Διαφορικές Εξισώσεις

Ενότητα 3: Συστήματα διαφορικών εξισώσεων & Θεωρία Ηλεκτρικών Κυκλωμάτων

Μιχαήλ Μαρκάκης
Πολυτεχνική Σχολή

Τμήμα ΗΜΤΥ

α. Σκοποί ενότητας

Σκοπός της παρούσας ενότητας είναι η παρουσίαση μιας εφαρμογής της θεωρίας συστημάτων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων στη μοντελοποίηση ενός γραμμικού ηλεκτρικού κυκλώματος RLC(αντιστάσεως-πηνίου-πυκνωτή) στο χώρο καταστάσεως (state space) με τη βοήθεια των Νόμων του Kirchhoff.

β. Περιεχόμενα ενότητας

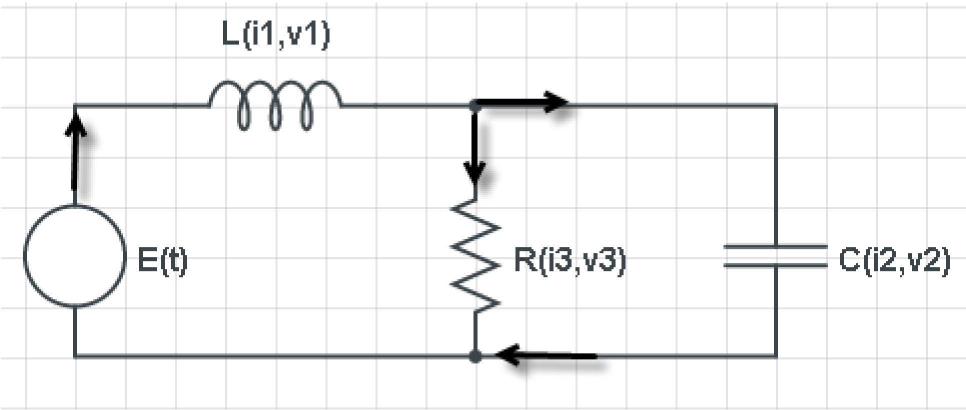
α) Κυκλωματική αναπαράσταση - Διατύπωση καταστατικών εξισώσεων

β) Διερεύνηση ευστάθειας

γ) Διαδικασία επίλυσης (αριθμητικές εφαρμογές)

δ) Γραφική αναπαράσταση λύσεων

3.1. ΣΧΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ-ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ



- <u>*1ος Νόμος του Kirchhoff*</u> *(K1)*

άνω κόμβος: $i_1 - i_2 - i_3 = 0$

(ή κάτω κόμβος: $i_2 + i_3 - i_1 = 0$)

- <u>*2ος Νόμος του Kirchhoff*</u> *(K2)*

δεξιός βρόχος: $v_2 - v_3 = 0$

αριστερός βρόχος: $v_1 + v_3 + E = 0$

- <u>*Σχέσεις διατάξεων:*</u>

$$Li_1{}' = v_1, \quad Cv_2{}' = i_2, \quad v_3 = Ri_3$$

- <u>*Κατασκευή συστήματος*</u> *(μεταβλητές* $\mathbf{v_2}, \mathbf{i_1}$*):*

$$\left.\begin{aligned} v_2{}' &= \frac{1}{C} i_2 \\ i_1{}' &= \frac{1}{L} v_1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{K1,\, K2} \left.\begin{aligned} v_2{}' &= -\frac{1}{RC} v_2 + \frac{1}{C} i_1 \\ i_1{}' &= -\frac{1}{L} v_2 - \frac{E}{L} \end{aligned}\right\} \xrightarrow[i_1 \to i]{v_2 \to v}$$

$$\begin{pmatrix} v' \\ i' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{RC} & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{E}{L} \end{pmatrix}}_{\vec{r}}$$

3.2. ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ $(0,0)$ ($E=0$)

Χαρακτηριστική Εξίσωση του P:

$$\lambda^2 - Tr(P)\lambda + \det(P) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \frac{1}{RC}\lambda + \frac{1}{LC} = 0,$$

με διακρίνουσα $\Delta = \dfrac{1}{C}\left(\dfrac{1}{R^2C} - \dfrac{4}{L}\right)$. Άρα:

