απόκρισης σε επιμέρους όρους και στην εκτίμηση των συνιστωσών της διασποράς που οφείλεται στις επιδράσεις των παραγόντων.

Κύριες επιδράσεις και αλληλεπιδράσεις παραγόντων

- **Επιδράσεις παραγόντων:** Μέσες μεταβολές της απόκρισης που αντιστοιχούν σε αλλαγές των θεραπειών.

Κύριες επιδράσεις και αλληλεπιδράσεις παραγόντων

► **Επιδράσεις παραγόντων:** Μέσες μεταβολές της απόκρισης που αντιστοιχούν σε αλλαγές των θεραπειών.

Έστω ότι έχουμε ένα παραγοντικό πείραμα με δύο παράγοντες
A (με α επίπεδα) και B (με β επίπεδα) **Σύνολο θεραπειών:** $\alpha \times \beta$

Κύριες επιδράσεις και αλληλεπιδράσεις παραγόντων

► **Επιδράσεις παραγόντων:** Μέσες μεταβολές της απόκρισης που αντιστοιχούν σε αλλαγές των θεραπειών.

Έστω ότι έχουμε ένα παραγοντικό πείραμα με δύο παράγοντες A (με α επίπεδα) και B (με β επίπεδα) **Σύνολο θεραπειών:** $\alpha \times \beta$

► μ_{ij} μέση απόκριση για το επίπεδο i του παράγοντα A και το επίπεδο j του παράγοντα B.

► $\mu_{i\cdot} = \frac{\sum_{j=1}^{\beta} \mu_{ij}}{\beta}$ μέση απόκριση για το επίπεδο i του παράγοντα A.

► $\mu_{\cdot j} = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_{ij}}{\alpha}$ μέση απόκριση για το επίπεδο j του παράγοντα B.

► $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\beta} \mu_{ij}}{\alpha\beta}$ γενική μέση τιμή

Κύριες επιδράσεις και αλληλεπιδράσεις παραγόντων

► **Επιδράσεις παραγόντων:** Μέσες μεταβολές της απόκρισης που αντιστοιχούν σε αλλαγές των θεραπειών.

Έστω ότι έχουμε ένα παραγοντικό πείραμα με δύο παράγοντες A (με α επίπεδα) και B (με β επίπεδα) **Σύνολο θεραπειών:** $\alpha \times \beta$

► μ_{ij} μέση απόκριση για το επίπεδο i του παράγοντα A και το επίπεδο j του παράγοντα B.

► $\mu_{i\cdot} = \frac{\sum_{j=1}^{\beta} \mu_{ij}}{\beta}$ μέση απόκριση για το επίπεδο i του παράγοντα A.

► $\mu_{\cdot j} = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_{ij}}{\alpha}$ μέση απόκριση για το επίπεδο j του παράγοντα B.

► $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\beta} \mu_{ij}}{\alpha\beta}$ γενική μέση τιμή

► **Κύριες επιδράσεις:** Η επίδραση που έχει κάθε παράγοντας ξεχωριστά στην απόκριση χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η επίδραση των άλλων παραγόντων.

Κύριες επιδράσεις και αλληλεπιδράσεις παραγόντων

► **Επιδράσεις παραγόντων:** Μέσες μεταβολές της απόκρισης που αντιστοιχούν σε αλλαγές των θεραπειών.

Έστω ότι έχουμε ένα παραγοντικό πείραμα με δύο παράγοντες A (με α επίπεδα) και B (με β επίπεδα) **Σύνολο θεραπειών:** $\alpha \times \beta$

► μ_{ij} μέση απόκριση για το επίπεδο i του παράγοντα A και το επίπεδο j του παράγοντα B.

► $\mu_{i\cdot} = \frac{\sum_{j=1}^{\beta} \mu_{ij}}{\beta}$ μέση απόκριση για το επίπεδο i του παράγοντα A.

► $\mu_{\cdot j} = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} \mu_{ij}}{\alpha}$ μέση απόκριση για το επίπεδο j του παράγοντα B.

► $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\beta} \mu_{ij}}{\alpha\beta}$ γενική μέση τιμή

► **Κύριες επιδράσεις:** Η επίδραση που έχει κάθε παράγοντας ξεχωριστά στην απόκριση χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η επίδραση των άλλων παραγόντων.

► $\alpha_i = \mu_{i\cdot} - \mu$, $i = 1, \dots, \alpha$ κύρια επίδραση του παράγοντα A.

► $\beta_j = \mu_{\cdot j} - \mu$, $j = 1, \dots, \beta$ κύρια επίδραση του παράγοντα B.

Δειγματικές μέσες τιμές

► $\bar{y}_{ij\cdot} = \frac{\sum_{k=1}^n y_{ijk}}{n}$ δειγματικός μέσος που αντιστοιχεί στη θεραπεία (i, j)
 $i = 1, \dots, \alpha, j = 1, \dots, \beta$

► $\bar{y}_{i..} = \frac{\sum_{j=1}^{\beta} \sum_{k=1}^n y_{ijk}}{n\beta}$ δειγματικός μέσος των παρατηρήσεων του i επιπέδου του παράγοντα A $i = 1, \dots, \alpha$.

► $\bar{y}_{\cdot j\cdot} = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{k=1}^n y_{ijk}}{n\alpha}$ δειγματικός μέσος των παρατηρήσεων του j επιπέδου του παράγοντα B $j = 1, \dots, \beta$.

► $\bar{y}_{...} = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\beta} \sum_{k=1}^n y_{ijk}}{n\alpha\beta}$ γενικός μέσος.

Δειγματικές μέσες τιμές

▶ $\bar{y}_{ij.} = \frac{\sum_{k=1}^n y_{ijk}}{n}$ δειγματικός μέσος που αντιστοιχεί στη θεραπεία (i, j)
 $i = 1, \dots, \alpha, j = 1, \dots, \beta$

▶ $\bar{y}_{i..} = \frac{\sum_{j=1}^{\beta} \sum_{k=1}^n y_{ijk}}{n\beta}$ δειγματικός μέσος των παρατηρήσεων του i επιπέδου του παράγοντα A $i = 1, \dots, \alpha$.

▶ $\bar{y}_{.j.} = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{k=1}^n y_{ijk}}{n\alpha}$ δειγματικός μέσος των παρατηρήσεων του j επιπέδου του παράγοντα B $j = 1, \dots, \beta$.

▶ $\bar{y}_{...} = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\beta} \sum_{k=1}^n y_{ijk}}{n\alpha\beta}$ γενικός μέσος.

Δειγματικές κύριες επιδράσεις

▶ $\hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}, i = 1, \dots, \alpha$

▶ $\hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}, j = 1, \dots, \beta$

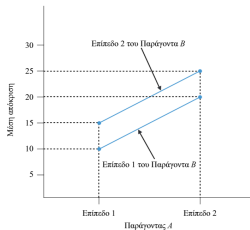
▶ $\sum_{i=1}^{\alpha} \hat{\alpha}_i = 0, \quad \sum_{j=1}^{\beta} \hat{\beta}_j = 0$

Αλληλεπιδράσεις

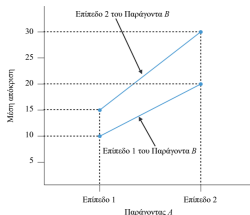
Κοινή επίδραση των παραγόντων πάνω στη μεταβλητή
απόκρισης

Αλληλεπιδράσεις

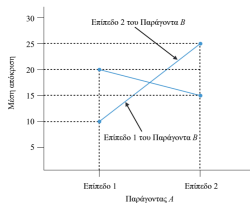
Κοινή επίδραση των παραγόντων πάνω στη μεταβλητή απόκρισης



Χωρίς
αλληλεπίδραση



Συnergατική
αλληλεπίδραση



Ανταγωνιστική
αλληλεπίδραση

Αλληλεπιδράσεις

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}$$

Αλληλεπιδράσεις

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}$$

$$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - (\mu + \alpha_i + \beta_j)$$

Αλληλεπιδράσεις

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}$$

$$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - (\mu + \alpha_i + \beta_j) = \mu_{ij} - \mu_{i\cdot} - \mu_{\cdot j} + \mu$$

αλληλεπίδραση του παράγοντα A και B στη θεραπεία (i, j) .

