



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

Διαφορικές Εξισώσεις

Ενότητα 3: Συστήματα διαφορικών εξισώσεων &
Θεωρία Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων

Μιχαήλ Μαρκάκης
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα ΗΜΤΥ

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά **ΠΠ**
μαθήματα

α. Σκοποί ενότητας.....	3
β. Περιεχόμενα ενότητας	3
3.1. Σχηματική αναπαράσταση-Μαθηματική μοντελοποίηση	4
3.2. Διερεύνηση ευστάθειας για το σημείο ισορροπίας (0,0).....	5
3.3. Αριθμητικές εφαρμογές	6
3.3.1. Λύση μη ομογενούς συστήματος	8
3.4. Γραφική αναπαράσταση λύσεων	10
3.4.1. Χώρος φάσεων	10
3.4.2. Χρονικές Αποκρίσεις	12
Σημειώματα	16



α. Σκοποί ενότητας

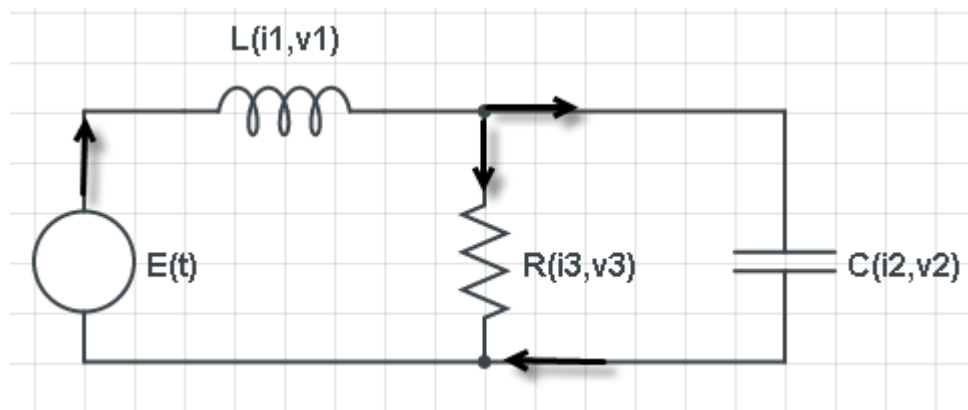
Σκοπός της παρούσας ενότητας είναι η παρουσίαση μιας εφαρμογής της θεωρίας συστημάτων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων στη μοντελοποίηση ενός γραμμικού ηλεκτρικού κυκλώματος RLC(αντιστάσεως-πηνίου-πυκνωτή) στο χώρο καταστάσεως (state space) με τη βοήθεια των Νόμων του Kirchhoff.

β. Περιεχόμενα ενότητας

- α) Κυκλωματική αναπαράσταση - Διατύπωση καταστατικών εξισώσεων
- β) Διερεύνηση ευστάθειας
- γ) Διαδικασία επίλυσης (αριθμητικές εφαρμογές)
- δ) Γραφική αναπαράσταση λύσεων



3.1. ΣΧΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ-ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ



- 1ος Νόμος του Kirchhoff (K1)

άνω κόμβος: $i_1 - i_2 - i_3 = 0$

(ή κάτω κόμβος: $i_2 + i_3 - i_1 = 0$)

- 2ος Νόμος του Kirchhoff (K2)

δεξιός βρόχος: $v_2 - v_3 = 0$

αριστερός βρόχος: $v_1 + v_3 + E = 0$

- Σχέσεις διατάξεων:

$$Li_1' = v_1, \quad Cv_2' = i_2, \quad v_3 = Ri_3$$

- Κατασκευή συστήματος (μεταβλητές v_2, i_1):

$$\left. \begin{array}{l} v_2' = \frac{1}{C} i_2 \\ i_1' = \frac{1}{L} v_1 \end{array} \right\} \xrightarrow{K1, K2} \left. \begin{array}{l} v_2' = -\frac{1}{RC} v_2 + \frac{1}{C} i_1 \\ i_1' = -\frac{1}{L} v_2 - \frac{E}{L} \end{array} \right\} \xrightarrow{\substack{v_2 \rightarrow v \\ i_1 \rightarrow i}}$$

$$\begin{pmatrix} v' \\ i' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}}_P \begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{E}{L} \end{pmatrix}}_r$$