α. $\Delta < 0: \quad \mathrm{L}<4\mathrm{R}^2C \Rightarrow 2\lambda_{1,2} = -\dfrac{1}{RC} \mp i\sqrt{\left(\dfrac{4}{LC} - \dfrac{1}{R^2C^2}\right)},$

ευσταθής εστία

β. $\Delta = 0: \quad \mathrm{L}=4\mathrm{R}^2C \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{1}{2RC},$

ευσταθής εκφυλισμένος κόμβος

γ. $\Delta > 0: \ \mathrm{L}>4\mathrm{R}^2C \Rightarrow 2\lambda_{1,2} = -\dfrac{1}{RC} \mp \sqrt{\left(\dfrac{1}{R^2C^2} - \dfrac{4}{LC}\right)},$

ευσταθής κόμβος

3.3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ (ιδεατές τιμές)

α. $R = 1$ *Ohm*, $C = \dfrac{1}{4}$ *Farad*, $L = \dfrac{1}{2}$ *Henry*.

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = -16 < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \pm i2$$

$$\left(P - \lambda_1 \mathrm{I}\right)\vec{\xi}_1 = \vec{0}: \quad \begin{pmatrix} -4-\lambda_1 & 4 \\ -2 & -\lambda_1 \end{pmatrix}\vec{\xi}_1 = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\vec{\xi}_1 = s\begin{pmatrix} \dfrac{4}{4+\lambda_1} \\ 1 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} \dfrac{2}{1+i} \\ 1 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{s=1} \vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>**Θεμελιώδης Πίνακας**</u> **(**$r = -2,\ \omega = 2$**):**

$$e^{rt}\left(\cos\omega t + i\sin\omega \mathrm{t}\right)\vec{\xi}_1 = e^{-2t}\left(\cos 2t + i\sin 2\mathrm{t}\right)\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Phi(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} \cos 2t + \sin 2t & -\cos 2t + \sin 2t \\ \cos 2t & \sin 2t \end{pmatrix}$$

β. $R = 1$ *Ohm*, $C = \dfrac{1}{4}$ *Farad*, $L = 1$ *Henry*

$$P = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

$$\left(P-\lambda \mathrm{I}\right)\vec{\xi}=\vec{0}: \quad \begin{pmatrix} -4-\lambda & 4 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}\vec{\xi}=\vec{0}\Rightarrow$$

$$\vec{\xi}=s\begin{pmatrix} \dfrac{4}{4+\lambda} \\ 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{s=1}\vec{\xi}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(P-\lambda \mathrm{I}\right)\vec{n}=\vec{\xi}: \quad \begin{pmatrix} -4-\lambda & 4 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}\vec{n}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\vec{n}=s\begin{pmatrix} \dfrac{4}{4+\lambda} \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{4+\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{s=0}\vec{n}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Θεμελιώδης Πίνακας</u>:

$$\Phi(t)=e^{\lambda t}\left(\vec{\xi},\vec{n}+t\vec{\xi}\right)=e^{-2t}\begin{pmatrix} 2 & -1+2t \\ 1 & t \end{pmatrix}$$

γ. $R=1$ *Ohm*, $C=\dfrac{1}{4}$ *Farad*, $L=2$ *Henry*

$$P=\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -\dfrac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta=8>0\Rightarrow \lambda_{1,2}=-2\mp\sqrt{2}$$

$$\left(P-\lambda_1 \mathrm{I}\right)\vec{\xi}_1=\vec{0}: \quad \begin{pmatrix} -4-\lambda_1 & 4 \\ -\dfrac{1}{2} & -\lambda_1 \end{pmatrix}\vec{\xi}_1=\vec{0}\Rightarrow$$

$$\vec{\xi}_1 = s\begin{pmatrix} \dfrac{4}{4+\lambda_1} \\ 1 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} \dfrac{4}{4-\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{s=1} \vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 4+2\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ανάλογα: $\left(P-\lambda_2 \mathrm{I}\right)\vec{\xi}_2 = \vec{0}:\ \vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 4-2\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>**Θεμελιώδης Πίνακας**</u>**:**

$$\Phi(t) = \left(e^{\lambda_1 t}\vec{\xi}_1, e^{\lambda_2 t}\vec{\xi}_2\right) = \begin{pmatrix} \left(4+2\sqrt{2}\right)e^{-\left(2+\sqrt{2}\right)t} & \left(4-2\sqrt{2}\right)e^{\left(-2+\sqrt{2}\right)t} \\ e^{-\left(2+\sqrt{2}\right)t} & \left(4+2\sqrt{2}\right)e^{\left(-2+\sqrt{2}\right)t} \end{pmatrix}$$

