Αυτόνομα γραμμικά συστήματα Δ.Ε $1^{ης}$ τάξης $(n=2)$ - Τροχιές φάσεων - Χαρακτηρισμός του σημείου $(0,0)$

Όπως είδαμε στη Θεωρία των συστημάτων Δ.Ε (Συστήματα Δ.Ε - Θεμελιώδεις Έννοιες), γιά ένα σύστημα

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}), \quad \bar{x} = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T, \quad \bar{f}: R^n \to R^n$$

$$\bar{f} = (f_1(\bar{x}), \dots, f_n(\bar{x}))^T, \quad f_i : R^n \to R, \quad i = 1, \dots, n$$

- ο χώρος φάσεων (χώρος κατάστασης) είναι ο χώρος των μεταβλητών φάσης (κατάστασης) $(x_1, \dots, x_n)$. Πρώτο ολοκλήρωμα του συστήματος καλείται μία συνάρτηση $F(x_1, \dots, x_n) : R^n \to R$, όπου η τροχιακή της παράγωγος ως προς το σύστημα είναι μηδέν $\left(d_t F = \frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{,x_k} f_k = 0 \right)$, ή αλλοιώς η εξίσωση $F(x_1, \dots, x_n) = \Gamma =$ σταθερά, επαληθεύει το σύστημα (γι' αυτό και το πρώτο ολοκλήρωμα ονομάζεται και σταθερά της κίνησης - μία αμετάβλητη ποσότητα κατά τη ροή του συστήματος ως προς το χρόνο). Η οικογένεια των καμπύλων $F=\Gamma$ (ισοϋψείς του πρώτου ολοκληρώματος στον $n+1$ - διάστατο χώρο) ονομάζεται ολοκληρωτική πολλαπλότητα του συστήματος.

Οι προβολές τώρα στο n-διάστατο χώρο φάσεων, των καμπύλων της οικογένειας $F=\Gamma$, καλούνται τροχιές φάσης του συστήματος και έχουν προφανώς την εξίσωση $F(x_1, \dots, x_n) = \Gamma =$ σταθερά (Ε.Τ.Φ - Εξίσωση Τροχιών Φάσης, από δώ και κάτω), όπου για κάθε μία, η σταθερά Γ υπολογίζεται από τις εκάστοτε Α.Σ: $(x_{10}, \dots, x_{n0}) = (x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))$.

Επίσης, οι λύσεις του αλγεβρικού συστήματος

$$\bar{f}(\bar{x}) = \bar{0} \Rightarrow f_i(x_1,\ldots,x_n) = 0 \ , \quad i = 1,\ldots,n$$

έστω $(x_1^0,\ldots,x_n^0)$, καλούνται σημεία ισορροπίας του συστήματος (οι παράγωγοι $\dot{x}_i$ σε αυτά είναι μηδέν). Είναι προφανές ότι γιά ένα γραμμικό σύστημα

$$\dot{\bar{x}} = P\bar{x} \ , \quad P = (a_{ij})_{n\times n} \ , \quad i,j = 1,\ldots,n$$

το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι το $(0,\ldots,0)$, δηλαδή η αρχή των αξόνων του χώρου φάσεων.

$\boxed{n=2}$ 2ps

Έστω τώρα το σύστημα 2 μεταβλητών

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad A,B,C,D \in R \qquad (1)$$

Το σημείο ισορροπίας του είναι το $(0,0)$. Διαιρώντας τις δύο εξισώσεις κατά μέλη έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Ax+By}{Cx+Dy} \qquad (2)$$

Ο αριθμητής και παρανομαστής είναι ομογενείς συναρτήσεις των x, y, πρώτου βαθμού. Γενικότερα, όταν έχουμε Δ.Ε της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}, \quad P, Q \text{ ομογενείς συναρτήσεις των } x,y, \text{ ίδιου βαθμού},$$

μέσω της γνωστής μεθοδολογίας ($y = x\,\omega(x)$) καταλήγουμε σε εξίσωση χωριζ. μεταβλ., η ολοκλήρωση της οποίας δίνει

$$\ln \kappa |x| = \int \frac{P(1,\omega)}{Q(1,\omega) - \omega P(1,\omega)} d\omega, \quad \omega = \frac{y}{x} \qquad (3)$$

με $\kappa > 0$ σταθερά ολοκλήρωσης. Έτσι, αντικαθιστώντας στην (3) $P(x,y) = Cx+Dy$, $Q(x,y) = Ax+By$, παίρνουμε

$$\boxed{\ln \kappa |x| = \int \frac{C + D\omega}{A + (B-C)\omega - D\omega^2} d\omega} \qquad (4a)$$

ή θέτοντας

$$u = C + Dw = \frac{Cx + Dy}{x}, \quad D \neq 0$$

$$\boxed{\ln k|x| = -\int \frac{u\,du}{u^2 - (B+C)u + BC - AD}} \qquad (4b)$$

Από τις (4) ((4a) ή (4b)), προκύπτει η <u>**Ε.Τ.Φ**</u> του συστήματος (1). <u>Παρατηρούμε</u> ότι ο παρανομαστής στο 2^o μέλος της (4b) είναι το 1^o μέλος της χαρακτηριστικής εξίσωσης του πίνακα συντελεστών $P_{2\times 2}$ του συστήματος $(\det(P - \lambda I))$ και άρα μπορεί να γραφεί ως

$$(u - \lambda_1)(u - \lambda_2) \qquad (5)$$

με λ_1, λ_2 τις ιδιοτιμές του P. (Η (5) γράφεται $(u-\lambda)^2$ σε περίπτωση <u>διπλής</u> ιδιοτιμής και $(u - r)^2 + \omega^2$ σε περίπτωση <u>μιγαδικού ζεύγους</u> $r \pm i\omega$).

Παρακάτω, κατά περίπτωση λύσης του (1), δηλαδή για τα πρόσημα της διακρίνουσας της χαρακτηριστικής, $\Delta = (B - C)^2 + 4AD$ (βλέπε αρχείο Λύσεων), ενδιαφέρει <u>ιδιαίτερα</u> η <u>ασυμπτωτική συμπεριφορά των τροχιών φάσης</u> $(t \to \pm\infty)$, η οποία προσδιορίζεται <u>υπολογίζοντας</u> το όριο

$$\lim_{t \to \pm\infty} \frac{dy}{dx}$$

και <u>χαρακτηρίζει</u> το σημείο ισορροπίας (0,0) του συστήματος.

- Περίπτωση 1 : $\Delta > 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{B+C \mp \sqrt{\Delta}}{2} \longrightarrow \bar{\xi}_1 = (a,\beta)^T, \quad \bar{\xi}_2 = (\gamma,\delta)^T, \quad \lambda_1 < \lambda_2$$

Γενική λύση:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} a \\ \beta \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Μέσω της (4) (άσκηση), προκύπτει η Ε.Τ.Φ

$$\boxed{\left|(C-\lambda_1)x + Dy\right|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = K\left|(C-\lambda_2)x + Dy\right|}, \quad K = \kappa^{-\frac{\sqrt{\Delta}}{\lambda_2}}, \qquad (7)$$

όπου η σταθερά ολοκλήρωσης K υπολογίζεται βάσει των εκάστοτε αρχικών συνθηκών: $(x_0,y_0) = (x(t_0), y(t_0))$:

$$K = \frac{\left|(C-\lambda_1)x_0 + Dy_0\right|^{\lambda_1/\lambda_2}}{\left|(C-\lambda_2)x_0 + Dy_0\right|} \qquad (7a)$$

Ασυμπτωτική συμπεριφορά

Μέσω της Γ.Λ (6) έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{c_1\lambda_1\beta e^{\lambda_1 t} + c_2\lambda_2\delta e^{\lambda_2 t}}{c_1\lambda_1 a e^{\lambda_1 t} + c_2\lambda_2\gamma e^{\lambda_2 t}}$$

ή

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c_1\lambda_1\beta + c_2\lambda_2\delta e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}{c_1\lambda_1 a + c_2\lambda_2\gamma e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}$$

Παίρνοντας τα όρια για $t \to \pm\infty$, καθώς $\lambda_1 < \lambda_2$ έχουμε

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty}\frac{dy}{dx}=\frac{\delta}{\gamma}\,,\qquad \lim_{t\to-\infty}\frac{dy}{dx}=\frac{\beta}{\alpha}} \qquad (8)$$

δηλαδή: για $t\to+\infty$ οι τροχιές φάσης τείνουν ασυμπτωτικά στην ευθεία (ή σε παράλληλες σε αυτή) που αντιστοιχεί στη θεμελιώδη λύση της μεγαλύτερης ιδιοτιμής, **ενώ** για $t\to-\infty$ οι τροχιές φάσης τείνουν ασυμπτωτικά στην ευθεία (ή σε παράλληλες σε αυτή) που αντιστοιχεί στη θεμελιώδη λύση της μικρότερης ιδιοτιμής.