3.2. ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ (0,0) ($E = 0$)

Χαρακτηριστική Εξίσωση του P:

$$\lambda^2 - \text{Tr}(P)\lambda + \det(P) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \frac{1}{RC}\lambda + \frac{1}{LC} = 0,$$

με διακρίνουσα $\Delta = \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R^2C} - \frac{4}{L} \right)$. Άρα:

$$\alpha. \Delta < 0: L < 4R^2C \Rightarrow 2\lambda_{1,2} = -\frac{1}{RC} \mp i \sqrt{\left(\frac{4}{LC} - \frac{1}{R^2C^2} \right)},$$

ευσταθής εστία

$$\beta. \Delta = 0: L = 4R^2C \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2RC},$$

ευσταθής εκφυλισμένος κόμβος

$$\gamma. \Delta > 0: L > 4R^2C \Rightarrow 2\lambda_{1,2} = -\frac{1}{RC} \mp \sqrt{\left(\frac{1}{R^2C^2} - \frac{4}{LC} \right)},$$

ευσταθής κόμβος

3.3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ (ιδεατές τιμές)

$\alpha.$ $R = 1 \text{ Ohm}, C = \frac{1}{4} \text{ Farad}, L = \frac{1}{2} \text{ Henry}.$

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = -16 < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm i2$$

$$(P - \lambda_1 I) \vec{\xi}_1 = \vec{0}: \quad \begin{pmatrix} -4 - \lambda_1 & 4 \\ -2 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \vec{\xi}_1 = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\vec{\xi}_1 = s \begin{pmatrix} 4 \\ 4 + \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + i \\ 1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 - i \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{s=1} \vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 - i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Θεμελιώδης Πίνακας ($r = -2, \omega = 2$):

$$e^{rt} (\cos \omega t + i \sin \omega t) \vec{\xi}_1 = e^{-2t} (\cos 2t + i \sin 2t) \begin{pmatrix} 1 - i \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Phi(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos 2t + \sin 2t & -\cos 2t + \sin 2t \\ \cos 2t & \sin 2t \end{pmatrix}$$

$\beta.$ $R = 1 \text{ Ohm}, C = \frac{1}{4} \text{ Farad}, L = 1 \text{ Henry}$

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

$$(P - \lambda I)\vec{\xi} = \vec{0}: \begin{pmatrix} -4 - \lambda & 4 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \vec{\xi} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\vec{\xi} = s \begin{pmatrix} 4 \\ 4 + \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{s=1} \vec{\xi} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(P - \lambda I)\vec{n} = \vec{\xi}: \begin{pmatrix} -4 - \lambda & 4 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{n} = s \begin{pmatrix} 4 \\ 4 + \lambda \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 - \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{s=0} \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Θεμελιώδης Πίνακας:

$$\Phi(t) = e^{\lambda t} \left(\vec{\xi}, \vec{n} + t\vec{\xi} \right) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 & -1 + 2t \\ 1 & t \end{pmatrix}$$

γ . $R = 1 \text{ Ohm}$, $C = \frac{1}{4} \text{ Farad}$, $L = 2 \text{ Henry}$

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = 8 > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \mp \sqrt{2}$$

$$(P - \lambda_1 I)\vec{\xi}_1 = \vec{0}: \begin{pmatrix} -4 - \lambda_1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & -\lambda_1 \end{pmatrix} \vec{\xi}_1 = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\vec{\xi}_1 = s \begin{pmatrix} 4 \\ 4 + \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 4 \\ 4 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{s=1} \vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 4 + 2\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ανάλογα: $(P - \lambda_2 I) \vec{\xi}_2 = \vec{0} : \vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 4 - 2\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Θεμελιώδης Πίνακας:

$$\Phi(t) = \left(e^{\lambda_1 t} \vec{\xi}_1, e^{\lambda_2 t} \vec{\xi}_2 \right) = \begin{pmatrix} (4 + 2\sqrt{2}) e^{-(2+\sqrt{2})t} & (4 - 2\sqrt{2}) e^{(-2+\sqrt{2})t} \\ e^{-(2+\sqrt{2})t} & (4 + 2\sqrt{2}) e^{(-2+\sqrt{2})t} \end{pmatrix}$$