2.3.1. Λύση μη ομογενούς συστήματος (Πηγή $E \neq 0$)

$\mathrm{E}(t) = \dfrac{1}{2}\cos(2t)$ (αριθμητική εφαρμογή **β**)

<u>Μερική λύση μη ομογενούς</u>**:**

$$\begin{pmatrix} v_p \\ i_p \end{pmatrix} = \Phi(t)\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}: \quad \Phi(t)\begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{E}{L} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 2 & 2t-1 \\ 1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{2}\cos(2t) \end{pmatrix}$$

<u>Ορίζουσα</u> του $\Phi(t)$: $W = \det\Phi(t) = e^{-4t}$. Συνεπώς επιλύουμε το σύστημα με τη μέθοδο Crammer:

$$f_1(t)=\int \frac{W_1}{W}dt=\frac{1}{2}\int (2t-1)\mathrm{e}^{2t}\cos(2t)\,dt \xrightarrow[G.R.\ 2.667.6\ [1]]{G.R.\ 2.663.3\ [1]}$$

$$f_1(t)=\frac{\mathrm{e}^{2t}}{8}\Big[(2t-1)\cos(2t)+2(t-1)\sin(2t)\Big],$$

$$f_2(t)=\int \frac{W_2}{W}dt=-\int \mathrm{e}^{2t}\cos(2t)\,dt \xrightarrow{G.R.\ 2.663.3\ [1]}$$

$$f_2(t)=-\frac{\mathrm{e}^{2t}}{4}\big(\cos(2t)+\sin(2t)\big)$$

Άρα, η **γενική λύση** του μη ομογενούς συστήματος είναι:

$$\begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix}=\Phi\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}+\Phi\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}=$$

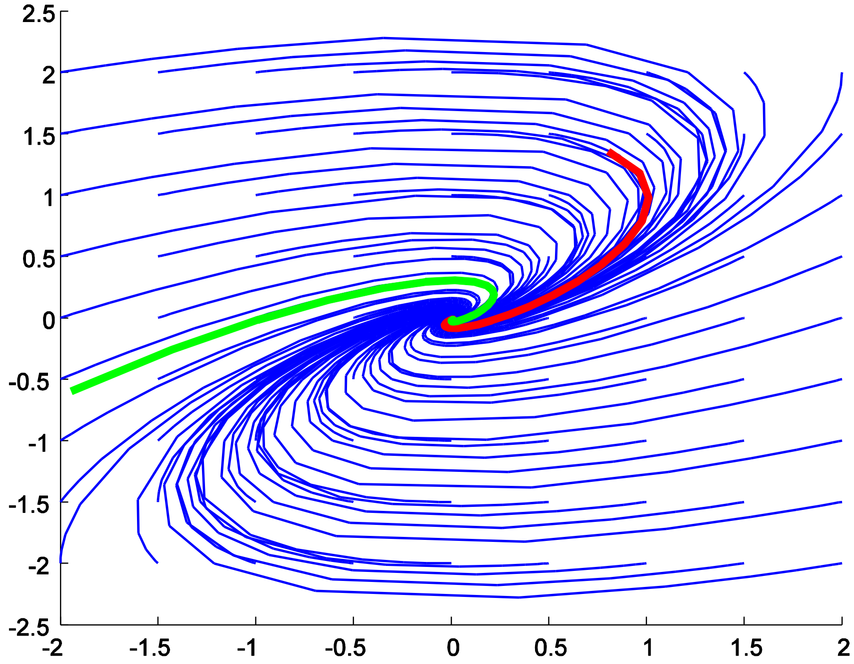
$$\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 2 & 2t-1 \\ 1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2t-1 \\ 1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(t-\dfrac{1}{2}\right)\cos(2t)+(t-1)\sin(2t) \\ -\cos(2t)-\sin(2t) \end{pmatrix}$$