Ο χαρακτηρισμός του σημείου (0,0) εξαρτάται από τα πρόσημα των ιδιοτιμών λ_1, λ_2, δηλαδή τη ροή του συστήματος στο χώρο φάσεων σε σχέση με την αρχή των αξόνων, και δίνεται στα παρακάτω παραδείγματα:

- Παράδειγμα 1 (Παράδειγμα 1 αρχείου Λύσεων_1, σ. 3ps)

$$P=\begin{pmatrix}-0.1 & 0.075\\ 0.1 & -0.2\end{pmatrix} \rightarrow \text{Γ.Λ}: \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=c_1e^{-0.25t}\underbrace{\begin{pmatrix}-0.5\\ 1\end{pmatrix}}+c_2e^{-0.05t}\underbrace{\begin{pmatrix}1.5\\ 1\end{pmatrix}}$$

$$\lambda_1=-0.25<-0.05=\lambda_2 \qquad \bar{v}_1:\ y=\frac{1}{-0.5}x=-2x \qquad \bar{v}_2:\ y=\frac{1}{1.5}x=\frac{2}{3}x$$

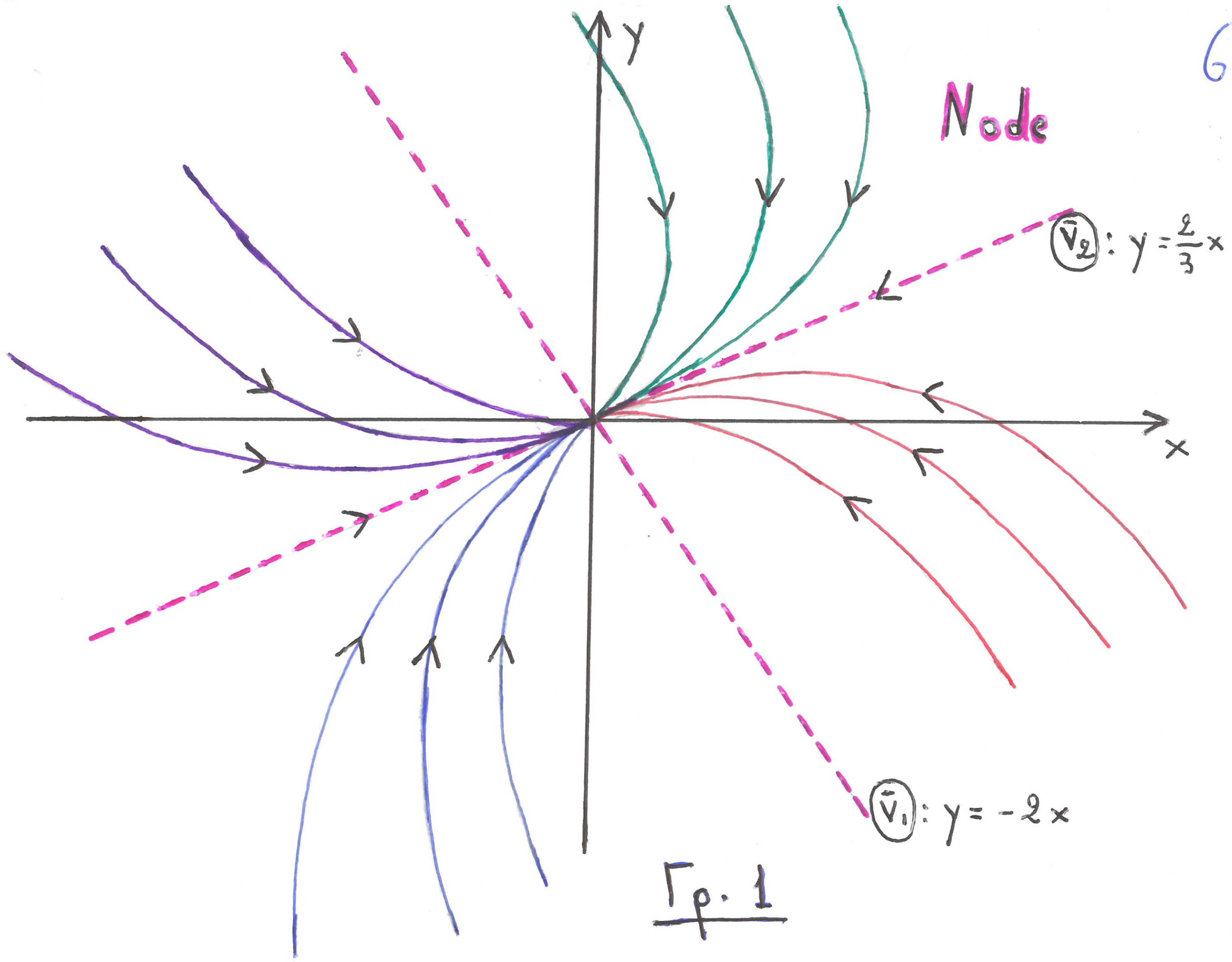
$\bar{v}_i$, $i=1,2$ είναι οι ευθείες που αντιστοιχούν στις θεμελιώδεις λύσεις.* Η **Ε.Τ.Φ** (7) είναι:

$$|0.15x+0.075y|^5=K|-0.05x+0.075y|$$

και δίνει τις τροχιές στο επίπεδο φάσεων (x,y):

*(με κλίσεις αυτές των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων)

6ps



Γρ. 1

— Κάθε τροχιά αντιστοιχεί σε μία τιμή του K που υπολογίζεται βάσει των αρχικών συνθηκών $\bar{x}_0$ ($\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$). Κάθε τιμή του K αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό ζεύγος (c_1, c_2) της γενικής λύσης και αντίστροφα. Το πορτραίτο φάσης αποτελείται από άπειρες τροχιές στο επίπεδο φάσης (x, y), η μία απειροστά κοντά στην άλλη, που δεν τέμνονται μεταξύ τους (το αλγεβρικό σύστημα των εξισώσεων της λύσης στις αρχικές συνθήκες, $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$, έχει μοναδική λύση ($\det \Phi \neq 0$) ως προς c_1, c_2), δηλαδή από κάθε σημείο (x, y) διέρχεται μόνο μία τροχιά.

– Το Γράφημα 1 είναι σύμφωνο με τα πορίσματα της Εξίσωσης (8) ως προς την ασυμπτωτική συμπεριφορά των τροχιών, αναφορικά με τις ευθείες $\bar{v}_1$ και $\bar{v}_2$ που αντιστοιχούν στις θεμελιώδεις λύσεις της μικρότερης και μεγαλύτερης ιδιοτιμής, αντίστοιχα. Το βελάκι "$>$" πάνω στις τροχιές (εδώ προς τα μέσα, προς το $(0,0)$), δηλώνει τη ροή του συστήματος καθώς ο χρόνος t αυξάνεται (από το $-\infty \longrightarrow +\infty$) και είναι σύμφωνο με τα πρόσημα των ιδιοτιμών (εδώ αρνητικά).