2.3.1. Λύση μη ομογενούς συστήματος (Πηγή $E \neq 0$)

$$E(t) = \frac{1}{2} \cos(2t) \text{ (αριθμητική εφαρμογή } \beta)$$

Μερική λύση μη ομογενούς:

$$\begin{pmatrix} v_p \\ i_p \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} : \Phi(t) \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{E}{L} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 & 2t-1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \cos(2t) \end{pmatrix}$$

Ορίζουσα του $\Phi(t)$: $W = \det \Phi(t) = e^{-4t}$. Συνεπώς επιλύουμε το σύστημα με τη μέθοδο Cramer:

$$f_1(t) = \int \frac{W_1}{W} dt = \frac{1}{2} \int (2t-1)e^{2t} \cos(2t) dt \xrightarrow[\text{G.R. 2.667.6 [1]}]{\text{G.R. 2.663.3 [1]}}$$

$$f_1(t) = \frac{e^{2t}}{8} [(2t-1)\cos(2t) + 2(t-1)\sin(2t)],$$

$$f_2(t) = \int \frac{W_2}{W} dt = -\int e^{2t} \cos(2t) dt \xrightarrow{\text{G.R. 2.663.3 [1]}}$$

$$f_2(t) = -\frac{e^{2t}}{4} (\cos(2t) + \sin(2t))$$

Άρα, η γενική λύση του μη ομογενούς συστήματος είναι:

$$\begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \Phi \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} =$$

$$e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 & 2t-1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2t-1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(t - \frac{1}{2}\right) \cos(2t) + (t-1) \sin(2t) \\ -\cos(2t) - \sin(2t) \end{pmatrix}$$

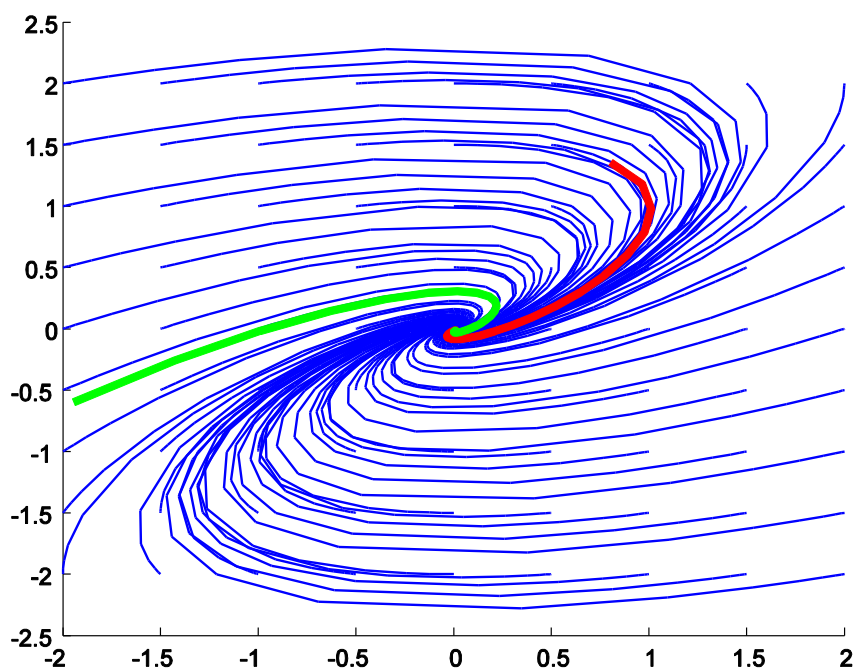
ή

$$\begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix} = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 2t-1 \\ t \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \frac{1}{2} \cos(2t) + \sin(2t) \end{pmatrix}$$