ή

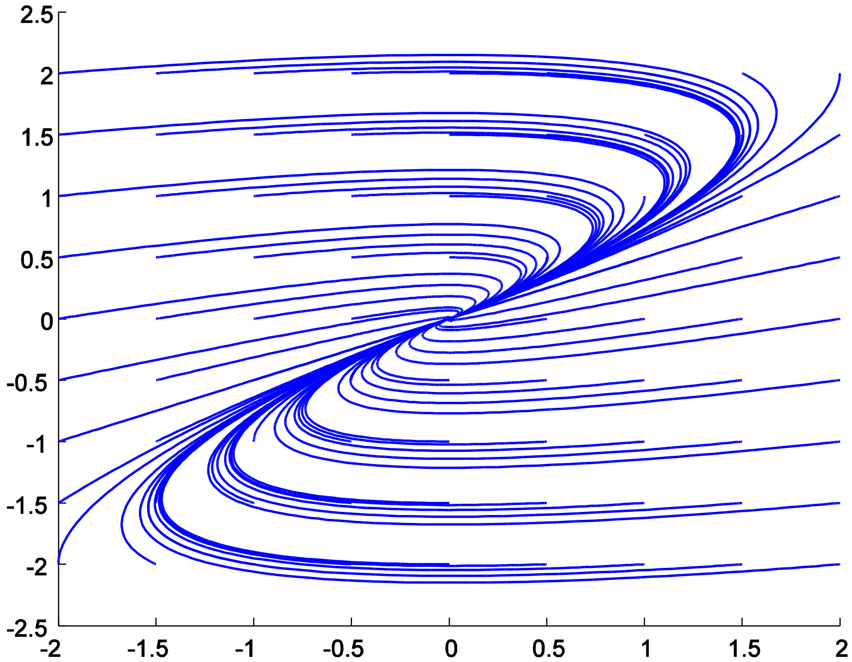
$$\begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix}=c_1\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}+c_2\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 2t-1 \\ t \end{pmatrix}-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \dfrac{1}{2}\cos(2t)+\sin(2t) \end{pmatrix}$$

3.4. ΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΛΥΣΕΩΝ

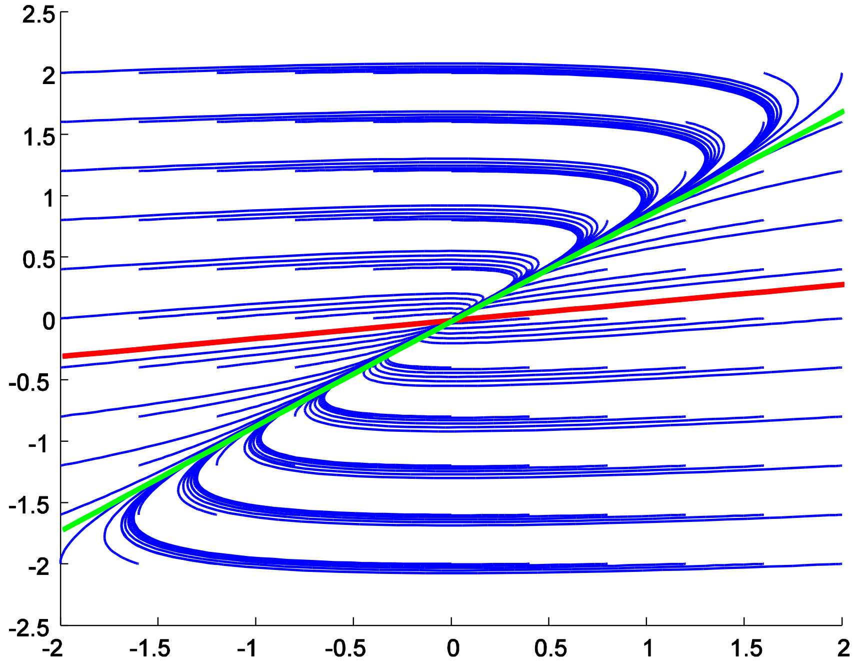
3.4.1. Χώρος φάσεων (Ε=0)



Εικόνα 1. Ευσταθής Εστία (Ε=0)