[Γενικότερα, στις ομόσημες ιδιοτιμές, οι τροχιές τείνουν ασυμπτωτικά προς την ίδια την ευθεία της θεμελιώδους λύσης (και όχι σε παράλληλή της), σύμφωνα με το εξής:

- Για αρνητικές ιδιοτιμές, στην ευθεία της μεγαλύτερης ιδιοτιμής, $\bar{v}_2$ (τείνοντας στο $(0,0)$ για $t \to +\infty$)
- Για θετικές ιδιοτιμές, στην ευθεία της μικρότερης ιδιοτιμής, $\bar{v}_1$ (τείνοντας στο $(0,0)$ για $t \to -\infty$).

Πράγματι, αν υποθέταμε ότι το σύστημα είχε τις ίδιες κατ' απόλυτη τιμή ιδιοτιμές με πρόσημο "+", και προέκυπταν τα ίδια ιδιοδιανύσματα, άρα $\bar{v}_1 \longleftrightarrow \bar{v}_2$, το πορτραίτο φάσης στο επίπεδο xy θα ήταν (ποιοτικά) το ίδιο, με τα βελάκια στις τροχιές να δείχνουν προς τα έξω, προς το $(\pm\infty, \pm\infty)$, ανάλογα με την τροχιά].

- Χαρακτηρισμός του (0,0)

a. Αν $\lambda_1\lambda_2>0$ (ομόσημες), το (0,0) ονομάζεται **κόμβος** (**node**)

- **ασυμπτωτικά ευσταθής** ($\lambda_1,\lambda_2<0$), καθώς $(x,y)\xrightarrow[t\to+\infty]{}(0,0)$ (**asymptotically stable**). Καλείται και sink (σιφώνι) (όλα τα βελάκια προς τα μέσα).
- **ασταθής** ($\lambda_1,\lambda_2>0$), καθώς $(x,y)\xrightarrow[t\to+\infty]{}(\infty,\infty)$ (**unstable**). Καλείται και source (πηγή) (όλα τα βελάκια προς τα έξω).

b. Αν $\lambda_1\lambda_2<0$ (ετερόσημες), το (0,0) ονομάζεται **κοίλο σημείο** (**saddle**), πάντοτε **ασταθές** (**unstable**), λόγω της θετικής ιδιοτιμής. Το πορτραίτο φάσης για το κοίλο σημείο διαμορφώνεται όπως στο επόμενο παράδειγμα:

- Παράδειγμα 2

$$P=\begin{pmatrix}1&1\\4&1\end{pmatrix}\rightarrow \text{Γ.Λ:}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=c_1e^{-t}\underbrace{\begin{pmatrix}-0.5\\1\end{pmatrix}}+c_2e^{3t}\underbrace{\begin{pmatrix}0.5\\1\end{pmatrix}}$$

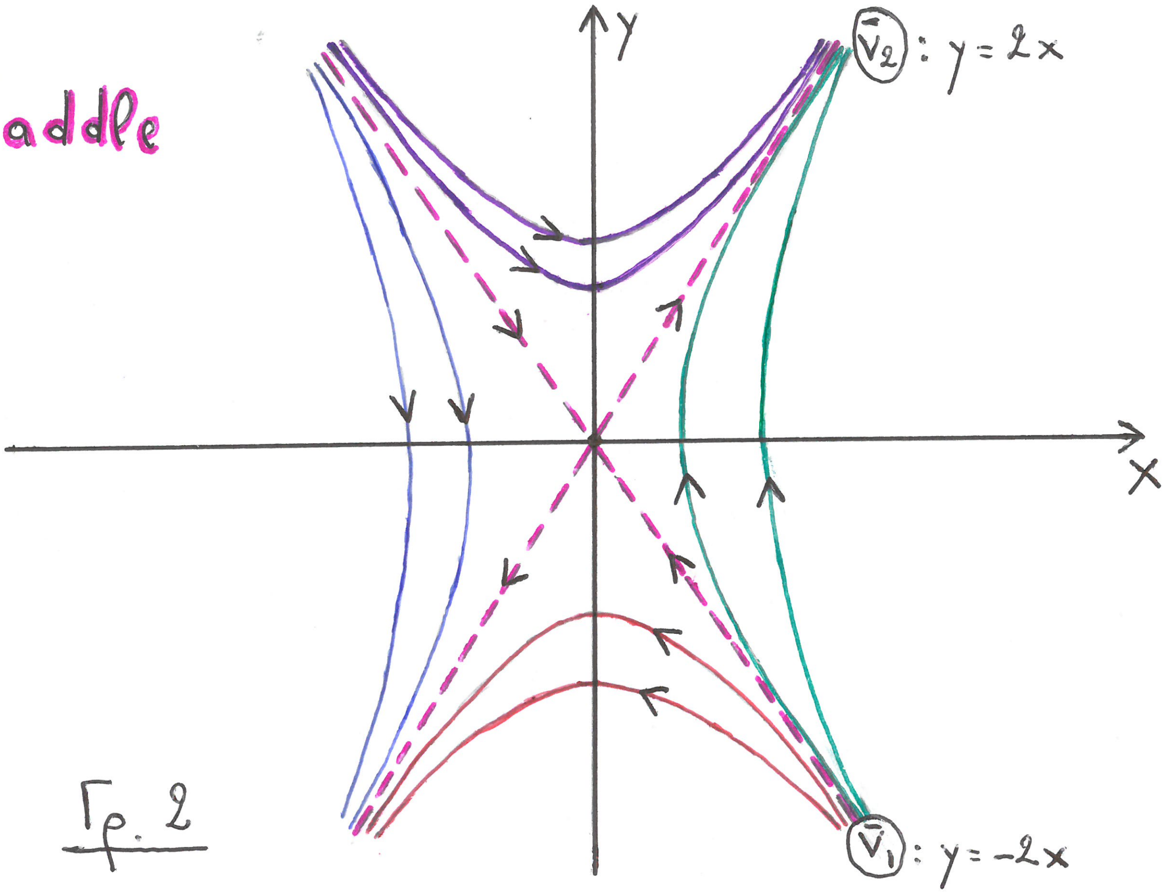
$\lambda_1=-1<3=\lambda_2$ $\qquad$ $\bar{V}_1: y=-2x$ $\qquad$ $\bar{V}_2: y=2x$

V_i, $i=1,2$ είναι οι ευθείες που αντιστοιχούν στις θεμελιώδεις λύσεις. Η **Ε.Τ.Φ** (7) είναι:

$$|2x+y|^{-\frac{1}{3}} = K\,|-2x+y|$$

με K να υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες και δίνει την μονοπαραμετρική οικογένεια τροχιών:

Saddle



Γρ. 2

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά των τροχιών είναι και εδώ σύμφωνη με την Εξ.(8), με τα βελάκια να δείχνουν τη ροή του συστήματος ($-\infty \xrightarrow{t} +\infty$), δηλαδή το σύστημα "έρχεται" από $t=-\infty$ ασυμπτωτικά προς την ευθεία $\bar{v}_1$ (που αντιστοιχεί στη θεμελιώδη λύση) της μικρότερης ιδιοτιμής (αρνητικής), πλησιάζει το $(0,0)$ και μετά απομακρύνεται και τείνει ασυμπτωτικά στην ευθεία $\bar{v}_2$ της μεγαλύτερης ιδιοτιμής (θετικής), καθώς η λύση καθορίζεται πλέον από αυτήν ($t \to +\infty$) και $(x,y) \to (\pm\infty, \pm\infty)$ (ανάλογα με την τροχιά).