Αλληλεπιδράσεις

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}$$

$$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - (\mu + \alpha_i + \beta_j) = \mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu$$

αλληλεπίδραση του παράγοντα A και B στη θεραπεία (i, j) .

► Δειγματική αλληλεπίδραση

$$(\hat{\alpha}\hat{\beta})_{ij} = \bar{y}_{ij.} - (\bar{y}_{...} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j)$$

Αλληλεπιδράσεις

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}$$

$$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - (\mu + \alpha_i + \beta_j) = \mu_{ij} - \mu_{i\cdot} - \mu_{\cdot j} + \mu$$

αλληλεπίδραση του παράγοντα Α και Β στη θεραπεία (i, j) .

► Δειγματική αλληλεπίδραση

$$(\hat{\alpha}\hat{\beta})_{ij} = \bar{y}_{ij\cdot} - (\bar{y}_{i\cdot\cdot} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j) = \bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}_{\cdot\cdot\cdot}$$

$$\sum_{i=1}^{\alpha} (\hat{\alpha}\hat{\beta})_{ij} = 0, \quad j = 1 \dots \beta$$

$$\sum_{j=1}^{\beta} (\hat{\alpha}\hat{\beta})_{ij} = 0, \quad i = 1 \dots \alpha$$

Παραγοντικό πείραμα τριών παραγόντων

- ▶ A, B, C παράγοντες με α , β και c επίπεδα αντίστοιχα.
- ▶ A, B, C κύριες επιδράσεις
- ▶ AB, AC, BC αλληλεπιδράσεις πρώτης τάξης
- ▶ ABC αλληλεπίδραση δεύτερης τάξης, αλληλεπίδραση μεταξύ όλων των παραγόντων, ορίζεται με την βοήθεια $\alpha \times \beta \times c$ όρων

Παραγοντικό πείραμα τριών παραγόντων

- ▶ A, B, C παράγοντες με α , β και c επίπεδα αντίστοιχα.
- ▶ A, B, C κύριες επιδράσεις
- ▶ AB, AC, BC αλληλεπιδράσεις πρώτης τάξης
- ▶ ABC αλληλεπίδραση δεύτερης τάξης, αλληλεπίδραση μεταξύ όλων των παραγόντων, ορίζεται με την βοήθεια $\alpha \times \beta \times c$ όρων

Πλεονεκτήματα παραγοντικών πειραμάτων

- γίνεται δυνατή η αποτίμηση των κοινών επιδράσεων δύο ή περισσότερων παραγόντων, δηλαδή η αλληλεπίδραση τους.
- όλες οι παρατηρήσεις χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση των επιδράσεων των παραγόντων. Κάθε παρατήρηση δίνει πληροφορίες για όλους τους παράγοντες που υπεισέρχονται στο πείραμα. Δεν μένουν παρατηρήσεις ανεκμετάλλευτες στην τελική αποτίμηση των κύριων επιδράσεων και αλληλεπιδράσεων
- Τα αποτελέσματα που εξάγονται από αυτά ισχύουν σε ένα μεγάλο εύρος πειραματικών συνθηκών

Συμπερασματολογία σε παραγοντικό πείραμα πλήρους τυχαιοποίησης

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ik} + \epsilon_{ijk}$$

$i = 1, \dots, \alpha, j = 1, \dots, \beta, k = 1, \dots, n$
όπου $\epsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$ τυχαία σφάλματα,

$$\sum_{i=1}^{\alpha} \alpha_i = 0, \quad \sum_{j=1}^{\beta} \beta_j = 0$$

► y_{ijk} απόκριση που παρατηρείται στην k επανάληψη του πειράματος για τη θεραπεία (i, j) .

► μ γενικός μέσος

► α_i κύρια επίδραση παράγονται A, $i = 1, \dots, \alpha$

► β_j κύρια επίδραση παράγονται B, $j = 1, \dots, \beta$

► $(\alpha\beta)_{ij}$ αλληλεπίδραση των παραγόντων A και B στη θεραπεία (i, j)
 $i = 1, \dots, \alpha, j = 1, \dots, \beta$

Συμπερασματολογία σε παραγοντικό πείραμα πλήρους τυχαιοποίησης

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ik} + \epsilon_{ijk}$$

$i = 1, \dots, \alpha, j = 1, \dots, \beta, k = 1, \dots, n$
όπου $\epsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$ τυχαία σφάλματα,

$$\sum_{i=1}^{\alpha} \alpha_i = 0, \quad \sum_{j=1}^{\beta} \beta_j = 0$$

► y_{ijk} απόκριση που παρατηρείται στην k επανάληψη του πειράματος για τη θεραπεία (i, j) .

► μ γενικός μέσος

► α_i κύρια επίδραση παράγονται A, $i = 1, \dots, \alpha$

► β_j κύρια επίδραση παράγονται B, $j = 1, \dots, \beta$

► $(\alpha\beta)_{ij}$ αλληλεπίδραση των παραγόντων A και B στη θεραπεία (i, j)
 $i = 1, \dots, \alpha, j = 1, \dots, \beta$

(το παραπάνω πρότυπο γενικεύεται εύκολα για περισσότερους
παράγοντες)

Έλεγχοι Υποθέσεων

- ▶ Έλεγχος Υπόθεσης κύριων επιδράσεων παράγοντα A

$$H_0 : \alpha_i = 0, i = 1, \dots, \alpha \text{ κατά } H_1 : \text{τουλάχιστον ένα } \alpha_i \neq 0$$

- ▶ Έλεγχος Υπόθεσης κύριων επιδράσεων παράγοντα B

$$H_0 : \beta_j = 0, j = 1, \dots, \beta \text{ κατά } H_1 : \text{τουλάχιστον ένα } \beta_j \neq 0$$

- ▶ Έλεγχος Υπόθεσης αλληλεπιδράσεων μεταξύ των παραγόντων A και B

$$H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0, i = 1, \dots, \alpha, j = 1, \dots, \beta \text{ κατά } H_1 : \text{τουλάχιστον ένα } (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$$

Ανάλυση Διασποράς με δύο παράγοντες

$$\sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\beta} \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2 = bn \sum_{i=1}^{\alpha} (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 + an \sum_{j=1}^{\beta} (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 +$$

$$n \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\beta} (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2 + \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{j=1}^{\beta} \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2$$

$$SST = SSA + SSB + SSAB + SSE$$

Βαθμοί Ελευθερίας

$$\alpha\beta n - 1 = (\alpha - 1) + (\beta - 1) + (\alpha - 1)(\beta - 1) + \alpha\beta(n - 1)$$

Ανάλυση Διασποράς με δύο παράγοντες

$$MSA = \frac{SSA}{\alpha - 1}, \quad MSB = \frac{SSB}{\beta - 1}$$

$$MSA = \frac{SSAB}{(\alpha - 1)(\beta - 1)}, \quad MSE = \frac{SSBE}{\alpha\beta(n - 1)}$$