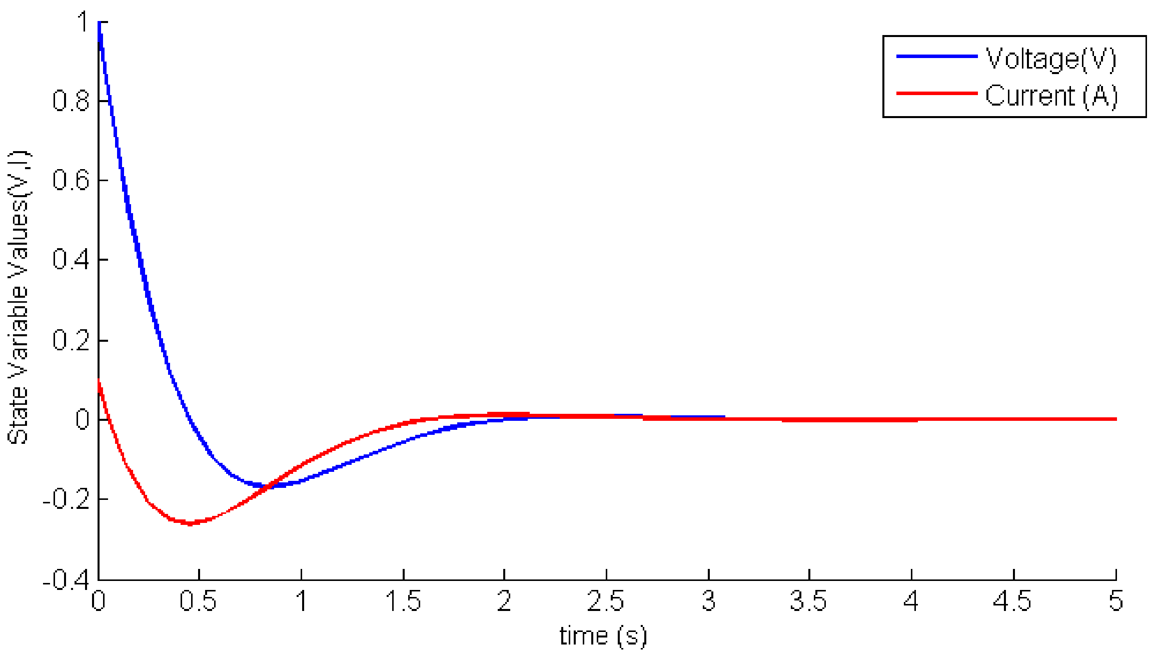


Εικόνα 2. Ευσταθής Εκφυλισμένος κόμβος (E=0)

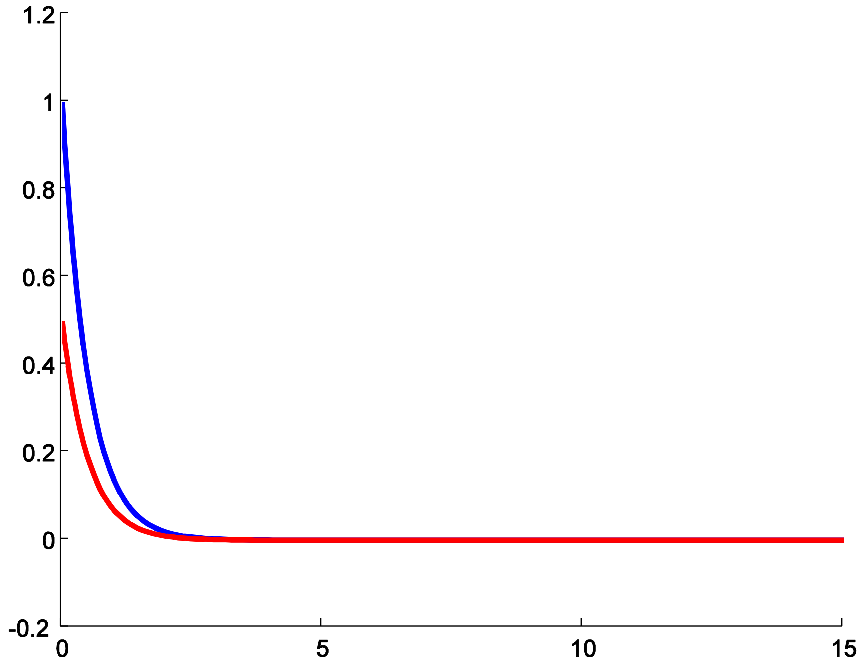


Εικόνα 3. Ευσταθής Κόμβος (E=0)

