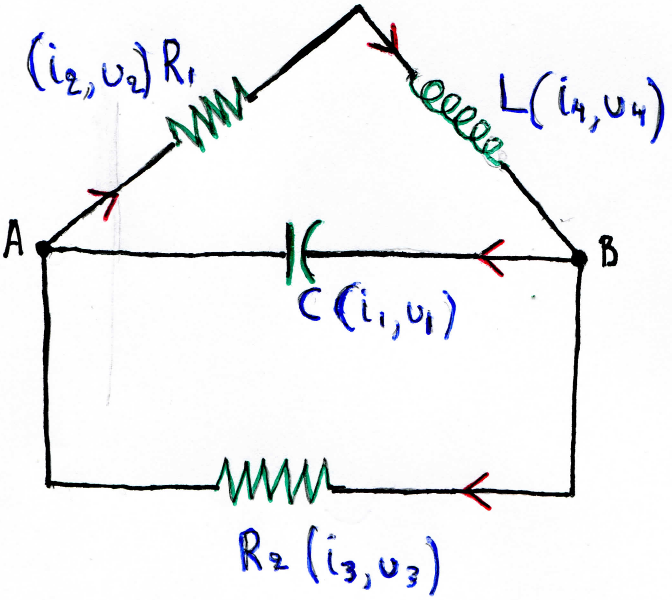


Για το κύκλωμα του σχήματος:

α) Διατυπώστε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης που το περιγράφει

β) Για $R_1 = R_2 = 4$ ohms, $C = \frac{1}{2}$ farad, $L = 8$ henrys, βρείτε το χαρακτήρα και την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας του συστήματος, καθώς και τη λύση του για $u_3(0) = u_0$, $i_2(0) = i_0$.

α) <u>1ος νόμος Kirchoff (K1)</u>

<u>αριστερά</u> κόμβος (A): $i_1 - i_2 + i_3 = 0$

<u>δεξιά</u> κόμβος (B): $-i_1 - i_3 + i_4 = 0$

<u>2ος νόμος Kirchoff (K2)</u>

<u>άνω</u> βρόγχος: $u_1 + u_2 + u_4 = 0$

<u>κάτω</u> βρόγχος: $u_1 - u_3 = 0$

<u>Σχέσεις διατάξεων</u>

$$u_1' = \frac{1}{C} i_1, \quad i_4' = \frac{1}{L} u_4, \quad u_2 = R_1 i_2, \quad u_3 = R_2 i_3$$

<u>Κατασκευή διαφορικών εξισώσεων</u>

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε
(οι μεταβλητές κατάστασης είναι οι u_1, i_4)

$$v_1' = \frac{1}{C}(-i_3+i_4) = -\frac{1}{C}\frac{v_3}{R_2} + \frac{1}{C}i_4 = \frac{-1}{CR_2}v_1 + \frac{1}{C}i_4$$

$$i_4' = \frac{1}{L}(-v_1-v_2) = -\frac{1}{L}v_1 - \frac{1}{L}R_1 i_2 = -\frac{1}{L}v_1 - \frac{R_1}{L}i_4$$

(Προσθέτοντας τις δύο εξισώσεις του Κ1 προκύπτει ότι $i_2 = i_4$)

Έτσι, θέτοντας $v_1 = v$ και $i_4 = i$ (για λόγους απλότητας), έχουμε το σύστημα:

$$\boxed{\begin{pmatrix} v' \\ i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{CR_2} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix}}$$

. . . .

β) Για τις <u>δεδομένες αριθμητικές τιμές</u>, ο πίνακας των συντελεστών P γίνεται

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$ με <u>χαρακτηριστική εξίσωση</u>:

$$\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{2} = 0, \quad \Delta = -1 < 0 \rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i}{2} = -0.5 \pm i0.5$$

$$(P - \lambda_1 I)\bar{\xi} = \bar{0} \rightarrow: \left(\begin{array}{cc|c} -0.5-\lambda_1 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{8} & -0.5-\lambda_1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\bar{\xi}_1 = s\begin{pmatrix} \frac{2}{0.5+\lambda_1} \\ 1 \end{pmatrix} \underset{=}{\overset{s=1}{}} \begin{pmatrix} \frac{2}{0.5i} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4i \\ i \end{pmatrix} \rightarrow$$