Προφανώς, όπως φαίνεται και στο Γράφημα 2, η μόνη περίπτωση να έχουμε

$$(x, y) \xrightarrow[t \to +\infty]{} (0, 0) \quad (\text{ασυμπτωτικά}),$$

είναι όταν το σύστημα βρίσκεται πάνω στην ευθεία $\bar{v}_1$ (της αρνητικής ιδιοτιμής), δηλαδή στη λύση να έχουμε $C_2 = 0$.

Επίσης, οι ευθείες $\bar{v}_1$ και $\bar{v}_2$ που αντιστοιχούν στις θεμελιώδεις λύσεις του συστήματος για $\Delta > 0$, καλούνται διαχωρίζουσες (separatrices) στο επίπεδο φάσεων.

- $\boxed{\text{Περίπτωση 2 : } \Delta = 0}$

$$\underbrace{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda}_{} = \frac{B+C}{2} \rightarrow \underbrace{\bar{J}}_{} = (a, \beta)^T \rightarrow \underbrace{\bar{n}}_{} = (\gamma, \delta)^T$$

γενικευμένο ιδιοδ/σμα

Γενική λύση:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a \\ \beta \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \gamma + t a \\ \delta + t \beta \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Μέσω της (4) (άσκηση), προκύπτει η Ε.Τ.Φ

$$\boxed{\ln \kappa \left| (C-\lambda)x + Dy \right| = \frac{\lambda x}{(C-\lambda)x + Dy}}, \qquad (10)$$

$(C-\lambda)x + Dy \neq 0$, με τη σταθερά ολοκλήρωσης κ να υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$:

$$\underline{\kappa} = \frac{1}{|(C-\lambda)x_0 + Dy_0|} e^{\frac{\lambda x_0}{(C-\lambda)x_0 + Dy_0}} \qquad (10_a)$$

Ο περιορισμός $(C-\lambda)x + Dy \neq 0$ δεν ισχύει στις ειδικές περιπτώσεις <u>a.</u> και <u>c.</u> (δες αρχείο Λύσεων_1, σ. 5ps, 6ps), οπότε βάσει της λύσης (9a) (αρχείο Λύσεων_1, σ 5ps) και της (4a), παίρνουμε τις <u>Ε.Τ.Φ</u>

$$\boxed{y = ax}, \quad B = C, \quad A = D = 0 \qquad (11)$$

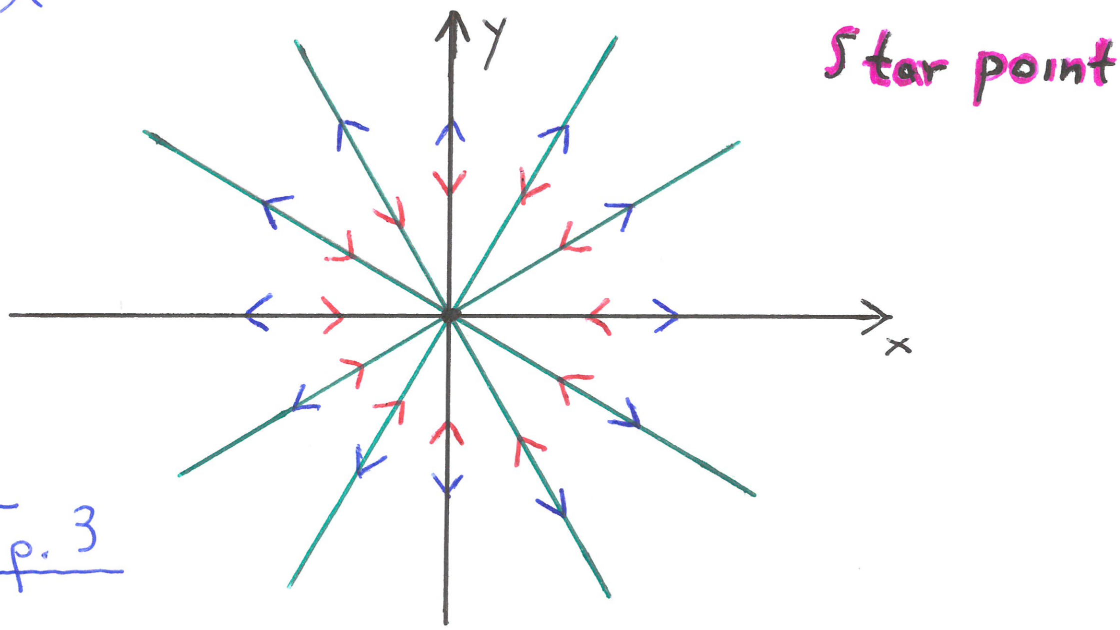
και

$$\boxed{\ln \kappa |x| = \frac{C}{A} \frac{y}{x}}, \quad B = C, \quad D = 0, \quad A \neq 0, \qquad (12)$$

αντίστοιχα, με α, κ σταθερές ολοκλήρωσης που υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Ασυμπτωτική συμπεριφορά

Για την ειδική περίπτωση α. ($B=C$, $A=D=0$), βάσει της (11), το πορτραίτο φάσης είναι μία μονο-παραμετρική οικογένεια ευθειών που περνούν από την αρχή των αξόνων.



Γρ. 3

Το $(0,0)$ ονομάζεται αστεροειδές σημείο (star point), ασυμπτωτικά ευσταθές ($\lambda<0$, τα βελάκια προς τα μέσα ">") ή ασταθές ($\lambda>0$, τα βελάκια προς τα έξω ">").

Για όλες τις άλλες περιπτώσεις, μέσω της Γ.Λ (9) έχουμε

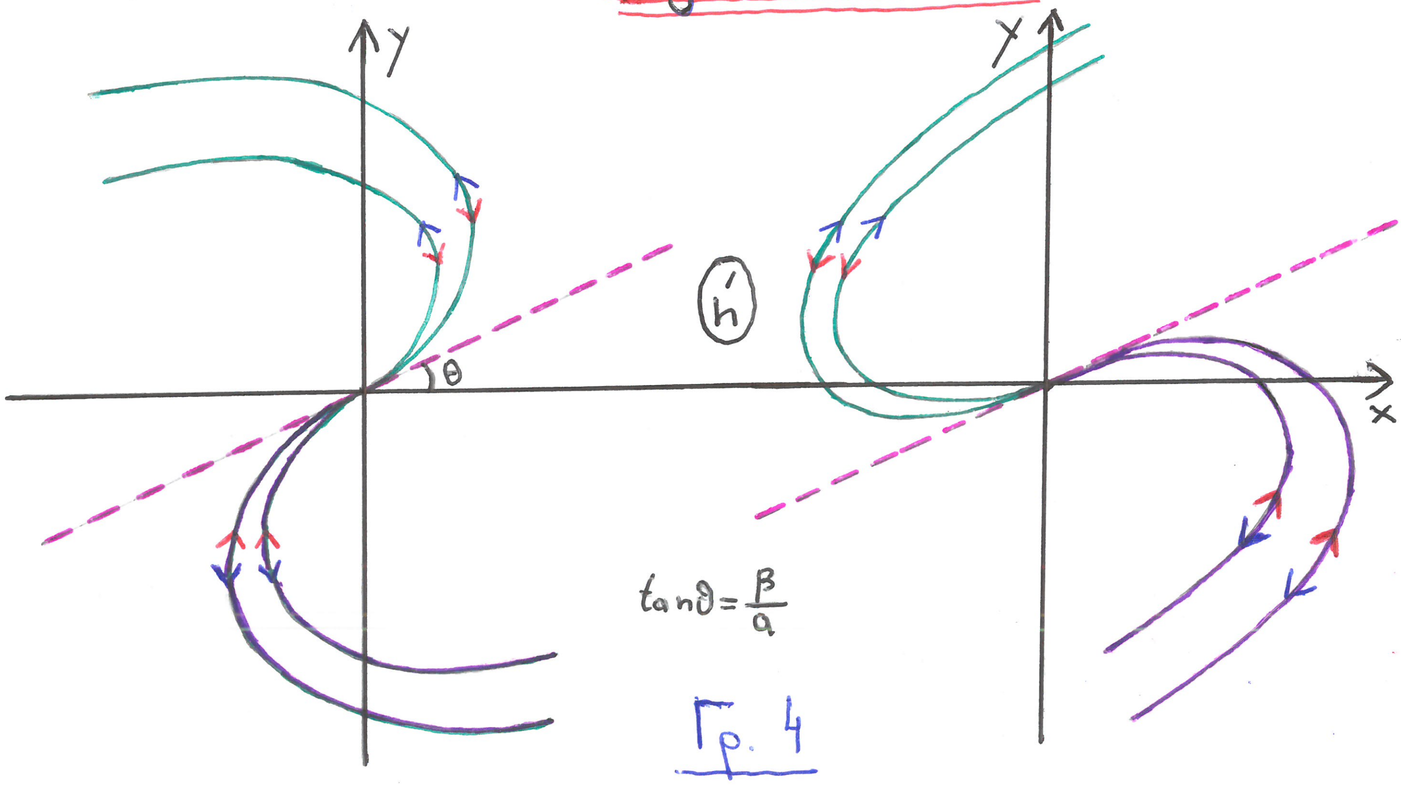
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{c_1\lambda\beta + c_2[\lambda(\delta+t\beta)+\beta]}{c_1\lambda\alpha + c_2[\lambda(\gamma+t\alpha)+\alpha]}$$