Ανάλυση Διασποράς με δύο παράγοντες

$$MSA = \frac{SSA}{\alpha - 1}, \quad MSB = \frac{SSB}{\beta - 1}$$

$$MSA = \frac{SSAB}{(\alpha - 1)(\beta - 1)}, \quad MSE = \frac{SSBE}{\alpha\beta(n - 1)}$$

$$F = \frac{MSA}{MSE} \sim F_{\alpha-1, \alpha\beta(n-1)}, \quad F = \frac{MSB}{MSE} \sim F_{\beta-1, \alpha\beta(n-1)}$$

$$F = \frac{MSAB}{MSE} \sim F_{(\alpha-1)(\beta-1), \alpha\beta(n-1)}$$

Ανάλυση Διασποράς με δύο παράγοντες

$$MSA = \frac{SSA}{\alpha - 1}, \quad MSB = \frac{SSB}{\beta - 1}$$

$$MSA = \frac{SSAB}{(\alpha - 1)(\beta - 1)}, \quad MSE = \frac{SSBE}{\alpha\beta(n - 1)}$$

$$F = \frac{MSA}{MSE} \sim F_{\alpha-1, \alpha\beta(n-1)}, \quad F = \frac{MSB}{MSE} \sim F_{\beta-1, \alpha\beta(n-1)}$$

$$F = \frac{MSAB}{MSE} \sim F_{(\alpha-1)(\beta-1), \alpha\beta(n-1)}$$

Άρα σε επίπεδο σημαντικότητας α απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση αν $F > F_{df_{ar}, \alpha\beta(n-1)}$.

Ανάλυση Διασποράς με δύο παράγοντες

$$MSA = \frac{SSA}{\alpha - 1}, \quad MSB = \frac{SSB}{\beta - 1}$$

$$MSA = \frac{SSAB}{(\alpha - 1)(\beta - 1)}, \quad MSE = \frac{SSBE}{\alpha\beta(n - 1)}$$

$$F = \frac{MSA}{MSE} \sim F_{\alpha-1, \alpha\beta(n-1)}, \quad F = \frac{MSB}{MSE} \sim F_{\beta-1, \alpha\beta(n-1)}$$

$$F = \frac{MSAB}{MSE} \sim F_{(\alpha-1)(\beta-1), \alpha\beta(n-1)}$$

Άρα σε επίπεδο σημαντικότητας α απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση αν $F > F_{df_{ar}, \alpha\beta(n-1)}$.

► Analyze → General Linear Model → Univariate

Ανάλυση Διασποράς με δύο παράγοντες

Μεταβλητότητα	Βαθμοί ελευθερίας	Άθροισμα τετραγώνων	Τετραγωνικός μέσος	F-έλεγχοι
Παράγοντας A	$\alpha - 1$	SSA	$\frac{SSA}{\alpha - 1} = MSA$	$\frac{MSA}{MSE}$
Παράγοντας B	$\beta - 1$	SSB	$\frac{SSB}{\beta - 1} = MSB$	$\frac{MSB}{MSE}$
Αλληλεπίδραση AB	$(\alpha - 1)(\beta - 1)$	SSAB	$\frac{SSAB}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} = MSAB$	$\frac{MSAB}{MSE}$
Σφάλματα (ΣΣΕ)	$\alpha\beta(n - 1)$	SSE	$\frac{SSE}{\alpha\beta(n - 1)} = MSE$	
Ολική	$\alpha\beta n - 1$	SST	$\frac{SST}{\alpha\beta n - 1} = MST$	

$F = \frac{MSA}{MSE} \sim F_{\alpha-1, \alpha\beta(n-1)}$ απορρίπτουμε την H_0 όταν $F > F_{\alpha-1, \alpha\beta(n-1)}$.

$F = \frac{MSB}{MSE} \sim F_{\beta-1, \alpha\beta(n-1)}$ απορρίπτουμε την H_0 όταν $F > F_{\beta-1, \alpha\beta(n-1)}$.

$F = \frac{MSAB}{MSE} \sim F_{(\alpha-1)(\beta-1), \alpha\beta(n-1)}$ απορρίπτουμε την H_0 όταν

$F > F_{(\alpha-1)(\beta-1), \alpha\beta(n-1)}$.

Παραγοντικά πειράματα με σταθερούς παράγοντες χωρίς επανάληψη ($n = 1$)

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, \alpha, \quad j = 1, \dots, \beta,$$

όπου $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ τυχαία σφάλματα.

Παραγοντικά πειράματα με σταθερούς παράγοντες χωρίς επανάληψη ($n = 1$)

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, \alpha, \quad j = 1, \dots, \beta,$$

όπου $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ τυχαία σφάλματα.

- ▶ Δεν έχουμε μεταβλητότητα μέσα σε κάθε θεραπεία
- ▶ Μηδενίζονται οι βαθμοί ελευθερίας των σφαλμάτων

Παραγοντικά πειράματα με σταθερούς παράγοντες χωρίς επανάληψη ($n = 1$)

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, \alpha, \quad j = 1, \dots, \beta,$$

όπου $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ τυχαία σφάλματα.

- ▶ Δεν έχουμε μεταβλητότητα μέσα σε κάθε θεραπεία
- ▶ Μηδενίζονται οι βαθμοί ελευθερίας των σφαλμάτων

Δεν είναι δυνατή η συμπερασματολογία σε αυτό το πρότυπο αν δεν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των παραγόντων A και B

Παραγοντικά πειράματα με σταθερούς παράγοντες χωρίς επανάληψη ($n = 1$)

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, \alpha, \quad j = 1, \dots, \beta,$$

όπου $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ τυχαία σφάλματα.

- ▶ Δεν έχουμε μεταβλητότητα μέσα σε κάθε θεραπεία
- ▶ Μηδενίζονται οι βαθμοί ελευθερίας των σφαλμάτων

Δεν είναι δυνατή η συμπερασματολογία σε αυτό το πρότυπο αν δεν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των παραγόντων A και B

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, \alpha, \quad j = 1, \dots, \beta,$$

Ανάλυση Διασποράς με δύο παράγοντες

Μεταβλητότητα	Βαθμοί ελευθερίας	Άθροισμα τετραγώνων	Τετραγωνικός μέσος	F-έλεγχοι
Παράγοντας A	$\alpha - 1$	SSA	$\frac{SSA}{\alpha - 1} = MSA$	$\frac{MSA}{MSE}$
Παράγοντας B	$\beta - 1$	SSB	$\frac{SSB}{\beta - 1} = MSB$	$\frac{MSB}{MSE}$
Σφάλματα	$(\alpha - 1)(\beta - 1)$	SSE	$\frac{SSE}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} = MSE$	
Ολική	$\alpha\beta - 1$	SST	$\frac{SST}{\alpha\beta - 1} = MST$	

$F = \frac{MSA}{MSE} \sim F_{\alpha-1, (\alpha-1)(\beta-1)}$ απορρίπτουμε την H_0 όταν $F > F_{\alpha-1, (\alpha-1)(\beta-1)}$.

$F = \frac{MSB}{MSE} \sim F_{\beta-1, (\alpha-1)(\beta-1)}$ απορρίπτουμε την H_0 όταν $F > F_{\beta-1, (\alpha-1)(\beta-1)}$.

