$$\boxed{\bar{x}' = P(t)\,\bar{x}}\quad , \quad \bar{x} = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T_{n\times 1}$$ να1

$$P(t)_{n\times n} = (p_{ij}(t)),\quad i,j = 1,\dots,n$$

Γραμμικό μή αυτόνομο σύστημα Δ.Ε (ομογενές)

$n=2$ $\quad x_1 = x,\quad x_2 = y$

$$\begin{cases} x' = c(t)\,x + d(t)\,y \\ y' = a(t)\,x + b(t)\,y \end{cases}$$

ή

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c(t) & d(t) \\ a(t) & b(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ αυτόνομο}\right)$$

---

1. Αν γνωρίζουμε τη λύση (Θεμελιώδης πίνακας) υπολογίζουμε τον πίνακα συντελεστών $P(t)_{2\times 2}$

Ισχύει ότι: $\dfrac{d\Phi}{dt} = P\cdot\Phi \Rightarrow P = \dfrac{d\Phi}{dt}\Phi^{-1}$

Φ μη ιδιάζον (Θεμελιώδης $\to \det\Phi \neq 0$) $\Rightarrow \exists\ \Phi^{-1}$.

π.χ $\quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1+t^2 & t \end{pmatrix} \to \det\Phi = -1$. Άρα:

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} t & -1 \\ -(1+t^2) & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1+t^2 & -t \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2t & 1 \end{pmatrix}.$$ Έτσι

$$P = \frac{d\phi}{dt}\phi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1+t^2 & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1-t^2 & t \end{pmatrix}$$

δηλαδή το σύστημα που έχει θεμελιώδη πίνακα τον $\phi(t)$ είναι:

$$\left\{\begin{aligned} x'(t) &= -t\,x + y \\ y'(t) &= (1-t^2)x + t\,y \end{aligned}\right\}$$ (γραμμικό μη αυτόνομο, ομογενές)

---

2. Επίλυση <u>γραμμικού αυτόνομου ομογενούς συστήματος μέσω αναγωγής σε μία λODE2</u>

$$\ast \left\{\begin{aligned} x' &= -tx + y \\ y' &= (1-t^2)x + ty \end{aligned}\right\}$$ (το σύστημα παραπάνω)

Για την πρώτη εξίσωση έχουμε:
(μπορούμε εναλλακτικά να δουλέψουμε ισοδύναμα με τη δεύτερη)

$$\underset{\smile}{x'} = -t\,x + y \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \underline{x''} = -x - t\,x' + y'$$

Με σκοπό να πάρουμε την <u>ισοδύναμη x-εξίσωση 2ης τάξης</u>, αντικαθιστούμε αρχικά τη δεύτερη για y':

$$x'' = -\cancel{x} - t\,x' + \underbrace{\cancel{(1-t)^2 x} + t\,y}$$

και κατόπιν το y από την πρώτη:

$\underline{y} = x' + tx$, δηλαδή

$$\left.\begin{array}{l} x'' = -\cancel{tx'} - \cancel{t^2 x} + \cancel{tx'} + \cancel{t^2 x} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = c_1 t + c_2 \\ y = c_1 + c_2 t + c_1 t^2 \end{array} \Big\} \to$$

πα3

$$\boxed{\begin{array}{l} x = c_1 t + c_2 \\ y = c_1(1+t^2) + c_2 t \end{array}}$$

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1+t^2 & t \end{pmatrix}, \quad \det \Phi = -1$$

θεμελιώδης πίνακας.

1/ $$\left\{\begin{array}{l} x' = \frac{1}{t}x + y \\ y' = -\frac{2}{t^2}x + \frac{1}{t}y \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x' = \frac{1}{t}x + y \\ x'' = -\frac{1}{t^2}x + \frac{1}{t}x' + y' \end{array}\right\} \to$$

$$\left.\begin{array}{l} x' = \frac{1}{t}x + y \\ x'' = -\cancel{\frac{1}{t^2}x} + \frac{1}{t}x' - \frac{\cancel{2}^{\,3}}{t^2}x + \frac{1}{t}y \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = x' - \frac{1}{t}x \\ x'' = \frac{1}{t}x' - \frac{3}{t^2}x \\ \quad + \frac{1}{t}x' - \frac{1}{t^2}x \end{array} \Big\} \to$$

$$\left.\begin{array}{l} y = x' - \frac{1}{t}x \\ x'' = \frac{2}{t}x' - \frac{4}{t^2}x \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = x' - \frac{1}{t}x \\ \underline{t^2 x'' - 2tx' + 4x = 0} \end{array} \xrightarrow{\text{Euler equation}}$$

$\underline{\text{Euler eqn.}}$: $t = e^z \to z = \ln t$, $x(t) = w[z(t)] \to$

$$w''_{zz} - 3w'_z + 4w = 0 \xrightarrow{\text{χ.ε}} \underline{\lambda^2 - 3\lambda + 4 = 0}, \quad \Delta = -7$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