Παίρνοντας τα όρια για $t \to \pm\infty$ έχουμε

$$\boxed{\lim_{t\to\pm\infty}\frac{dy}{dx}=\frac{\beta}{a}} \qquad (13)$$

Η φυσική σημασία της Εξ.(13) είναι η εξής:
Κάθε τροχιά φάσης στο επίπεδο xy βρίσκεται ανάμεσα σε 2 παράλληλες ευθείες με κλίση αυτή του ιδιοδ/τος $\bar{\xi}$, η μία εκ των οποίων διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τείνοντας ασυμπτωτικά προς αυτές. Πιο συγκεκριμένα:
Τείνει ασυμπτωτικά προς τη διερχόμενη από την αρχή των αξόνων, γιά $t\to+\infty$ αν το $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές $(\lambda<0)$, ή γιά $t\to-\infty$ αν το $(0,0)$ είναι ασταθές $(\lambda>0)$.

Το $(0,0)$ ονομάζεται εκφυλισμένος κόμβος (degenerate node)

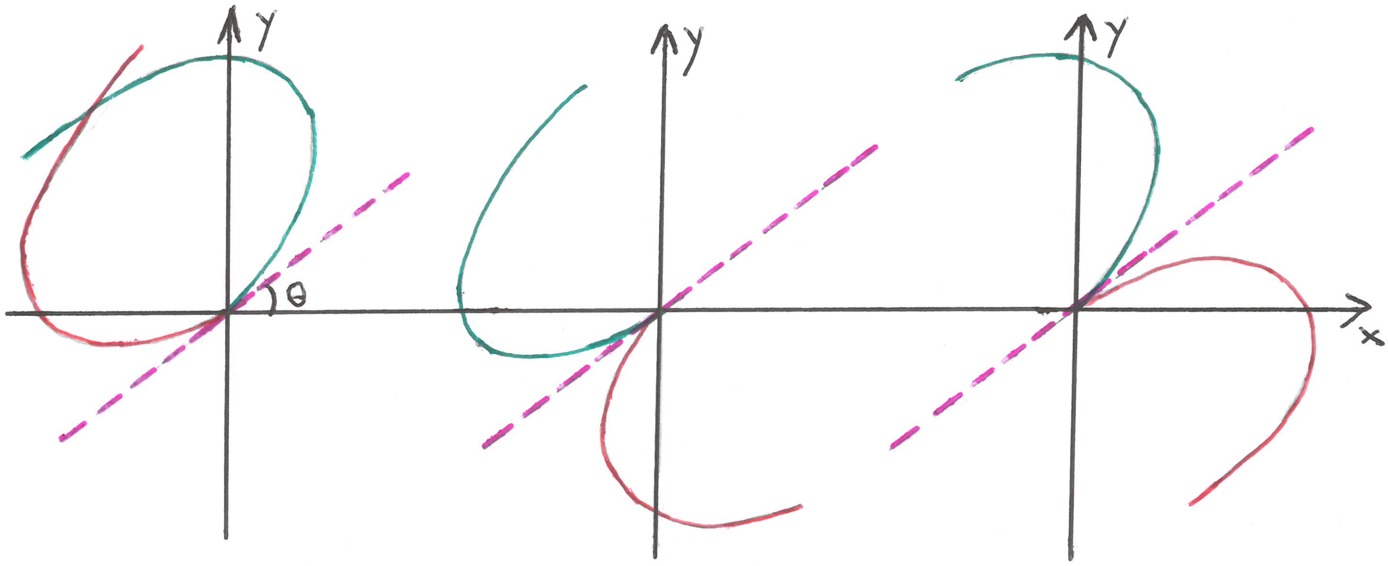


$\tan\theta=\frac{\beta}{a}$

Γρ. 4

Τα βελάκια στο Γράφημα 4 δείχνουν προς τα έξω ("$>$") όταν $\lambda > 0$ (ασταθής εκφ. κόμβος) και προς τα μέσα ("$>$") όταν $\lambda < 0$ (ασυμπτ. ευσταθής εκφ. κόμβος). Στην πρώτη περίπτωση $(x, y) \xrightarrow[t \to +\infty]{} (\pm\infty, \pm\infty)$ (ανάλογα με την τροχιά), ενώ στη δεύτερη περίπτωση $(x, y) \xrightarrow[t \to +\infty]{} (0, 0)$.

Δεν υπάρχουν πορτραίτα φάσης με τις παρακάτω μορφές:



Γρ. 5

Οι επιτρεπτές (Γράφημα 4) ή οι μη επιτρεπτές (Γράφημα 5) μορφές πορτραίτων φάσης, προκύπτουν από αλγεβρική επεξεργασία της Γενικής λύσης (9), στην περίπτωση $\Delta = 0$. Προφανώς, η μη επιτρεπτότητα της πρώτης στο Γρ. 5, έχει να κάνει με τη μοναδικότητα της λύσης ενός Π.Α.Τ (για κάθε (x_0, y_0) υπάρχει μία μοναδική τροχιά που περνά από αυτό).

Επίσης, για τις ειδικές περιπτώσεις b. και c. (αρχείο Λύσεων_1, σ. 5es, 6es), η ευθεία στην οποία οι τροχιές τείνουν ασυμπτωτικά για $t \to \pm\infty$, είναι ο άξονας x ($\bar{f}=(1,0)^T$) και ο άξονας y ($\bar{f}=(0,1)^T$), αντίστοιχα.