Άσκηση

Ο υπεύθυνος ποιότητας μιας βιομηχανίας παραγωγής επίπλων κουζίνας θέλησε να διερευνήσει το κατά πόσο η αντοχή των συγκολλήσεων τύπου ΤΑΥ επηρεάζεται από τον τύπο του μίγματος της κόλλας που χρησιμοποιείται για τις κολλήσεις καθώς και από τη θερμοκρασία του μίγματος κατά τη διαδικασία της κόλλησης. Η θερμοκρασία του μίγματος της κόλλας μπορεί να ρυθμιστεί με ακρίβεια σε τρία διαφορετικά επίπεδα (50°C , 60°C και 70°C) με χρήση ειδικού μηχανήματος συγκόλλησης που διαθέτει η βιομηχανία. Ο υπεύθυνος θεωρεί πως πρέπει να ελέγξει και τους τέσσερις τύπους μίγματος κόλλας που είναι διαθέσιμοι στην αγορά. Για το σκοπό αυτό σχεδιάζει ένα πείραμα στο οποίο γίνονται συγκολλήσεις τύπου ΤΑΥ για διάφορους συνδυασμούς μίγματος κόλλας και θερμοκρασίας μίγματος και μετράται η δύναμη (σε Newton) που πρέπει να εφαρμοστεί (κάθετα) στο ελεύθερο άκρο του οριζόντιου δοκού ώστε να επέλθει η ρήξη του δεσμού που πραγματοποιήθηκε. Τα δεδομένα του πειράματος δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Άσκηση

Κόλλα τύπου Α		Κόλλα τύπου Β		Κόλλα τύπου Γ		Κόλλα τύπου Δ	
Θερμοκρασία μίγματος	Δύναμη	Θερμοκρασία μίγματος	Δύναμη	Θερμοκρασία μίγματος	Δύναμη	Θερμοκρασία μίγματος	Δύναμη
50°C	30.4	70°C	17.7	60°C	38.9	50°C	35.9
70°C	33.6	70°C	18.4	50°C	41.6	50°C	36.3
60°C	37.9	50°C	22.6	50°C	43.6	50°C	37.9
50°C	36.4	50°C	20.3	70°C	29.3	50°C	36.9
70°C	32.2	60°C	17.9	60°C	36.1	70°C	23.3
60°C	32.7	60°C	21.9	70°C	30.5	70°C	23.2
50°C	37.3	70°C	18.6	50°C	39.8	60°C	34.5
70°C	34.6	50°C	23.4	50°C	40.3	60°C	34.3
60°C	33.5	60°C	22.0	60°C	32.9	60°C	28.6
50°C	34.4	60°C	22.7	70°C	29.0	60°C	33.7
70°C	33.2	50°C	22.0	60°C	35.8	70°C	20.3
60°C	35.0	70°C	23.5	70°C	28.5	70°C	28.0

Άσκηση

- 1 Αναγνωρίστε το είδος του σχεδιασμού που χρησιμοποιήθηκε, τη μεταβλητή απόκρισης, τους παράγοντες και το είδος των επιδράσεων τους (σταθερές ή τυχαίες). Δώστε κατάλληλο πρότυπο για την περιγραφή του προβλήματος και προσδιορίστε τις υποθέσεις που το διέπουν (τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται).
- 2 Να κατασκευάσετε τα διαγράμματα των κυρίων επιδράσεων των παραγόντων καθώς και το διάγραμμα αλληλεπίδρασης αυτών. Στη συνέχεια, να ερευνήσετε, μελετώντας τα διαγράμματα, αν υπάρχει κάποια θερμοκρασία μίγματος με την οποία μεγιστοποιείται η δύναμη που πρέπει να εφαρμοστεί ώστε να σπάσει η κόλληση (ανεξάρτητα από τον τύπο της κόλλας που χρησιμοποιείται) ή αν υπάρχει κάποιος τύπος κόλλας η χρήση του οποίου μεγιστοποιεί τη δύναμη που πρέπει να εφαρμοστεί ώστε να σπάσει η κόλληση (ανεξάρτητα από τη θερμοκρασία του μίγματος).
- 3 Να δώσετε τον πίνακα ανάλυσης διασποράς και να εντοπίσετε, σε επίπεδο σημαντικότητας 1%, τις σημαντικές παραγοντικές επιδράσεις αναφέροντας κάθε φορά ποια είναι η μηδενική υπόθεση που ελέγχετε. Τέλος, κάνοντας γραφική ανάλυση των υπολοίπων, να ελέγξετε το κατά πόσο μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύουν οι υποθέσεις του προτύπου.

Ερώτημα 1

Πρόκειται για παραγοντικό πείραμα δύο σταθερών παραγόντων με τέσσερα επίπεδα ο ένας και τρία επίπεδα ο άλλος και συνολικά 12 θεραπείες. Για κάθε θεραπεία προκύπτει πως έχουν γίνει $n = 4$ επαναλήψεις, γεγονός που καθιστά το σχεδιασμό ισορροπημένο.

Παράγοντες: ο τύπος μίγματος κόλλας (με 4 επίπεδα) και η θερμοκρασία του μίγματος κόλλας (με 3 επίπεδα)

Μεταβλητή απόκρισης: η δύναμη που ασκείται κάθετα στον οριζόντιο δοκό μέχρι να «σπάσει» η κόλληση

Ερώτημα 1

Πρόκειται για παραγοντικό πείραμα δύο σταθερών παραγόντων με τέσσερα επίπεδα ο ένας και τρία επίπεδα ο άλλος και συνολικά 12 θεραπείες. Για κάθε θεραπεία προκύπτει πως έχουν γίνει $n = 4$ επαναλήψεις, γεγονός που καθιστά το σχεδιασμό ισορροπημένο.

Παράγοντες: ο τύπος μίγματος κόλλας (με 4 επίπεδα) και η θερμοκρασία του μίγματος κόλλας (με 3 επίπεδα)

Μεταβλητή απόκρισης: η δύναμη που ασκείται κάθετα στον οριζόντιο δοκό μέχρι να «σπάσει» η κόλληση

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \begin{cases} i = 1, 2, 3, 4 \\ j = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

όπου α_i οι κύριες επιδράσεις του παράγοντα «Τύπος κόλλας» (Glue), β_j οι κύριες επιδράσεις του παράγοντα «Θερμοκρασία» (Temp) και $(\alpha\beta)_{ij}$ η αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο παραγόντων για τη θεραπεία (i, j) . Τα σφάλματα ε_{ijk} υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $N(0, \sigma)$ για κάθε i, j και k .

Chi-Square test

Goodness-of-fit test

► a test to determine if a population has a specified theoretical distribution.

H_0 : The population has a specified theoretical distribution vs

H_1 : The population has NOT the specified theoretical distribution

Goodness-of-fit test

► a test to determine if a population has a specified theoretical distribution.

H_0 : The population has a specified theoretical distribution vs

H_1 : The population has NOT the specified theoretical distribution

► The test is based on how good is the obtained fit between the frequency of occurrence of observations in an observed sample and the expected frequencies obtained from the hypothesized distribution.

Goodness-of-fit test

► a test to determine if a population has a specified theoretical distribution.

H_0 : The population has a specified theoretical distribution vs

H_1 : The population has NOT the specified theoretical distribution

► The test is based on how good is the obtained fit between the frequency of occurrence of observations in an observed sample and the expected frequencies obtained from the hypothesized distribution.

► For example, we consider the tossing of a die. We hypothesize that the die is honest.

$$H_0 : f(x) = \frac{1}{6}, x = 1, \dots, 6 \text{ vs } H_1 : \text{not } H_0 :$$

Goodness-of-fit test

► a test to determine if a population has a specified theoretical distribution.

H_0 : The population has a specified theoretical distribution vs

H_1 : The population has NOT the specified theoretical distribution

► The test is based on how good is the obtained fit between the frequency of occurrence of observations in an observed sample and the expected frequencies obtained from the hypothesized distribution.

► For example, we consider the tossing of a die. We hypothesize that the die is honest.

$H_0 : f(x) = \frac{1}{6}, x = 1, \dots, 6$ vs $H_1 : \text{not } H_0$:

The die is tossed 120 times and each outcome is recorded

x	1	2	3	4	5	6
observed	18	22	30	21	17	12
expected	20	20	20	20	20	20

Goodness-of-fit test

- ▶ The observed frequencies O_i
- ▶ Compute the expected frequencies under the null hypothesis.

$$E_i = np_i$$

n : the sample size

p_i : the probability of the value x_i .