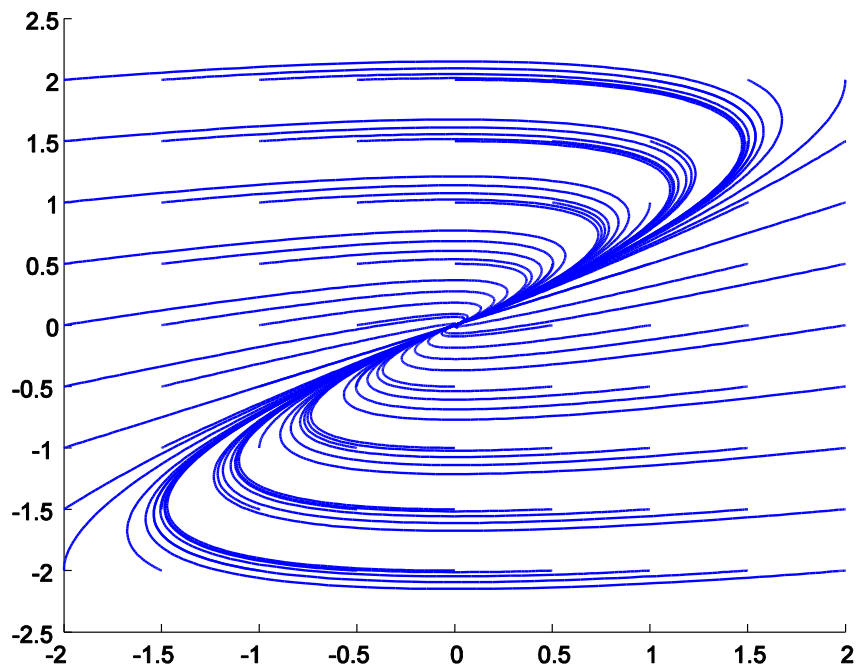
3.4. ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΛΥΣΕΩΝ

3.4.1. Χώρος φάσεων ($E=0$)



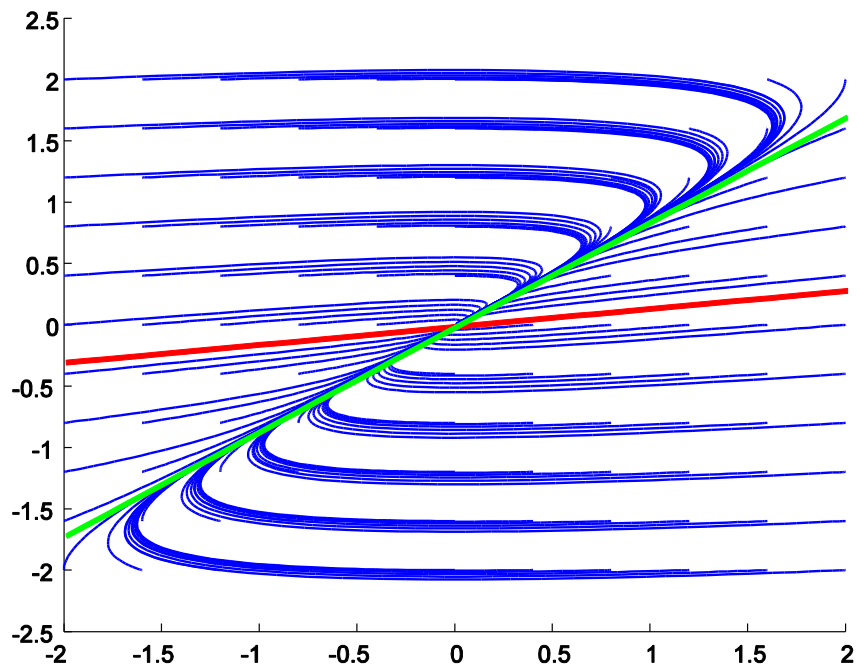
Εικόνα 1. Ευσταθής Εστία ($E=0$)





