Διαφορικές Εξισώσεις

Ενότητα: Γραμμικά συστήματα ODEs 3x3, 4x4 1ης τάξης με εκφυλισμένες ιδιοτιμές

Μιχαήλ Μαρκάκης
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα ΗΜΤΥ

1. Σκοποί ενότητας

Σκοποί της παρούσας ενότητας είναι η πληρέστερη κατανόηση-εμβάθυνση στη μελέτη συστημάτων διαφορικών εξισώσεων με εκφυλισμένες ιδιοτιμές μέσα από εφαρμογές (παραδείγματα) σε γραμμικά συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ODEs) 1^{ης} τάξης και διαστάσεις 3x3 και 4x4.

2. Περιεχόμενα ενότητας

Η ενότητα περιέχει δυο συστήματα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 1^{ης} τάξης, ένα διάστασης 3x3 κι ένα διάστασης 4x4. Αμφότερα συστήματα έχουν εκφυλισμένες ιδιοτιμές και στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται ένας ενδεικτικός τρόπος αντιμετώπισης (επίλυσης) τέτοιων περιπτώσεων.

3.1. Σύστημα ODEs 3x3

$$\boxed{\overline{x}' = P\overline{x}},\ P = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix},\ \overline{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

3.1.1. Διαδικασία προσδιορισμού ιδιοτιμών λ_i

$$P - \lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 6 & 6 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ -1 & -5 & -2-\lambda \end{pmatrix} \to (-1) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3-\lambda & 2 & \\ 4-\lambda & 6 & 6 & \lambda-4 \\ -1 & -5 & -2-\lambda & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & -(\lambda-1)(\lambda-6) & 2(\lambda-1) \\ 0 & -(\lambda+2) & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda\neq 1}$$

$$(-1)^2(\lambda-1) \begin{pmatrix} 1 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 6-\lambda & 2 \\ 0 & \lambda+2 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\left(\frac{\lambda+2}{\lambda-6}\right) x(\text{δεύτερη γραμμή})+(\text{τρίτη γραμμή})]{\lambda\neq 6}$$

$$(\lambda-1) \begin{pmatrix} 1 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 6-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & \dfrac{(\lambda-2)^2}{\lambda-6} \end{pmatrix} \to$$

$$\det\left(P-\lambda I\right)=-\left(\lambda-1\right)\left(\lambda-2\right)^2=0.$$

Συνεπώς, οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ (διπλή)

3.1.2. Διαδικασία προσδιορισμού ιδιοδιανυσμάτων

<u>Ιδιοδιανύσματα</u>: $\left(P-\lambda I\right)\overline{\xi}=\overline{0}$:

$\boxed{\lambda_1=1}$:

$$\begin{pmatrix}1&2&2\\0&3&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\overline{\xi}_1=s\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix}\xrightarrow{s=1}\overline{\xi}_1=\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda_2=2}$:

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\0&4&2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\overline{\xi}_2=s\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}\xrightarrow{s=1}\overline{\xi}_2=\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}$$

Η (διπλή) ιδιοτιμή λ_2 είναι <u>εκφυλισμένη</u> $\to$

1 γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα, $\overline{n}$:

$\left(P-\lambda I\right)\overline{n}=\overline{\xi}_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&6&6&3\\1&1&2&1\\-1&-5&-4&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\2&6&6&3\\-1&-5&-4&-2\end{array}\right)\begin{array}{|l}\\-2\to\\1\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \overline{n} = s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{s=0}$$

$\overline{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \to$ <u>Δεύτερη θεμελιώδης λύση</u> της λ_2:

$$e^{2t}\left(\overline{n} + t\overline{\xi}_2\right)$$

<u>Θεμελιώδης πίνακας</u>:

$$\Phi(t) = \left(e^{\lambda_1 t}\overline{\xi}_1, e^{\lambda_2 t}\overline{\xi}_2, e^{\lambda_2 t}\left(\overline{n} + t\overline{\xi}_2\right)\right) = \begin{pmatrix} 4e^t & 3e^{2t} & 3te^{2t} \\ e^t & e^{2t} & te^{2t} \\ -3e^t & -2e^{2t} & \left(\frac{1}{2} - 2t\right)e^{2t} \end{pmatrix}$$

ή **<u>Γενική λύση συστήματος</u>**: $\overline{x} = \Phi\overline{c}$:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{t} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 3t \\ t \\ \frac{1}{2} - 2t \end{pmatrix}$$

3.2. Σύστημα ODEs 4x4

$$\boxed{y^{(4)} + 2y'' + y = 0, \quad y = y(t)}$$

$$\overline{x} = \left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)^T = \left(y, y', y'', y'''\right) \rightarrow$$