– <u>Παράδειγμα 3</u> (Παράδειγμα 2 αρχείου Λύσεων_1, σελ5)

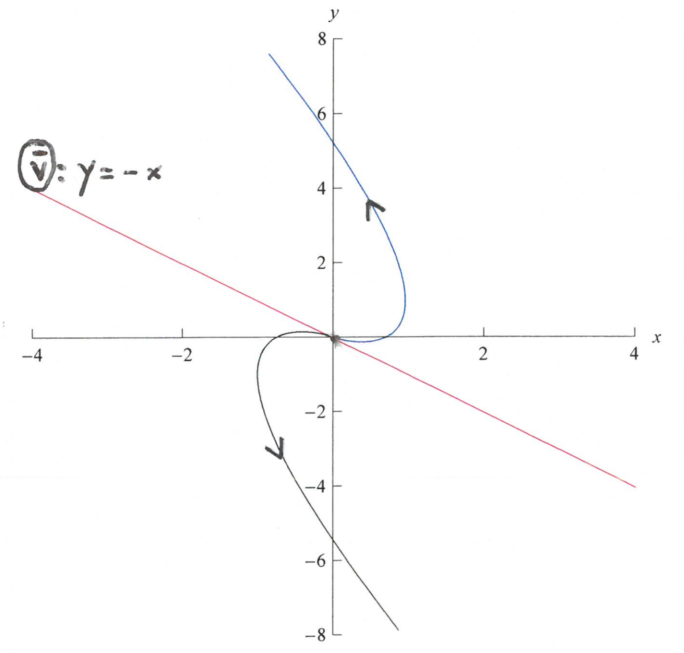
$$P=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \to \underline{\Gamma.\Lambda}: c_1 e^{2t}\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\lambda_1=\lambda_2=\lambda=2$ $\qquad$ $\bar{v}$: $y=-x$, η ευθεία που αντιστοιχεί στη θεμελιώδη λύση $e^{\lambda t}\bar{f}$.

Η <u>Ε.Τ.Φ</u> (10) είναι:

$$\ell n\, \kappa |x+y| = -\frac{2x}{x+y}$$

όπου κ υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες.
Το $(0,0)$ είναι <u>ασταθής</u> ($\lambda>0$) <u>εκφυλισμένος κόμβος</u> και γιά $(x_0,y_0)=(-1,8)$ και $(-1,-1)$ προκύπτουν οι τροχιές του <u>Γρ. 6</u>, <u>μπλε</u> και <u>μαύρη</u>, αντίστοιχα.



<u>Γρ. 6</u>

— Παράδειγμα 4 (Παράδειγμα 3 αρχείου Λύσεων_1, σ. 6ρς)

$P=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ Ειδική περίπτωση b.

$B=C,\ A=0,\ D\neq 0$

Γ.Λ: $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=c_1e^{-t}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}}_{\bar{v}}+c_2e^{-t}\begin{pmatrix}t\\ 1\end{pmatrix}$

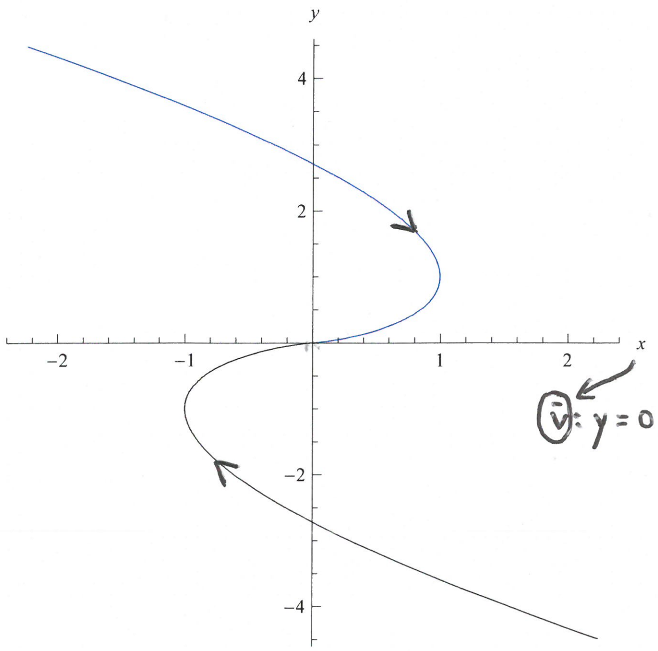
$\lambda_1=\lambda_2=\underset{\smile}{\lambda}=-1$ $\bar{v}$: $y=0$ (άξονας x), η ευθεία που αντιστοιχεί στη θεμελιώδη λύση $e^{\lambda t}\bar{v}$

Η **Ε.Τ.Φ** (10) είναι:

$$\ln \kappa|y|=-\frac{x}{y}$$

όπου κ υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες.

Το $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθής εκφυλισμένος κόμβος ($\lambda<0$) και για $(x_0,y_0)=(1,1)$ και $(-1,-1)$ προκύπτουν οι τροχιές του Γρ. 7, μπλε και μαύρη, αντίστοιχα.



Γρ. 7

– $\boxed{\text{Περίπτωση 3 : } \Delta < 0}$

$\lambda_{1,2} = r \pm i\mu$, $r = \dfrac{B+C}{2}$, $\mu = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}$, $\Delta = (B-C)^2 + 4AD$

$\hookrightarrow \bar{\xi}_{1,2} = \bar{c} \pm i\bar{d} \longrightarrow e^{\lambda_1 t}\bar{\xi}_1 = e^{rt}(\cos\mu t + i\sin\mu t)(\bar{c} + i\bar{d}) \longrightarrow$

Γενική λύση:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{rt}(\cos\mu t\, \bar{c} - \sin\mu t\, \bar{d}) + c_2 e^{rt}(\cos\mu t\, \bar{d} + \sin\mu t\, \bar{c})$$

Μέσω της (4) (άσκηση), προκύπτει η **Ε.Τ.Φ**

$$\boxed{\ln\sqrt{[(C-r)x + Dy]^2 + \mu^2 x^2} = \frac{r}{\mu}\arctan\frac{\mu x}{(C-r)x + Dy} + K} \quad (14)$$

όπου εκτός των απαραίτητων ολοκληρωμάτων έγινε και χρήση της σχέσης

$$\arctan z = -\arctan\frac{1}{z} \pm \frac{\pi}{2}, \quad z \gtrless 0 \qquad (14a)$$

Και εδώ, η σταθερά $K \left(= -\ln k \mp \frac{r}{\mu}\frac{\pi}{2}\right)$ υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες (x_0, y_0). Για να προσδιορίσουμε τις τροχιές φάσης εργαζόμαστε ως εξής:

Κάνουμε τον ακόλουθο γραμμικό μετασχηματισμό συντεταγμένων:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C-r & D \\ \mu & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \quad \text{ή} \quad \begin{aligned} \eta &= (C-r)x + Dy \\ \xi &= \mu x \end{aligned} \qquad (15)$$

Αντικαθιστώντας την (15) στην (14) έχουμε

$$\ln\sqrt{n^2+J^2} = \frac{r}{\mu}\arctan\frac{J}{n} + K \qquad (16)$$

Εισάγοντας τώρα <u>πολικές συντεταγμένες</u> (ρ, θ) στο (μετασχηματισμένο) επίπεδο (n, J)