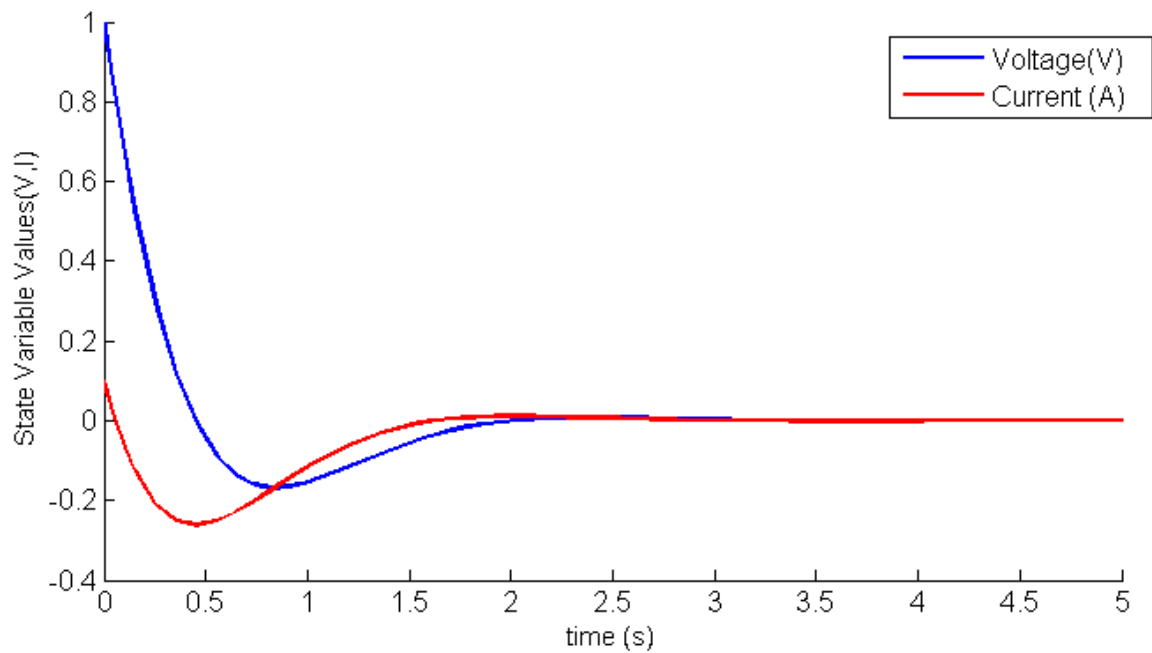
Εικόνα 2. Ευσταθής Εκφυλισμένος κόμβος ($E=0$)



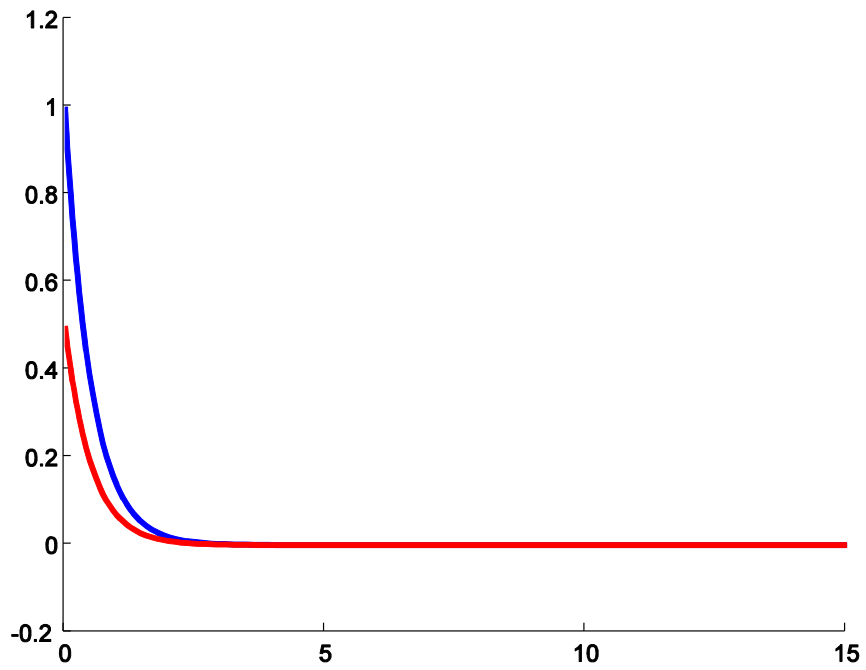


Εικόνα 3. Ευσταθής Κόμβος ($E=0$)