Goodness-of-fit test

- ▶ The observed frequencies O_i
- ▶ Compute the expected frequencies under the null hypothesis.
 $E_i = np_i$
 - n : the sample size
 - p_i : the probability of the value x_i .
- ▶ Compute the quantity

$$X^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi_{k-1}^2 \text{ under } H_0$$

Goodness-of-fit test

- ▶ The observed frequencies O_i
- ▶ Compute the expected frequencies under the null hypothesis.

$$E_i = np_i$$

n : the sample size

p_i : the probability of the value x_i .

- ▶ Compute the quantity

$$X^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi_{k-1}^2 \text{ under } H_0$$

- ▶ If $X^2 > \chi_{k-1, \alpha}^2$, then H_0 is rejected at $\alpha\%$ significant level.

Goodness-of-fit test

- ▶ The observed frequencies O_i
- ▶ Compute the expected frequencies under the null hypothesis.

$$E_i = np_i$$

n : the sample size

p_i : the probability of the value x_i .

- ▶ Compute the quantity

$$X^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi_{k-1}^2 \text{ under } H_0$$

- ▶ If $X^2 > \chi_{k-1, \alpha}^2$, then H_0 is rejected at $\alpha\%$ significant level.
- ▶ The decision criterion described here should not be used unless each of the expected frequencies is greater or equal to 5.

Goodness-of-fit test

- ▶ The observed frequencies O_i
- ▶ Compute the expected frequencies under the null hypothesis.

$$E_i = np_i$$

n : the sample size

p_i : the probability of the value x_i .

- ▶ Compute the quantity

$$X^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi_{k-1}^2 \text{ under } H_0$$

- ▶ If $X^2 > \chi_{k-1, \alpha}^2$, then H_0 is rejected at $\alpha\%$ significant level.
- ▶ The decision criterion described here should not be used unless each of the expected frequencies is greater or equal to 5.

$$\begin{aligned} \text{▶ } \chi^2 &= \frac{(20-20)^2}{20} + \frac{(22-20)^2}{20} + \frac{(17-20)^2}{20} + \frac{(18-20)^2}{20} + \frac{(19-20)^2}{20} + \frac{(24-20)^2}{20} = 1.7 \\ \chi_{5,0.05}^2 &= 11.07 \end{aligned}$$

Goodness-of-fit test

► Example

The level of noise in a village near to a racetrack is rated during a race at a scale of 1-5 from all adult residents of the population. The results of the responses of the people presented in the following table.

Noise Level	1	2	3	4	5
Frequencies	90	88	85	104	128

At $\alpha = 5\%$ significance level, test if there is a difference between the percentage of responses of residents about how they experience the noise level.

Goodness-of-fit test

► Example

The Weibull distribution with cumulative distribution function (cdf)

$$F(t) = 1 - e^{-(t/\beta)^\alpha}, \quad t > 0$$

contains as a special case for $\alpha = 2$ the Rayleigh distribution which is used to describe the error in the determination of the location of an item by its programmer. When the errors are analyzed in rectangular coordinate systems, they are described by two independent normal distributions with mean 0 and common standard deviation. A company that produces positioning devices, argues that the determination error (in meters) of the location that a new device presents when used in open area follows the Rayleigh distribution and at 50% of cases, the error is less than 0.832555 meters.

The following table presents the measurements of determination error (in meters) of the location in a random sample of 66 selected users of the new device.

Determining error	<0.3	0.3-0.5	0.5-0.7	0.7-0.9	0.9-1.1	>1.1
Frequencies	6	8	11	12	10	19

Based on the above data, check the validity of the company's claim.

Goodness-of-fit test

- ▶ When the X^2 test is applied to continuous variables, it is influenced by the grouping of the data. So, X^2 goodness of fit test is preferred when we have categorical variables with finite state space.

Goodness-of-fit test

► When the X^2 test is applied to continuous variables, it is influenced by the grouping of the data. So, X^2 goodness of fit test is preferred when we have categorical variables with finite state space.

In SpSS, we cannot apply X^2 goodness of fit test to continuous variables.

Goodness-of-fit test

► When the X^2 test is applied to continuous variables, it is influenced by the grouping of the data. So, X^2 goodness of fit test is preferred when we have categorical variables with finite state space.

In SpSS, we cannot apply X^2 goodness of fit test to continuous variables. In cases where continuous data is available, Kolmogorov - Smirnov test is preferable where it is based on the empirical cumulative distribution function.

Goodness-of-fit test

► When the X^2 test is applied to continuous variables, it is influenced by the grouping of the data. So, X^2 goodness of fit test is preferred when we have categorical variables with finite state space.

In SpSS, we cannot apply X^2 goodness of fit test to continuous variables. In cases where continuous data is available, Kolmogorov - Smirnov test is preferable where it is based on the empirical cumulative distribution function.

► The X^2 test can be applied even when the parameters of the population distribution are unknown. In this case the degrees of freedom of the statistical test are reduced according to the number of parameters under estimation.

Goodness-of-fit test

► When the X^2 test is applied to continuous variables, it is influenced by the grouping of the data. So, X^2 goodness of fit test is preferred when we have categorical variables with finite state space.

In SpSS, we cannot apply X^2 goodness of fit test to continuous variables. In cases where continuous data is available, Kolmogorov - Smirnov test is preferable where it is based on the empirical cumulative distribution function.

► The X^2 test can be applied even when the parameters of the population distribution are unknown. In this case the degrees of freedom of the statistical test are reduced according to the number of parameters under estimation.

The unknown parameters of the distribution are estimated by the observations and in this case the test statistic has the following form

$$X^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - \hat{E}_i)^2}{\hat{E}_i} \sim X_{k-1-r}^2$$

Goodness-of-fit test

► When the X^2 test is applied to continuous variables, it is influenced by the grouping of the data. So, X^2 goodness of fit test is preferred when we have categorical variables with finite state space.

In SpSS, we cannot apply X^2 goodness of fit test to continuous variables. In cases where continuous data is available, Kolmogorov - Smirnov test is preferable where it is based on the empirical cumulative distribution function.

► The X^2 test can be applied even when the parameters of the population distribution are unknown. In this case the degrees of freedom of the statistical test are reduced according to the number of parameters under estimation.

The unknown parameters of the distribution are estimated by the observations and in this case the test statistic has the following form

$$X^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - \hat{E}_i)^2}{\hat{E}_i} \sim X_{k-1-r}^2$$

and H_0 is rejected when $X^2 > X_{k-1-r, \alpha}$

Kolmogorov - Smirnov test

Empirical cumulative distribution function

Let $x_1, x_2, \dots, x_n$ be a random sample.

$$F_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n I(x_i \leq x)}{n}$$

Kolmogorov - Smirnov test

Empirical cumulative distribution function

Let $x_1, x_2, \dots, x_n$ be a random sample.

$$F_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n I(x_i \leq x)}{n}$$

If the sample is derived from the assumed distribution then the empirical cumulative distribution function should not differ significantly from the theoretical cdf.

Kolmogorov - Smirnov test

Empirical cumulative distribution function

Let $x_1, x_2, \dots, x_n$ be a random sample.

$$F_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n I(x_i \leq x)}{n}$$

If the sample is derived from the assumed distribution then the empirical cumulative distribution function should not differ significantly from the theoretical cdf.

It holds

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} |F_n(x) - F(x)| = 0\right) = 1, \quad \forall x$$

Kolmogorov - Smirnov test

Empirical cumulative distribution function

Let $x_1, x_2, \dots, x_n$ be a random sample.

$$F_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n I(x_i \leq x)}{n}$$

If the sample is derived from the assumed distribution then the empirical cumulative distribution function should not differ significantly from the theoretical cdf.