πα4

$$x = c_1 t^{3/2}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\ln t\right) + c_2 t^{3/2}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\ln t\right)$$

$$y = \left(x' - \frac{1}{t}x\right) = \dots \longrightarrow$$

$$y = c_1\frac{t^{1/2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\ln t\right) - \sqrt{7}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\ln t\right)\right]$$

$$+ c_2\frac{t^{1/2}}{2}\left[\sqrt{7}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\ln t\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\ln t\right)\right]$$

$$\left\{\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= \frac{4}{t^2}x - \frac{1}{t}y \end{aligned}\right\} \rightarrow \dots\dots \; \Phi(t) = \begin{pmatrix} t^2 & \frac{1}{t^2} \\ 2t & -\frac{2}{t^3} \end{pmatrix}$$

Αντίστροφα: Αν δοθεί ο θεμελιώδης πίνακας $\Phi(t)$, βρείτε τον πίνακα συντελεστών του συστήματος, δηλαδή

$$P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4}{t^2} & -\frac{1}{t} \end{pmatrix}.$$

- Επιλύστε τα μη αυτόνομα συστήματα:

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{4}{t}x + \frac{6}{t^2}y \\ y' &= x \end{aligned}\right\} \qquad \left\{\begin{aligned} t x' &= x + y \\ t y' &= -3x + 5y \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned}$$

Αν το γραμμικό μη αυτόνομο σύστημα Δ.Ε είναι <u>μη ομογενές</u>, επιλύεται μέσω της <u>μεθόδου Lagrange</u> (μεταβολή των παραμέτρων).

<u>π.χ</u>

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{2}{t}x + \dfrac{2}{t}y + t \\ y' = -\dfrac{1}{t}x - \dfrac{5}{t}y + t^2 \end{cases}$$

Το αντίστοιχο <u>ομογενές</u> είναι:

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{2}{t}x + \dfrac{2}{t}y \\ y' = -\dfrac{1}{t}x - \dfrac{5}{t}y \end{cases}$$

Επιλύεται με <u>αναγωγή σε εξίσωση 2ης τάξης</u>:

$$x'' = \frac{2}{t^2}x - \frac{2}{t}x' - \frac{2}{t^2}y + \frac{2}{t}y'$$

$$= \cancel{\frac{2}{t^2}x} - \frac{2}{t}x' - \cancel{\frac{2}{t^2}y} - \cancel{\frac{2}{t^2}x} - \frac{\cancel{10}\,12}{t^2}y$$

$$y = \frac{t}{2}\left(x' + \frac{2}{t}x\right) = \frac{t}{2}x' + x$$

$$\rightarrow$$

$$x'' = -\frac{2}{t}x' - \frac{12}{t^2}\left(\frac{t}{2}x' + x\right)$$

$$= -\cancel{\frac{2}{t}x'} - \frac{\cancel{6}\,8}{t}x' - \frac{12}{t^2}x$$

ή

$$x'' + \frac{8}{t}x' + \frac{12}{t^2}x = 0 \longrightarrow t^2x'' + 8tx' + 12x = 0$$

Εξίσωση Euler:

$$t = e^{z} \rightarrow z = \ln t, \quad x(t) = w[z(t)] \longrightarrow$$

$$w''_{zz} + 7 w'_{z} + 12 w = 0 \xrightarrow{\text{χ.ε}} \underline{\lambda^2 + 7\lambda + 12 = 0} \quad \Delta = 1$$

$$\underline{\lambda_{1,2}} = \frac{-7 \pm 1}{2} = \left\langle \begin{array}{l} -3 \\ -4 \end{array} \right. \longrightarrow$$

$$\underline{x(t)} = c_1 t^{-3} + c_2 t^{-4} \xrightarrow{y = \frac{t}{2} x' + x}$$

$$\underline{y(t)} - \frac{c_1}{2} t^{-3} - c_2 t^{-4}.$$

Μη ομογενής: $\Phi(t) = \begin{pmatrix} t^{-3} & t^{-4} \\ -\frac{t^{-3}}{2} & -t^{-4} \end{pmatrix}$, $\det \Phi = -\frac{t^{-7}}{2}$

Μερική λύση: $\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$: $\Phi \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} f_1(t) = 2 \int (t^4 + t^5)\,dt = \frac{2}{5} t^5 + \frac{t^6}{3} \\ f_2(t) = \int (-2t^6 - t^5)\,dt = -\frac{2}{7} t^7 - \frac{t^6}{6} \end{array} \right\} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \Phi(t) \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \longrightarrow \ldots$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) = c_1 t^{-3} + c_2 t^{-4} + \frac{7}{30} t^2 + \frac{1}{21} t^3 \\ y(t) = -\frac{c_1}{2} t^{-3} - c_2 t^{-4} - \frac{1}{30} t^2 + \frac{5}{42} t^3 \end{array}}$$

Λύσεις μέσω ολοκληρώσιμων συνδυασμών – Μη γραμμικά συστήματα

Έστω το γραμμικό σύστημα (αυτόνομο)

$$\left\{\begin{array}{l} x' = y \\ y' = x \end{array}\right\}$$

Με τη μέθοδο των ιδιοτιμών – ιδιοδιανυσμάτων έχουμε

$$\bar{x}' = P\bar{x}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{χ.ε } \lambda^2 - 1 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 1$$