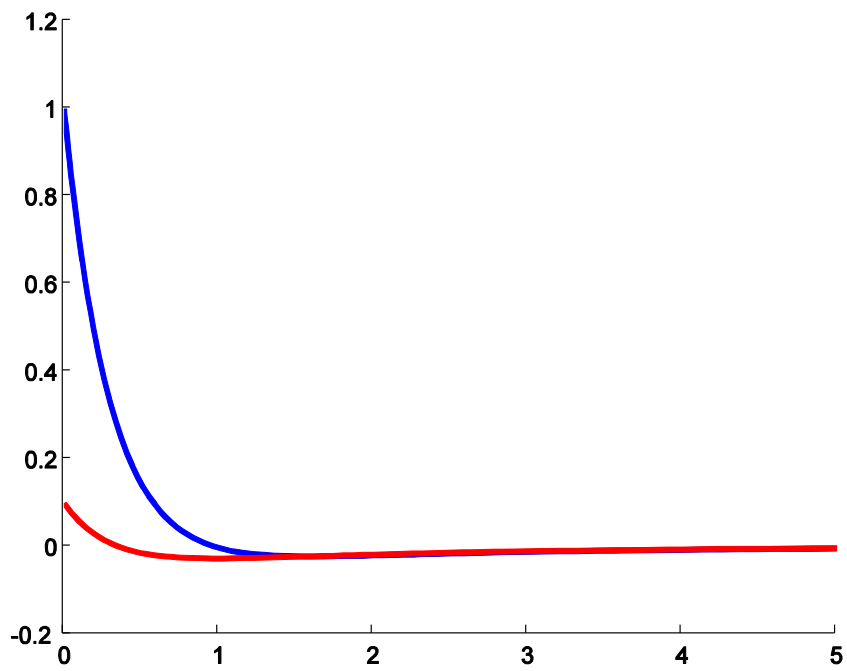
3.4.2. Χρονικές Αποκρίσεις



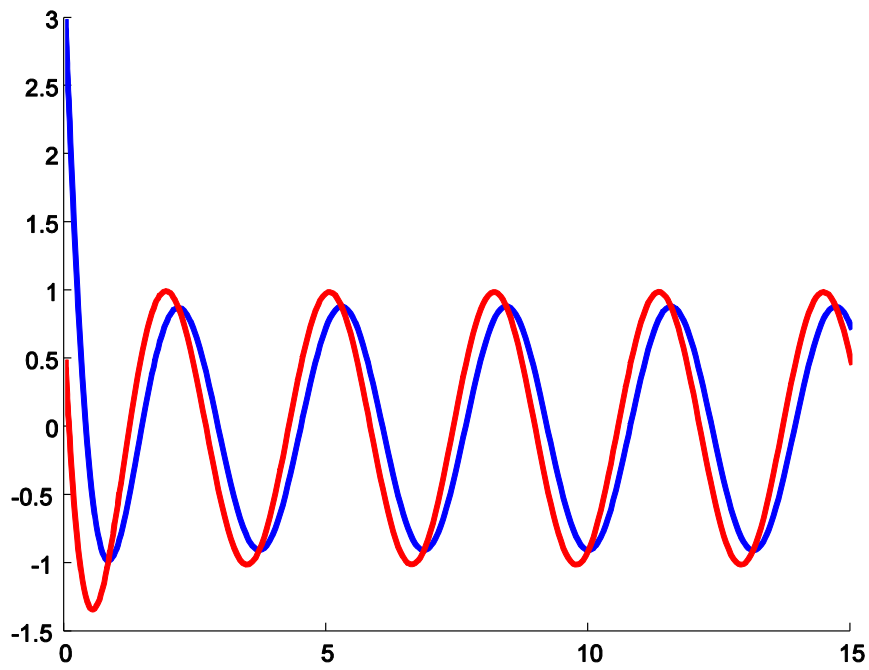
Εικόνα 4. Ευσταθής Εστία, $v_0=1$, $i_0=0.1$, $E=0$