$$n = \rho\cos\theta, \quad J = \rho\sin\theta$$

η εξ. (16) γίνεται

$$\ln\rho = \frac{r}{\mu}\theta + K$$

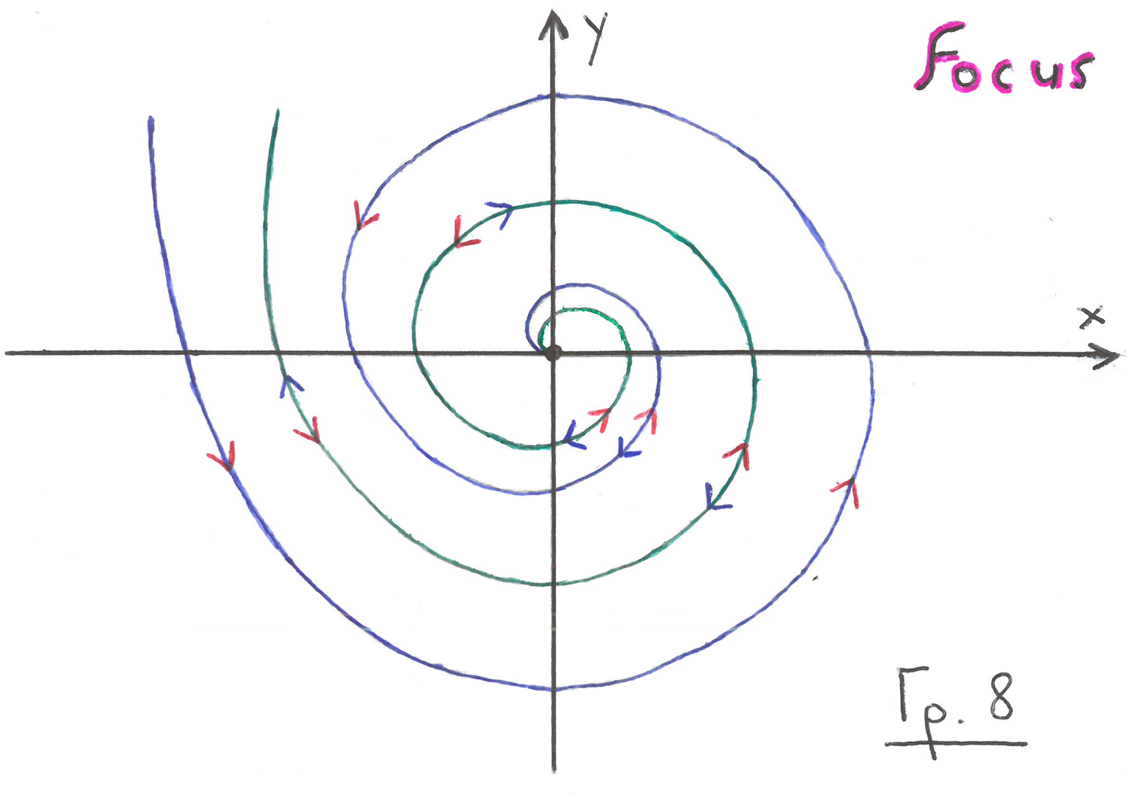
ή

$$\boxed{\rho = e^{\frac{r}{\mu}\theta + K} = c\,e^{\frac{r}{\mu}\theta}} \qquad (17)$$

που παριστάνει μία οικογένεια <u>σπειροειδών τροχιών</u> στο επίπεδο (n, J), άρα και στο (x, y), όπου:

αν $r<0$ $\quad (x, y) \xrightarrow[t\to+\infty]{} (0,0)$ (ασυμπτωτικά)(“>”)

και αν $r>0$ $\quad (|x|, |y|) \xrightarrow[t\to+\infty]{} (+\infty, +\infty)$ (“>”)



Γρ. 8

Και εδώ, κάθε τιμή του K αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό ζεύγος (c_1, c_2) της γενικής λύσης και αντίστροφα (από κάθε σημείο του επιπέδου διέρχεται μία μόνο σπείρα), με τις τιμές των σταθερών να υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$. Το $(0,0)$ ονομάζεται εστία (focus) ή και σπειροειδές σημείο (spiral point),

- ασυμπτωτικά ευσταθής ($r<0$, spirals inward), ή
- ασταθής ($r>0$, spirals outward).

- Παράδειγμα 5 (Παράδειγμα 4 αρχείου Λύσεων-1, σ. 7es)

$$P = \begin{pmatrix} -0,5 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Γ.Λ}: \; c_1 e^{-0.5t}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2 e^{-0.5t}\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\lambda_{1,2} = -0.5 \pm i$. Γράφοντας την πολική μορφή της Ε.Τ.Φ, δηλαδή την Εξ. (17), έχουμε

$$\boxed{p = e^{\frac{r}{\mu}\theta + K}} = e^{-0.5\theta + K} \Longrightarrow \ln p = -0.5\,\theta + K$$

και αντικαθιστώντας τις καρτεσιανές συντεταγμένες (η, J) παίρνουμε

$$\ln\sqrt{\eta^2 + J^2} = -0.5 \arctan\frac{J}{\eta} + K$$

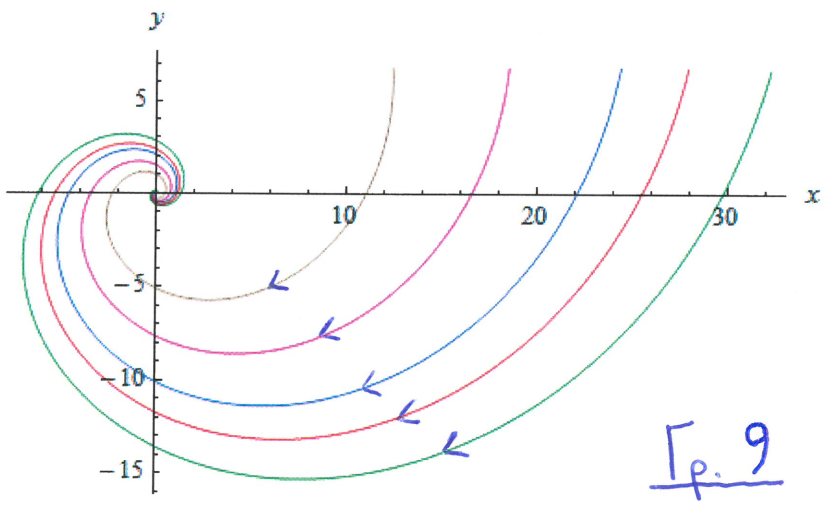
Καθώς η σχέση με τις (x,y) δίνεται από τον γραμμικό μετασχηματισμό (15):

$$\boxed{\begin{pmatrix} \eta \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r & D \\ \mu & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \eta \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

αντικαθιστώντας στην προηγούμενη, παίρνουμε
την καρτεσιανή μορφή της E.T.Φ,
δηλαδή την Εξ. (14):

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} + 0.5 \arctan\frac{x}{y} = K$$

Έτσι, στην περίπτωση της εστίας (μιγαδικές ιδιοτιμές),
με χρήση της "πολικής" E.T.Φ (17)
και του γραμμ. μετ/μού (15), παίρνουμε εύκολα
την καρτεσιανή (xy) μορφή του πρώτου, (14), χωρίς
να χρησιμοποιήσουμε τα ολοκληρώματα (4).
Για το εν λόγω σύστημα και τις παρακάτω περιπτώσεις
αρχικών συνθηκών $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, παίρνουμε
τις τροχιές (βελάκια προς τα μέσα):



Γρ. 9

(x_0, y_0)	
(0.5, 0.5)	καφέ
(0.75, 0.75)	μωβ
(1, 1)	μπλέ
(1, 1.5)	κόκκινο
(1, 2)	πράσινο

Η χάραξη έγινε στο διάστημα $t \in (-6, 12)$.

– Περίπτωση καθαρά φανταστικών ιδιοτιμών

$\lambda_{1,2} = \pm i\mu$, $r = 0 \to B = -C$

$\Delta = 4C^2 + 4AD$, $\mu = \sqrt{-C^2 - AD}$
(<0)

Εδώ η "πολική" **Ε.Τ.Φ** (17) γίνεται $(r=0)$

$$p = e^K = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha} \Rightarrow p^2 = n^2 + J^2 = e^{2K}$$

Αντικαθιστώντας τα n, J από τον γραμμικό μετασχηματισμό (15): $n = Cx + Dy$, $J = \mu x$, έχουμε

$$C^2x^2 + 2CDxy + D^2y^2 + \mu^2x^2 = e^{2K}$$

όπου λαμβάνοντας υπ' όψη ότι $\mu^2 = -C^2 - AD$,
και διαιρώντας με e^{2K}, παίρνουμε

$$\boxed{-\frac{A}{K_1}x^2 + \frac{2C}{K_1}xy + \frac{D}{K_1}y^2 = 1} \qquad (18)$$

με $K_1 = \dfrac{e^{2K}}{D}$ να υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες (x_0, y_0). Από τη θεωρία των κανονικών τετραγωνικών μορφών έχουμε ότι η επίπεδη καμπύλη