κατασκευάζουμε το <u>θεμελιώδη πίνακα</u> $\Phi(t)$:

$$e^{\lambda_1 t}\bar{J}_1 = e^{-0.5t}(\cos 0.5t + i\sin 0.5t)\begin{pmatrix}-4i\\1\end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\boxed{\Phi(t) = e^{-0.5t}\begin{pmatrix}4\sin 0.5t & -4\cos 0.5t\\ \cos 0.5t & \sin 0.5t\end{pmatrix}}$$

δηλαδή η <u>γενική λύση</u> είναι :

$$\boxed{\begin{pmatrix}u_1(t)\\ i_4(t)\end{pmatrix} = c_1 e^{-0.5t}\begin{pmatrix}4\sin 0.5t\\ \cos 0.5t\end{pmatrix} + c_2 e^{-0.5t}\begin{pmatrix}-4\cos 0.5t\\ \sin 0.5t\end{pmatrix}}$$

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε και τα υπόλοιπα μεγέθη του κυκλώματος, από τις αρχικές σχέσεις έχουμε:

$u_3 = u_1$, $i_2 = i_4$, $u_2 = R_1 i_2 = R_1 i_4$

$u_4 = -u_1 - u_2 = -u_1 - R_1 i_4$, $i_3 = \dfrac{u_3}{R_2} = \dfrac{u_1}{R_2}$

$i_1 = i_4 - i_3 = i_4 - \dfrac{u_1}{R_2}$.

Για τις <u>δεδομένες</u> <u>αρχικές συνθήκες</u> έχουμε:

$u_1(0) = u_3(0) = u_0$, $i_4(0) = i_2(0) = i_0$

Άρα από τη γενική λύση, για $t=0$ παίρνουμε

$$\Phi(0)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_0\\i_0\end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix}0 & -4\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_0\\i_0\end{pmatrix} \rightarrow$$

$c_1 = i_0$, $c_2 = -\dfrac{u_0}{4} \rightarrow$

$$\boxed{\begin{pmatrix}u_1(t)\\ i_4(t)\end{pmatrix} = e^{-0.5t}\begin{pmatrix}4i_0\sin 0.5t + u_0\cos 0.5t\\ i_0\cos 0.5t - \dfrac{u_0}{4}\sin 0.5t\end{pmatrix}}$$.

7/ Δίνεται το γραμμικό σύστημα Δ.Ε:

$$\bar{x}' = P\bar{x}, \quad \bar{x} = (x(t), y(t))^T, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

α) Να βρεθεί η γενική λύση και να χαρακτηρίσετε το (0,0).

β) Να λύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(x(0), y(0)) = (-1, -1)$$

για το παραπάνω σύστημα.

γ) Να σχεδιάσετε (ποιοτικά) την τροχιά του Π.Α.Τ β) στο επίπεδο φάσεων xy και να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της με τους άξονες x και y.

α) α.ε: $\lambda^2 - trP\,\lambda + detP = 0 \to \left.\begin{array}{l}\lambda^2 - 3\lambda + \frac{9}{4} = 0 \\ \Delta = 0\end{array}\right\} \to$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{3}{2}$. Άρα το (0,0) είναι ασταθής εκφυλισμένος κόμβος

$$(P - \lambda I)\bar{\xi} = \bar{0} \to \left(\begin{array}{cc|c} 2-\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1-\lambda & 0 \end{array}\right) \to \bar{\xi} = s\begin{pmatrix} -\frac{1}{2(2-\lambda)} \\ 1 \end{pmatrix} \underset{=}{\overset{s=1}{=}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(P - \lambda I)\bar{\eta} = \bar{\xi} \to \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ \dots & \dots & \dots \end{array}\right) \to$$

$$\bar{\eta} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \underset{=}{\overset{s=0}{=}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Παρατηρείστε ότι στους 2×2 πίνακες για τον υπολογισμό των ιδιοδιανυσμάτων δουλεύουμε μόνο με την πρώτη γραμμή).