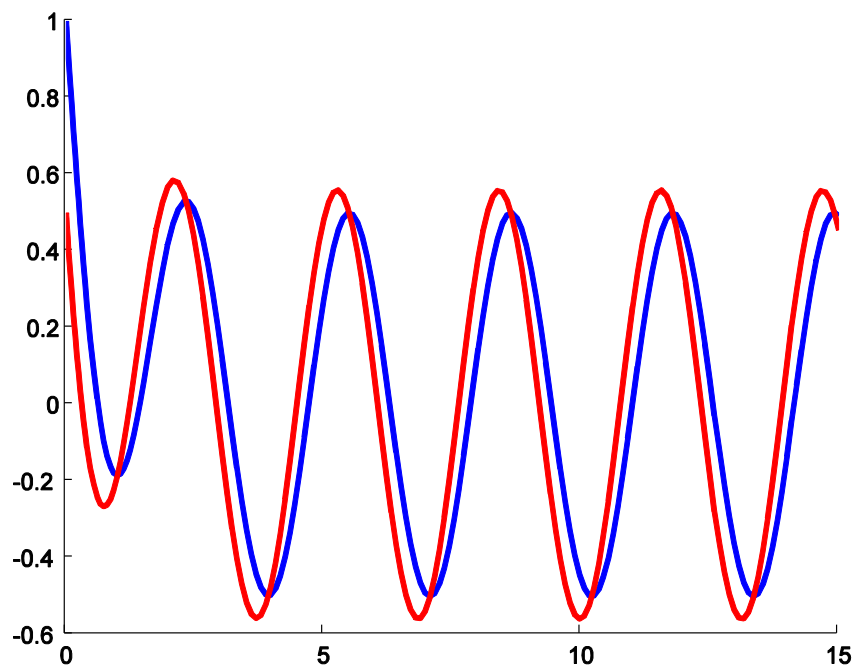
Εικόνα 5. Ευσταθής Εκφυλισμένος κόμβος, $v_0=1$, $i_0=0.5$, $E=0$



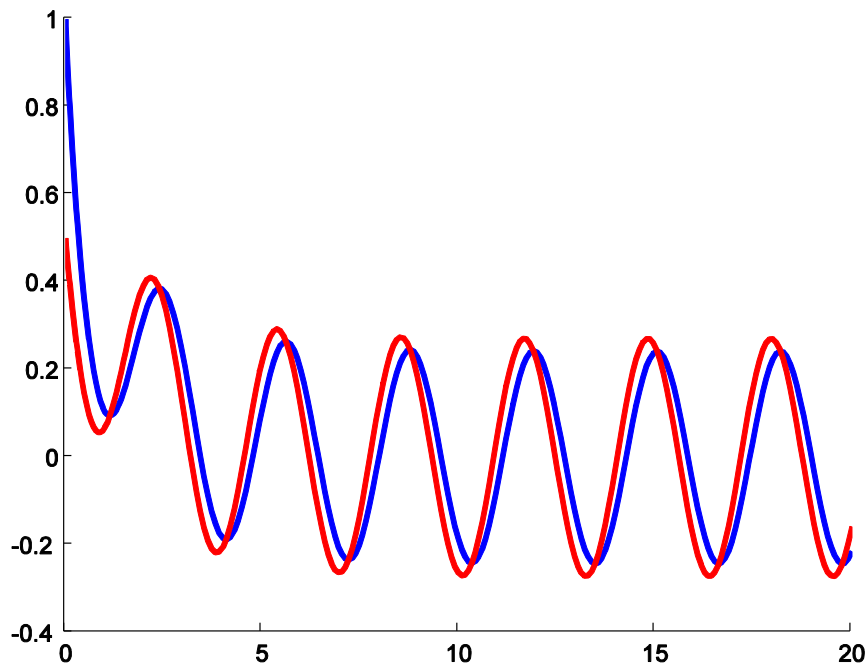
Εικόνα 6. Ευσταθής κόμβος, $v_0=1$, $i_0=0.1$, $E=0$



Εικόνα 7. Ευσταθής Εστία $v_0=3$, $i_0=0.5$, $E=\cos(2t)/4$



Εικόνα 8. Εκφυλισμένος κόμβος $v_0=1$, $i_0=0.5$, $E=\cos(2t)/4$



Εικόνα 9-Ευσταθής κόμβος, $\nu_0=1$, $i_0=0.5$, $E=\cos(2t)/4$

Βιβλιογραφία

[1] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Tables of integrals, series and products*, Academic Press, New York and London 1965

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1**.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, **Μιχαήλ Μαρκάκης, Επίκουρος Καθηγητής, 2015.. «Διαφορικές Εξισώσεις. Συστήματα διαφορικών εξισώσεων & Θεωρία Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων»**. Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://eclass.upatras.gr/courses/EE902>

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