It holds

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} |F_n(x) - F(x)| = 0\right) = 1, \quad \forall x$$

Kolmogorov - Smirnov test is based on the observed differences of $F_n(x)$ and $F(x)$.

Kolmogorov - Smirnov test

$$D_n^+ = \sup\{F_n(x) - F(x)\}$$

$$D_n^- = \sup\{F(x) - F_n(x)\}$$

The test statistic is

$$\begin{aligned} D &= \sup\{|F_n(x) - F(x)|\} \\ &= \max\{D_n^+, D_n^-\} \end{aligned}$$

It is based on the maximum observed difference of the theoretical and the empirical cdf.

Kolmogorov - Smirnov test

Under H_0 , it holds

$$P(\sqrt{n} D < d) = 1 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} e^{-2i^2/d^2}, \quad 0 \leq d \leq 1$$

This is true for any theoretical distribution assumed.

Kolmogorov - Smirnov test

Under H_0 , it holds

$$P(\sqrt{n} D < d) = 1 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} e^{-2i^2/d^2}, \quad 0 \leq d \leq 1$$

This is true for any theoretical distribution assumed.

H_0 is rejected at significance level α if $D > D_{n,\alpha}$ where $D_{n,\alpha}$ the value of the corresponding table.

Kolmogorov - Smirnov test

Under H_0 , it holds

$$P(\sqrt{n} D < d) = 1 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} e^{-2i^2/d^2}, \quad 0 \leq d \leq 1$$

This is true for any theoretical distribution assumed.

H_0 is rejected at significance level α if $D > D_{n,\alpha}$ where $D_{n,\alpha}$ the value of the corresponding table.

► Kolmogorov - Smirnov test requires the theoretical distribution under the null hypothesis to be fully determined.

Kolmogorov - Smirnov test

Under H_0 , it holds

$$P(\sqrt{n} D < d) = 1 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} e^{-2i^2/d^2}, \quad 0 \leq d \leq 1$$

This is true for any theoretical distribution assumed.

H_0 is rejected at significance level α if $D > D_{n,\alpha}$ where $D_{n,\alpha}$ the value of the corresponding table.

► Kolmogorov - Smirnov test requires the theoretical distribution under the null hypothesis to be fully determined.

► If the theoretical distribution is not known, its parameters are estimated by the data. But in this case there are no tables to give the critical values so simulations are needed to identify them.

Kolmogorov - Smirnov test

Under H_0 , it holds

$$P(\sqrt{n} D < d) = 1 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} e^{-2i^2/d^2}, \quad 0 \leq d \leq 1$$

This is true for any theoretical distribution assumed.

H_0 is rejected at significance level α if $D > D_{n,\alpha}$ where $D_{n,\alpha}$ the value of the corresponding table.

► Kolmogorov - Smirnov test requires the theoretical distribution under the null hypothesis to be fully determined.

► If the theoretical distribution is not known, its parameters are estimated by the data. But in this case there are no tables to give the critical values so simulations are needed to identify them.

Example:

Test if the observations given in the file `KS1.sav` come from the normal distribution.

Test of independence

The chi-square test can also be used to test the hypothesis of independence of two variables of classification.

H₀ The variables A and B are independent

H₁ The variables A and B are dependent

Test of independence

The chi-square test can also be used to test the hypothesis of independence of two variables of classification.

H₀ The variables A and B are independent

H₁ The variables A and B are dependent

	B_1	B_1	$\cdots$	B_c
A_1	O_{11}	O_{12}	$\cdots$	O_{1c}
A_2	O_{21}	O_{22}	$\cdots$	O_{2c}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_r	O_{r1}	O_{r2}	$\cdots$	O_{rc}

Test of independence

The chi-square test can also be used to test the hypothesis of independence of two variables of classification.

H₀ The variables A and B are independent

H₁ The variables A and B are dependent

	B_1	B_1	$\dots$	B_c
A_1	O_{11}	O_{12}	$\dots$	O_{1c}
A_2	O_{21}	O_{22}	$\dots$	O_{2c}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_r	O_{r1}	O_{r2}	$\dots$	O_{rc}

H₀ The probability in the cell (i, j) is equal to the product of the probabilities to be in the group i of the variable A and in group j of the variable B

$$p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j} \quad \forall i, j$$

H₁ Not H_0 i.e. $p_{ij} \neq p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$, for at least one (i, j) .

Test of independence

The chi-square test can also be used to test the hypothesis of independence of two variables of classification.

H₀ The variables A and B are independent

H₁ The variables A and B are dependent

	B_1	B_1	$\dots$	B_c
A_1	O_{11}	O_{12}	$\dots$	O_{1c}
A_2	O_{21}	O_{22}	$\dots$	O_{2c}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_r	O_{r1}	O_{r2}	$\dots$	O_{rc}

H₀ The probability in the cell (i, j) is equal to the product of the probabilities to be in the group i of the variable A and in group j of the variable B

$$p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j} \quad \forall i, j$$

H₁ Not H_0 i.e. $p_{ij} \neq p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$, for at least one (i, j) .

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \sim \chi_{(r-1)(c-1)}^2$$

Test of independence

Example:

The aeronautical aluminum alloy 2024-73 and 2024-74 are often used in the fuselage and wings of the aircraft. During the repair of 250 damages in the fuselage and the wings of aircraft (a) the type of aluminum alloy used to manufacture, and (b) the type of failure were recorded.

Alloy	failure		
	fatigue	corrosion	crash
2024 - 73	47	76	27
2024 - 74	41	42	17

Is the type of failure independent of the type of alloy?

Test of Homogeneity

- ▶ It can be used to test whether different populations have the same percentage of people with the same characteristic
- ▶ $r \geq 2$ populations are divided into $c \geq 2$ groups based on some characteristic and examine if the rate of each group is the same across all populations.

H₀ The percentage of each group is the same across all populations

H₁ The percentage of at least one group is not the same across all populations

Test of Homogeneity

Example:

A telecommunication company has 5 factories that operate with the same specifications. In order to check the company if there is not any difference in the offered quality between the factories, it got a sample of phones manufactured and submitted to check in order to see how many of them are defective. The collected data are shown in the table below.

Factory	defective,	not defective
A	20	80
B	7	153
C	8	152
D	6	74
E	19	201

Test if the percentage of defective telephones is the same across the five factories.

Test for several proportions

The chi-square statistic for testing homogeneity is also applicable for testing the hypothesis that k binomial parameters have the same value

$$H_0 : p_1 = p_2 = \dots = p_k$$

Samples	1	2	...	k
successes	x_1	x_2	...	x_k
failures	$n_1 - x_1$	$n_2 - x_2$	...	$n_k - x_k$

► Compute the quantity

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \sim \chi_{k-1}^2 \text{ under } H_0$$

Test for several proportions

The chi-square statistic for testing homogeneity is also applicable for testing the hypothesis that k binomial parameters have the same value

$$H_0 : p_1 = p_2 = \dots = p_k$$

Samples	1	2	...	k
successes	x_1	x_2	...	x_k
failures	$n_1 - x_1$	$n_2 - x_2$	...	$n_k - x_k$

- Compute the quantity

$$X^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \sim \chi_{k-1}^2 \text{ under } H_0$$

- If $X^2 > \chi_{k-1, \alpha}^2$, then H_0 is rejected at $\alpha\%$ significance level.

Nonparametric Tests

Sign Test

Sign Test

► $H_0 : \delta_X - \delta_Y = 0$ vs $H_1 : \delta_X - \delta_Y \neq 0$

Test the equality of the medians of two continuous dependent random variables X and Y (paired samples)

Sign Test

► $H_0 : \delta_X - \delta_Y = 0$ vs $H_1 : \delta_X - \delta_Y \neq 0$

Test the equality of the medians of two continuous dependent random variables X and Y (paired samples)

Or equivalent

$$H_0 \quad p = 0.5 \text{ vs } H_1 \quad p \neq 0.5$$

where $p = P(X > Y)$.