<u>Ισοδύναμο σύστημα ODEs 1:</u>

$$\boxed{\overline{x}' = P\overline{x}}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathrm{x}} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}$$

3.2.1. Διαδικασία προσδιορισμού ιδιοτιμών λ_i

$$P-\lambda I=\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & 1\\ -1 & 0 & -2 & -\lambda\end{pmatrix}\rightarrow(-1)\left.\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2 & -\lambda\\ 0 & -\lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & 1\\ -\lambda & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\right|_{-\lambda}\rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2 & -\lambda\\ 0 & -\lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & 1\\ 0 & 1 & 2\lambda & \lambda^2\end{pmatrix}\rightarrow(-1)^2\left.\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2 & -\lambda\\ 0 & 1 & 2\lambda & \lambda^2\\ 0 & 0 & -\lambda & 1\\ 0 & -\lambda & 1 & 0\end{pmatrix}\right|_{\lambda}\rightarrow$$

$$\left.\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2 & -\lambda\\ 0 & 1 & 2\lambda & \lambda^2\\ 0 & 0 & -\lambda & 1\\ 0 & 0 & 2\lambda^2+1 & \lambda^3\end{pmatrix}\right|_{\frac{2\lambda^2+1}{\lambda}}\xrightarrow{\lambda\neq 0}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2 & -\lambda\\ 0 & 1 & 2\lambda & \lambda^2\\ 0 & 0 & -\lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\left(\lambda^2+1\right)^2}{\lambda}\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\det(P-\lambda I)=\left(\lambda^2+1\right)^2=0\Rightarrow$$

Ιδιοτιμές: $\boxed{\lambda_{1,2} = \pm i}$ (διπλές - διπλό ζεύγος).

3.2.2. Διαδικασία προσδιορισμού ιδιοδιανυσμάτων

Ιδιοδιανύσματα: $(P - \lambda I)\bar{\xi} = \bar{0}$:

$\boxed{\lambda_1 = i}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & -i \\ 0 & 1 & 2i & -1 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{\xi}_1 = \bar{0} \rightarrow \bar{\xi}_1 = s \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{s=1} \bar{\xi}_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

λ_1 εκφυλισμένη ($\lambda_{1,2}$ εκφυλισμένο ζεύγος) $\rightarrow$

γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα $\bar{n}$: $(P - \lambda I)\bar{n} = \bar{\xi}_1$:

$$\left\| \left(\begin{array}{cccc|c} -i & 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i & 1 & -i \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \right\| \begin{matrix} \\ \\ \\ i \end{matrix} \rightarrow \left\| \left(\begin{array}{cccc|c} -i & 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i & 1 & -i \\ 0 & i & -2 & -i & 0 \end{array} \right) \right\| \begin{matrix} \\ \\ \\ 1 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -i & 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i & 1 & -i \\ 0 & 0 & -1 & -i & -1 \end{array}\right)\Bigg|_i \to \left(\begin{array}{cccc|c} -i & 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\overline{n} = s\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{s=0} \overline{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to$$

<u>Δεύτερη θεμελιώδης λύση της</u> λ_1 : $e^{it}\left(\overline{n} + t\overline{\xi_1}\right)$:

Άρα: <u>2 πραγματικές θεμελιώδεις λύσεις</u> από $e^{it}\overline{\xi_1}$:

$$\left(\cos t + i\sin t\right)\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = \overline{v}_1 + i\overline{v}_2$$

και <u>2 πραγματικές θεμελιώδεις</u> από $e^{it}\left(\overline{n} + t\overline{\xi_1}\right)$:

$$\left(\cos t + i\sin t\right)\begin{pmatrix} -3+it \\ -t-2i \\ 1-it \\ t \end{pmatrix} = \overline{v}_3 + i\overline{v}_4$$

<u>**Θεμελιώδης πίνακας**</u>:

$$\Phi(t) = \left(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t & -3\cos t - t\sin t & t\cos t - 3\sin t \\ -\cos t & -\sin t & -t\cos t + 2\sin t & -2\cos t - t\sin t \\ \sin t & -\cos t & \cos t + t\sin t & -t\cos t + \sin t \\ \cos t & \sin t & t\cos t & t\sin t \end{pmatrix}$$

ή <u>**Γενική λύση συστήματος**</u>: $\overline{x} = \Phi\overline{c}$:

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ y'''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = c_1\overline{v}_1 + c_2\overline{v}_2 + c_3\overline{v}_3 + c_4\overline{v}_4$$

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Μιχαήλ Μαρκάκης, Επίκουρος Καθηγητής, 2015.. «Διαφορικές Εξισώσεις. Περιπτώσεις συστημάτων ODEs $1^{ης}$ τάξης με εκφυλισμένες ιδιοτιμές». Έκδοση: 1.0. Πάτραι 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: σύνδεσμο μαθήματος.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».

[1] http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.