Άρα ο <u>θεμελιώδης πίνακας</u> $\Phi(t)$ του συστήματος είναι:

$$\boxed{\Phi(t) = \left(e^{\lambda t}\bar{\jmath},\ e^{\lambda t}(\bar{n}+t\bar{\jmath})\right) = e^{\frac{3}{2}t}\begin{pmatrix}-1 & -2-t\\ 1 & t\end{pmatrix}}$$

και η <u>γενική λύση</u> γράφεται ($\bar{x}=\Phi\bar{c}$)

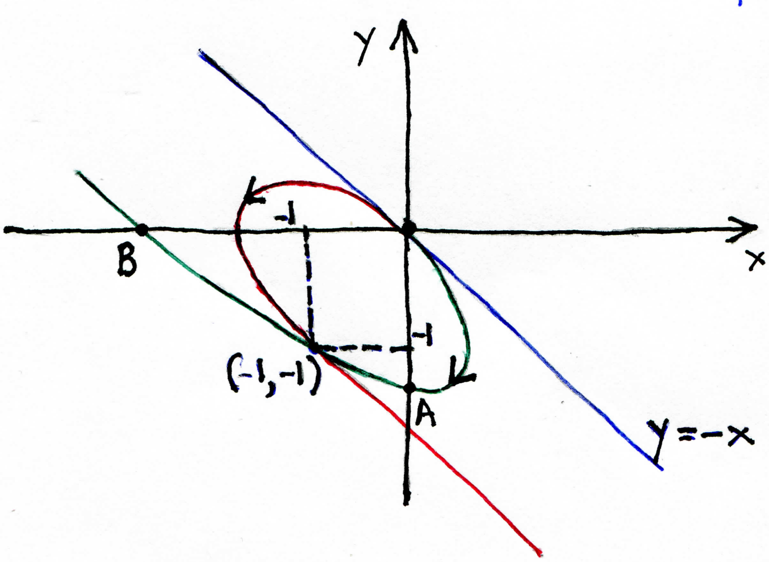
$$\boxed{\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = c_1 e^{\frac{3}{2}t}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} + c_2 e^{\frac{3}{2}t}\begin{pmatrix}-2-t\\ t\end{pmatrix}}$$

β) Από τη γενική λύση για $t=0$ έχουμε:

$$\Phi(0)\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} \to$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = e^{\frac{3}{2}t}\begin{pmatrix}-1-t\\ -1+t\end{pmatrix}}$$

γ) Η ευθεία που αντιστοιχεί στη θεμελιώδη λύση $e^{\lambda t}\bar{\jmath}$ είναι η $\bar{v}$: $y=-x$, οπότε η τροχιά που περνά από το $(x_0,y_0)=(-1,-1)$,



σύμφωνα με τη θεωρία, θα είναι ή μία πράσινη ή μία κόκκινη (προφανώς όχι και οι δύο).

{ Η τροχιά αυτή τείνει ασυμπτωτικά στο $(0,0)$ για $t \to -\infty$ (καθώς $\lambda > 0$), εφαπτομενικά στην ευθεία $y = -x$ και φεύγει στο ∞ για $t \to +\infty$, εφαπτομενικά σε μία παράλληλη της ευθείας αυτής. }

Πράσινη : $t \to -\infty$: $x > 0$, $y < 0$

Κόκκινη : $t \to -\infty$: $x < 0$, $y > 0$

Έτσι παίρνοντας το όριο για $t \to -\infty$ στη λύση του β) βρίσκουμε ποιά από τις δύο είναι ($e^{3/2t} > 0$).

Εδώ είναι η πράσινη. (Ανάλογα μπορούμε να δουλέψουμε για $t \to +\infty$). Αν ήταν $\lambda < 0$, θα παίρναμε το όριο για $t \to +\infty$ (ή ανάλογα για $t \to -\infty$).

Τέλος, θέτοντας στη λύση του β) διαδοχικά $y = 0$ και $x = 0$, υπολογίζουμε μέσω του αντίστοιχου χρόνου τα σημεία τομής με τους άξονες x και y, αντίστοιχα:

$y = 0 \to t = 1 \to x = -2e^{-\frac{3}{2}}$: $B\left(-2e^{-\frac{3}{2}}, 0\right)$

$x = 0 \to t = -1 \to y = -2e^{\frac{3}{2}}$: $A\left(0, -2e^{\frac{3}{2}}\right)$