με ιδν. $\bar{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \Phi(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} & e^t \\ e^{-t} & e^t \end{pmatrix}$:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = -c_1 e^{-t} + c_2 e^t \\ y = c_1 e^{-t} + c_2 e^t . \end{array}} \qquad (*)$$

Επιπρόσθετα, προσθέτοντας και αφαιρώντας τις εξισώσεις του συστήματος, έχουμε

$$x' + y' = x + y \longrightarrow (x+y)' = x + y \longrightarrow$$

$$\frac{d(x+y)}{x+y} = dt \xrightarrow{\int}$$

$$x + y = A e^t$$

$$x' - y' = -(x-y) \longrightarrow$$

$$(x-y)' = -(x-y) \longrightarrow$$

$$\frac{d(x-y)}{x-y} = -dt \xrightarrow{\int}$$

$$x - y = B e^{-t}$$

δηλαδή

$$\left.\begin{array}{l} x + y = A e^t \\ x - y = B e^{-t} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{\oplus} x = \frac{1}{2}\left(B e^{-t} + A e^t\right) \\ \xrightarrow{\ominus} y = \frac{1}{2}\left(-B e^{-t} + A e^t\right) \end{array}$$

ίδια με την $(*)$ θέτοντας $B = -2c_1$, $A = 2c_2$.

δηλαδή η λύση προέκυψε ολοκληρώνοντας συνδυασμούς των εξισώσεων του συστήματος, και καταλήγοντας σε ένα επιλύσιμο ως προς x και y σύστημα:

$$\left.\begin{aligned}(x+y)e^{-t}&=A\\(x-y)e^{t}&=B\end{aligned}\right.\quad , A, B \in R$$

Ας θεωρήσουμε τώρα το <u>μη γραμμικό</u> σύστημα (<u>μη αυτόνομο</u>):

$$\left\{\begin{aligned}x'&=2t(x^2+y^2)\\y'&=4txy\end{aligned}\right\} \xrightarrow[\ominus]{\oplus} \left.\begin{aligned}(x+y)'&=2t(x+y)^2\\(x-y)'&=2t(x-y)^2\end{aligned}\right\} \xrightarrow{\int}$$

$$\left.\begin{aligned}-(x+y)^{-1}&=t^2+\bar{c}_1\\-(x-y)^{-1}&=t^2+\bar{c}_2\end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned}\frac{1}{x+y}+t^2&=c_1\\\frac{1}{x-y}+t^2&=c_2\end{aligned}\right\} \begin{aligned}G_1(x,y,t)&=c_1\\G_2(x,y,t)&=c_2\end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις $G_i(x,y,t)$, $i=1,2$ ορίζονται στην περιοχή $\Omega \subset R^3 : \{(x,y,t) : x+y \neq 0,\ x-y \neq 0\}$. Καθώς ενδιαφέρει η επιλυσιμότητα του συστήματος $G_1=c_1$, $G_2=c_2$, εξετάζουμε την Ιακωβιανή ορίζουσα

$$\frac{\partial(G_1,G_2)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} G_{1,x} & G_{1,y} \\ G_{2,x} & G_{2,y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{(x+y)^2} & -\frac{1}{(x+y)^2} \\ -\frac{1}{(x-y)^2} & \frac{1}{(x-y)^2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{(x^2-y^2)^2} \neq 0$$

στο Ω

Το "διάφορο του μηδενός" της $\dfrac{\partial(G_1, G_2)}{\partial(x, y)}$ εξασφαλίζει (ικανή συνθήκη) τό ότι τό σύστημα έχει μοναδική λύση ως προς τα $x(t)$, $y(t)$, είτε σε πεπλεγμένη μορφή (το ίδιο το σύστημα), είτε σε λελυμένη μορφή, όπως στο συγκεκριμένο παράδειγμα:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}\,\frac{c_1 + c_2 - 2t^2}{(c_1 - t^2)(c_2 - t^2)} \\ y(t) &= \frac{1}{2}\,\frac{c_2 - c_1}{(c_1 - t^2)(c_2 - t^2)} \end{aligned}}$$

π.χ για το Π.Α.Τ $(x(1), y(1)) = (1, 2) \rightarrow$

$c_1 = \frac{4}{3}$, $c_2 = 0$ και έχουμε:

$$x = -\frac{3t^2 - 2}{t^2(3t^2 - 4)}, \quad y = -\frac{2}{t^2(3t^2 - 4)}$$

Στο προηγούμενο γραμμικό σύστημα ($x' = y$, $y' = x$, σ. πα7) έχουμε $G_1(x, y, t) = (x + y)e^{-t}$, $G_2(x, y, t) = (x - y)e^{t}$ και

$$\frac{\partial(G_1, G_2)}{\partial(x, y)} = \det\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ e^{t} & -e^{t} \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$