Sign Test

► $H_0 : \delta_X - \delta_Y = 0$ vs $H_1 : \delta_X - \delta_Y \neq 0$

Test the equality of the medians of two continuous dependent random variables X and Y (paired samples)

Or equivalent

$$H_0 \quad p = 0.5 \text{ vs } H_1 \quad p \neq 0.5$$

where $p = P(X > Y)$.

Let

$$n_+ = \sum_{i=1}^n I(x_i > y_i), \quad n_- = \sum_{i=1}^n I(x_i < y_i)$$

$$R = \max\{n_+, n_-\}$$

Sign Test

► $H_0 : \delta_X - \delta_Y = 0$ vs $H_1 : \delta_X - \delta_Y \neq 0$

Test the equality of the medians of two continuous dependent random variables X and Y (paired samples)

Or equivalent

$$H_0 \quad p = 0.5 \text{ vs } H_1 \quad p \neq 0.5$$

where $p = P(X > Y)$.

Let

$$n_+ = \sum_{i=1}^n I(x_i > y_i), \quad n_- = \sum_{i=1}^n I(x_i < y_i)$$

$$R = \max\{n_+, n_-\}$$

Under H_0 , $R \sim \mathcal{B}(n, 0.5)$ thus $E(R) = n/2$ $Var(R) = n/4$.

Sign Test

► $H_0 : \delta_X - \delta_Y = 0$ vs $H_1 : \delta_X - \delta_Y \neq 0$

Test the equality of the medians of two continuous dependent random variables X and Y (paired samples)

Or equivalent

$$H_0 \quad p = 0.5 \text{ vs } H_1 \quad p \neq 0.5$$

where $p = P(X > Y)$.

Let

$$n_+ = \sum_{i=1}^n I(x_i > y_i), \quad n_- = \sum_{i=1}^n I(x_i < y_i)$$

$$R = \max\{n_+, n_-\}$$

Under H_0 , $R \sim \mathcal{B}(n, 0.5)$ thus $E(R) = n/2$ $Var(R) = n/4$.

The probability $P(R \geq r)$ can be computed.

Sign Test

► $H_0 : \delta_X - \delta_Y = 0$ vs $H_1 : \delta_X - \delta_Y \neq 0$

Test the equality of the medians of two continuous dependent random variables X and Y (paired samples)

Or equivalent

$$H_0 \quad p = 0.5 \text{ vs } H_1 \quad p \neq 0.5$$

where $p = P(X > Y)$.

Let

$$n_+ = \sum_{i=1}^n I(x_i > y_i), \quad n_- = \sum_{i=1}^n I(x_i < y_i)$$

$$R = \max\{n_+, n_-\}$$

Under H_0 , $R \sim \mathcal{B}(n, 0.5)$ thus $E(R) = n/2$ $Var(R) = n/4$.

The probability $P(R \geq r)$ can be computed.

If n is large then under H_0 , $R \sim \mathcal{N}(n/2, n/4)$

Sign Test

► $H_0 : \delta_X - \delta_Y = 0$ vs $H_1 : \delta_X - \delta_Y \neq 0$

Test the equality of the medians of two continuous dependent random variables X and Y (paired samples)

Or equivalent

$$H_0 \quad p = 0.5 \text{ vs } H_1 \quad p \neq 0.5$$

where $p = P(X > Y)$.

Let

$$n_+ = \sum_{i=1}^n I(x_i > y_i), \quad n_- = \sum_{i=1}^n I(x_i < y_i)$$

$$R = \max\{n_+, n_-\}$$

Under H_0 , $R \sim \mathcal{B}(n, 0.5)$ thus $E(R) = n/2$ $Var(R) = n/4$.

The probability $P(R \geq r)$ can be computed.

If n is large then under H_0 , $R \sim \mathcal{N}(n/2, n/4)$

In this case, the test statistic is

$$\frac{R - n/2 - 0.5}{\sqrt{n/4}} \sim \mathcal{N}(0.1)$$

Wilcoxon signed-rank test

Wilcoxon signed-rank test

► $H_0 : \delta_X - \delta_Y = 0$ vs $H_1 : \delta_X - \delta_Y \neq 0$

Wilcoxon signed-rank test

► $H_0 : \delta_X - \delta_Y = 0$ vs $H_1 : \delta_X - \delta_Y \neq 0$

Wilcoxon signed-rank test step by step:

1. Compute the ranks of the absolute differences $|x_i - y_i|$ ignoring the cases where $x_i - y_i = 0$.

Wilcoxon signed-rank test

► $H_0 : \delta_X - \delta_Y = 0$ vs $H_1 : \delta_X - \delta_Y \neq 0$

Wilcoxon signed-rank test step by step:

1. Compute the ranks of the absolute differences $|x_i - y_i|$ ignoring the cases where $x_i - y_i = 0$.
2. Compute the sums of the ranks S_p and S_n that correspond to positive and negative differences respectively.

Wilcoxon signed-rank test

► $H_0 : \delta_X - \delta_Y = 0$ vs $H_1 : \delta_X - \delta_Y \neq 0$

Wilcoxon signed-rank test step by step:

1. Compute the ranks of the absolute differences $|x_i - y_i|$ ignoring the cases where $x_i - y_i = 0$.
2. Compute the sums of the ranks S_p and S_n that correspond to positive and negative differences respectively.
3. If the sample size n is large, then

$$Z = \frac{\min\{S_n, S_p\} - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}} \sim N(0,1)$$

under H_0 .

Wilcoxon signed-rank test

► $H_0 : \delta_X - \delta_Y = 0$ vs $H_1 : \delta_X - \delta_Y \neq 0$

Wilcoxon signed-rank test step by step:

1. Compute the ranks of the absolute differences $|x_i - y_i|$ ignoring the cases where $x_i - y_i = 0$.
2. Compute the sums of the ranks S_p and S_n that correspond to positive and negative differences respectively.
3. If the sample size n is large, then

$$Z = \frac{\min\{S_n, S_p\} - \frac{n(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24} - \sum_{i=1}^L \frac{t_i^3 - t_i}{48}}} \sim N(0,1)$$

under H_0 .

L the number of cases that we have equal observations and t_i the number of observations with the same rank.

Wilcoxon signed-rank test

Example

To evaluate the results of the retraining seminar in engineers, 35 engineers were randomly selected and asked to answer a series of questions before and a month after the seminar. The scores are presented in the file entitled `seminar.sav`.

Test if there is a difference in the median performance of engineers before and after participation in the seminar.

Kruskal–Wallis Test

Kruskal–Wallis Test

► $H_0 : \delta_{X_1} = \delta_{X_2} = \dots = \delta_{X_k}$ and H_1 not H_0

Kruskal–Wallis Test

► $H_0 : \delta_{X_1} = \delta_{X_2} = \dots = \delta_{X_k}$ and H_1 not H_0

Kruskal–Wallis Test step by step

1. Compute the ranks of the observations assuming the k samples as one.

Kruskal–Wallis Test

► $H_0 : \delta_{X_1} = \delta_{X_2} = \dots = \delta_{X_k}$ and H_1 not H_0

Kruskal–Wallis Test step by step

1. Compute the ranks of the observations assuming the k samples as one.
2. Compute the sums of the ranks R_i , the number of observations n_i in each group and the quantity $T_i = t_i^3 - t_i$ in cases where they are observations with the same rank where t_i is the number of observations with the same rank.