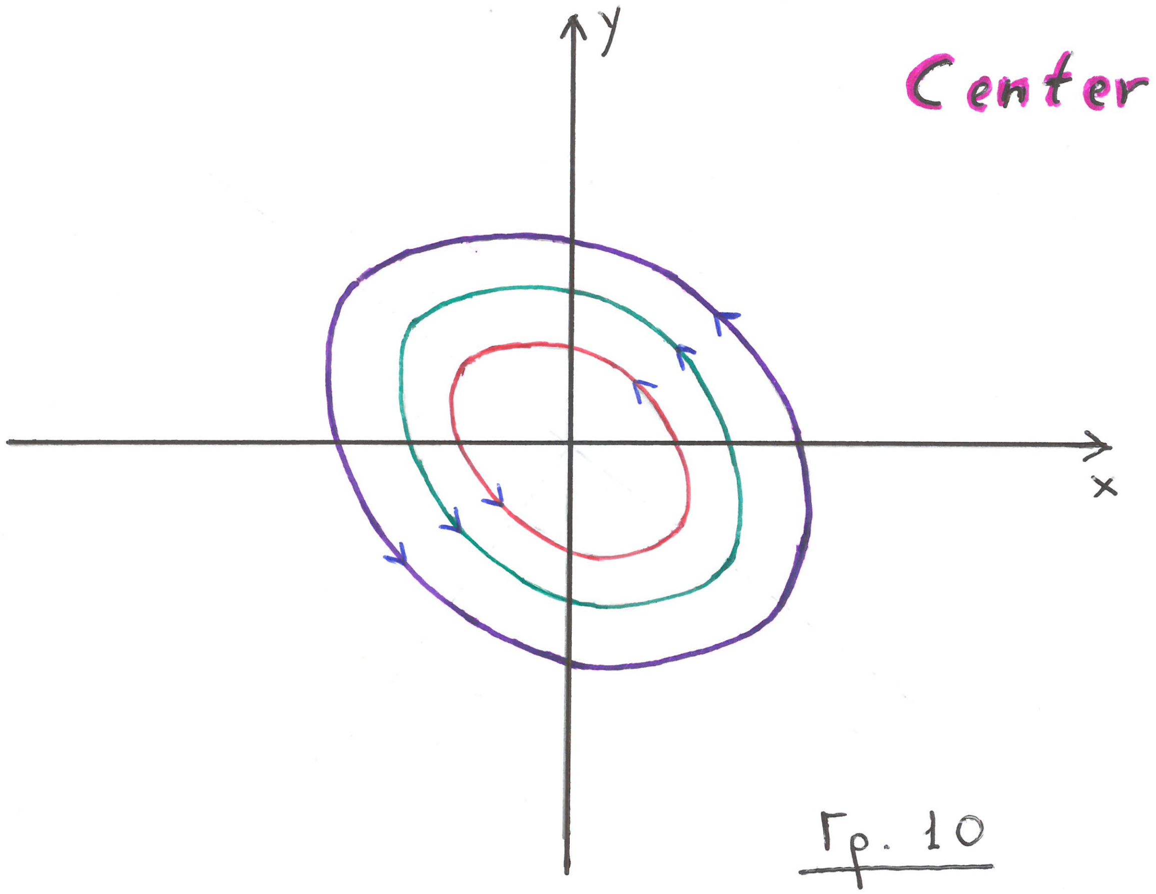
$$ax^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = 1$$

παριστάνει:

έλλειψη	αν	$\beta^2 - a\gamma < 0$
υπερβολή	αν	$\beta^2 - a\gamma > 0$
ζεύγος παράλληλων ευθειών	αν	$\beta^2 - a\gamma = 0$

Συνεπώς η (18), καθώς $\beta^2 - a\gamma = \dfrac{C^2}{K_1^2} + \dfrac{AD}{K_1^2} < 0$,

περιγράφει μία οικογένεια ελλείψεων στο επίπεδο (x,y) (κύκλοι στο επίπεδο (n,J)).
Οι κλειστές τροχιές είναι αναμενόμενες στο επίπεδο φάσεων, λόγω της περιοδικότητας της λύσης ($e^{rt}=1$). Το $(0,0)$ καλείται κέντρο (center) (προφανώς ευσταθές).



Γρ. 10

- <u>Παράδειγμα 6</u> (Παράδειγμα 5 αρχείου Λύσεων_1, σ. 8ες)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \to \underline{\lambda_{1,2}} = \pm i 2 \quad (r = 0,\ \mu = 2)$$

<u>Γ.Λ:</u> $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0.5\cos 2t - \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos 2t + 0.5 \sin 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$

Από την "<u>πολική</u>" <u>Ε.Τ.Φ</u> (17) έχουμε

$$\boxed{\rho = e^{\cancel{\frac{r}{\mu}\theta} + K} = e^{K}} \Longrightarrow \rho^2 = n^2 + J^2 = e^{2K}$$

Αντικαθιστώντας τα n, J από τον <u>γραμμικό μετασχηματισμό</u> (15):

$$\boxed{\begin{pmatrix} n \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C - \cancel{r} & D \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \to \begin{pmatrix} n \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cx + Dy \\ \mu x \end{pmatrix}$$

παίρνουμε

$$\left.\begin{aligned} &C^2x^2 + 2CDxy + D^2y^2 + \mu^2x^2 = e^{2K} \\ &\underbrace{\mu^2} = -C^2 - AD \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$

$$-ADx^2 + 2CDxy + D^2y^2 = e^{2K} \xrightarrow{/e^{2K}}$$

$$\underline{-\frac{A}{K_1}x^2 + \frac{2C}{K_1}xy + \frac{D}{K_1}y^2 = 1}, \quad K_1 = \frac{e^{2K}}{D}$$

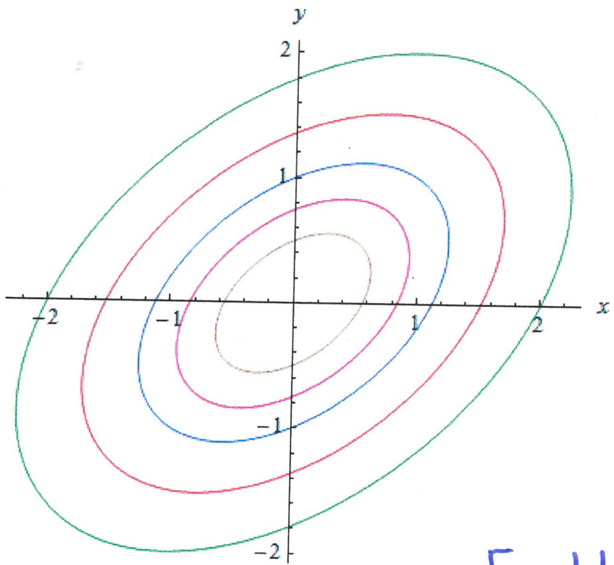
ή

$$\underline{-\frac{2}{K_1}x^2 + \frac{2}{K_1}xy - \frac{2.5}{K_1}y^2 = 1}$$

<u>οικογένεια ελλείψεων</u> $\left(\beta^2 - \alpha\gamma = -\frac{4}{K_1^2} < 0\right)$

και το (0,0) είναι <u>κέντρο</u> (<u>center</u>) (<u>ευσταθές</u>)

Γιά το εν λόγω σύστημα και τις παρακάτω περιπτώσεις αρχικών συνθηκών $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, παίρνουμε τις κλειστές τροχιές (ελλείψεις):



Γρ. 11

(x_0, y_0)	
$(0.5, 0.5)$	καφέ
$(0.75, 0.75)$	μώβ
$(1, 1)$	μπλέ
$(1, 1.5)$	κόκκινο
$(1, 2)$	πράσινο

Η χάραξη έγινε στο διάστημα $t \in (0, \pi)$.