Kruskal–Wallis Test

► $H_0 : \delta_{X_1} = \delta_{X_2} = \dots = \delta_{X_k}$ and H_1 not H_0

Kruskal–Wallis Test step by step

1. Compute the ranks of the observations assuming the k samples as one.
2. Compute the sums of the ranks R_i , the number of observations n_i in each group and the quantity $T_i = t_i^3 - t_i$ in cases where they are observations with the same rank where t_i is the number of observations with the same rank.
3. If n_i 's are large, i.e. $n_i > 5$.

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1) \sim \chi_{k-1}^2$$

under H_0 .

Kruskal-Wallis Test

► $H_0 : \delta_{X_1} = \delta_{X_2} = \dots = \delta_{X_k}$ and H_1 not H_0

Kruskal-Wallis Test step by step

1. Compute the ranks of the observations assuming the k samples as one.
2. Compute the sums of the ranks R_i , the number of observations n_i in each group and the quantity $T_i = t_i^3 - t_i$ in cases where they are observations with the same rank where t_i is the number of observations with the same rank.
3. If n_i 's are large, i.e. $n_i > 5$.

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1) \sim \chi_{k-1}^2$$

under H_0 .

In the case that they are observations with the same rank, the above quantity is corrected as follows

$$H' = \frac{H}{1 - \sum_{i=1}^L \frac{t_i^2(t_i - 1)}{N^2(N - 1)}}$$

where L is the number of cases that we have equal observations.

Kruskal–Wallis Test

Example:

The file `tires.sav` displays the results of laboratory measurements of the tread wear indicator (TWI) presenting the tires of three different companies when used under the same conditions.

Test, at a significance level of 5%, if there are differences between the tires of the three companies.

Run Test

► Randomness test

Run Test

- ▶ Randomness test

H_0 The sample is random H_1 The sample is not random

Run Test

- ▶ Randomness test

H_0 The sample is random H_1 The sample is not random

The random variable is of the form $\{0, 1\}$

Run Test

► Randomness test

H_0 The sample is random H_1 The sample is not random

The random variable is of the form $\{0, 1\}$

- defective or not defective product.
- component type A or Type B
- a characteristic above or below a value

Run Test

► Randomness test

H_0 The sample is random H_1 The sample is not random

The random variable is of the form $\{0, 1\}$

- defective or not defective product.
- component type A or Type B
- a characteristic above or below a value

If the population is expressed by a binary variable then the sample is a run sequence.

Run Test

► Randomness test

H_0 The sample is random H_1 The sample is not random

The random variable is of the form $\{0, 1\}$

- defective or not defective product.
- component type A or Type B
- a characteristic above or below a value

If the population is expressed by a binary variable then the sample is a run sequence.

Definition: In a symbol sequence of at least two types of symbols, run is called a sequence of the same symbol which is blocked by symbols of other type. The number of symbols of the run is called the length of the run.

Run Test

► Randomness test

H_0 The sample is random H_1 The sample is not random

The random variable is of the form $\{0, 1\}$

- defective or not defective product.
- component type A or Type B
- a characteristic above or below a value

If the population is expressed by a binary variable then the sample is a run sequence.

Definition: In a symbol sequence of at least two types of symbols, run is called a sequence of the same symbol which is blocked by symbols of other type. The number of symbols of the run is called the length of the run.

If the random variable is continuous then the sample is a device of real numbers, but it can be converted to a run sequence.

Run Test

► Randomness test

H_0 The sample is random H_1 The sample is not random

The random variable is of the form $\{0, 1\}$

- defective or not defective product.
- component type A or Type B
- a characteristic above or below a value

If the population is expressed by a binary variable then the sample is a run sequence.

Definition: In a symbol sequence of at least two types of symbols, run is called a sequence of the same symbol which is blocked by symbols of other type. The number of symbols of the run is called the length of the run.

If the random variable is continuous then the sample is a device of real numbers, but it can be converted to a run sequence.

A symbol is associated with each sample depending on whether or not it is greater than the median or the mean. Price equal to the median or the average is omitted.

Run Test

0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, ...

Run Test

0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, ...

H_0 The sample is random H_1 The sample is not random

Run Test

0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, ...

H_0 The sample is random H_1 The sample is not random

If the sample is not random then there are trends expressed with symbol accumulations and either the number of runs is small but their length is large, or there are symbol recycling expressed by systematic variations of symbols and the number of runs is very large.

Run Test

0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, ...

H_0 The sample is random H_1 The sample is not random

If the sample is not random then there are trends expressed with symbol accumulations and either the number of runs is small but their length is large, or there are symbol recycling expressed by systematic variations of symbols and the number of runs is very large.

So according to the above we reject the null hypothesis, if the number of runs is very small or very large.

Run Test

0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, ...

H₀ The sample is random **H₁** The sample is not random

If the sample is not random then there are trends expressed with symbol accumulations and either the number of runs is small but their length is large, or there are symbol recycling expressed by systematic variations of symbols and the number of runs is very large.

So according to the above we reject the null hypothesis, if the number of runs is very small or very large.

► Let R_0 and R_1 the number of 0 and 1 runs and n_0 and n_1 the number of the corresponding symbols in the sample.

Run Test

0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, ...

H₀ The sample is random **H₁** The sample is not random

If the sample is not random then there are trends expressed with symbol accumulations and either the number of runs is small but their length is large, or there are symbol recycling expressed by systematic variations of symbols and the number of runs is very large.

So according to the above we reject the null hypothesis, if the number of runs is very small or very large.

► Let R_0 and R_1 the number of 0 and 1 runs and n_0 and n_1 the number of the corresponding symbols in the sample.

H₀ is rejected at significance level $\alpha\%$ if

$$P(R \leq k_1) = \alpha/2 \text{ or } P(R \geq k_2) = \alpha/2$$

where $R = R_0 + R_1$,

k_1 and k_2 the corresponding values in the tables of this test.

$$\mu_R = E(R) = \frac{2n_0n_1}{n_0 + n_1} + 1$$

$$\sigma_R^2 = Var(R) = \frac{2n_0n_1(2n_0n_1 - n_0 - n_1)}{(n_0 + n_1)^2(n_0 + n_1 - 1)}$$

Run Test

0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, ...

H₀ The sample is random **H₁** The sample is not random

If the sample is not random then there are trends expressed with symbol accumulations and either the number of runs is small but their length is large, or there are symbol recycling expressed by systematic variations of symbols and the number of runs is very large.

So according to the above we reject the null hypothesis, if the number of runs is very small or very large.

► Let R_0 and R_1 the number of 0 and 1 runs and n_0 and n_1 the number of the corresponding symbols in the sample.

H₀ is rejected at significance level $\alpha\%$ if

$$P(R \leq k_1) = \alpha/2 \text{ or } P(R \geq k_2) = \alpha/2$$

where $R = R_0 + R_1$,

k_1 and k_2 the corresponding values in the tables of this test.

$$\mu_R = E(R) = \frac{2n_0n_1}{n_0 + n_1} + 1$$

$$\sigma_R^2 = \text{Var}(R) = \frac{2n_0n_1(2n_0n_1 - n_0 - n_1)}{(n_0 + n_1)^2(n_0 + n_1 - 1)}$$

$$Z = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \sim N(0, 1)$$

Run Test

► Example.

During a laboratory experiment, the friction coefficient between two metals was measured. The results are presented in the following table.

0.59	0.61	0.56	0.58	0.60	0.52	0.54
0.53	0.51	0.62	0.58	0.61	0.57	0.56
0.63	0.62	0.55	0.51	0.50	0.61	0.57
0.55	0.53	0.49	0.62	0.63	0.60	0.53

The head of the laboratory suspects that measurements shots were not correct and therefore wants to examine whether the measures can be considered random or not. With the help of the median, test if there are significant indications at significance levels $\alpha = 0.05\%$ that the measurements can not be considered random.