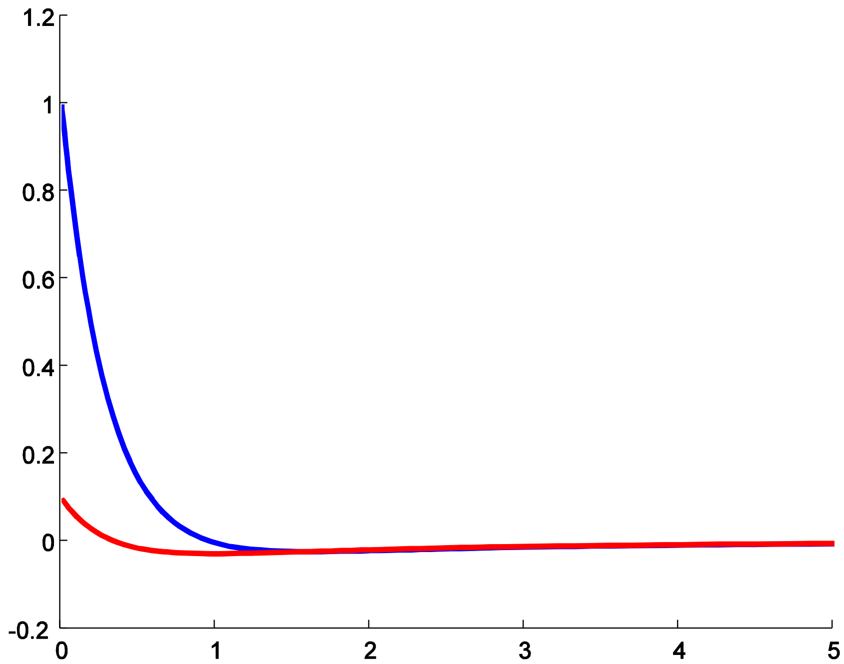
3.4.2. Χρονικές Αποκρίσεις



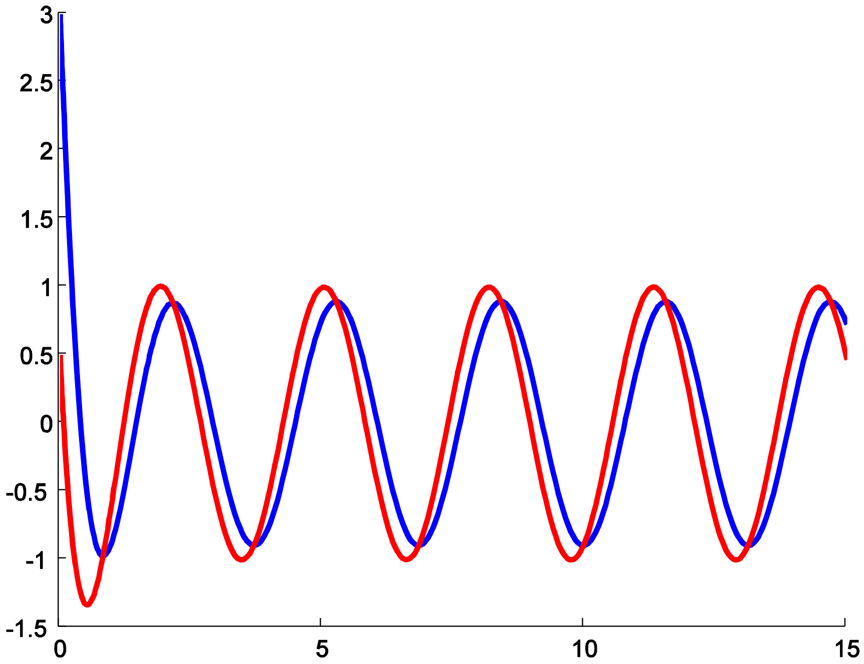
Εικόνα 4. Ευσταθής Εστία, v_0=1, i_0=0.1, E=0



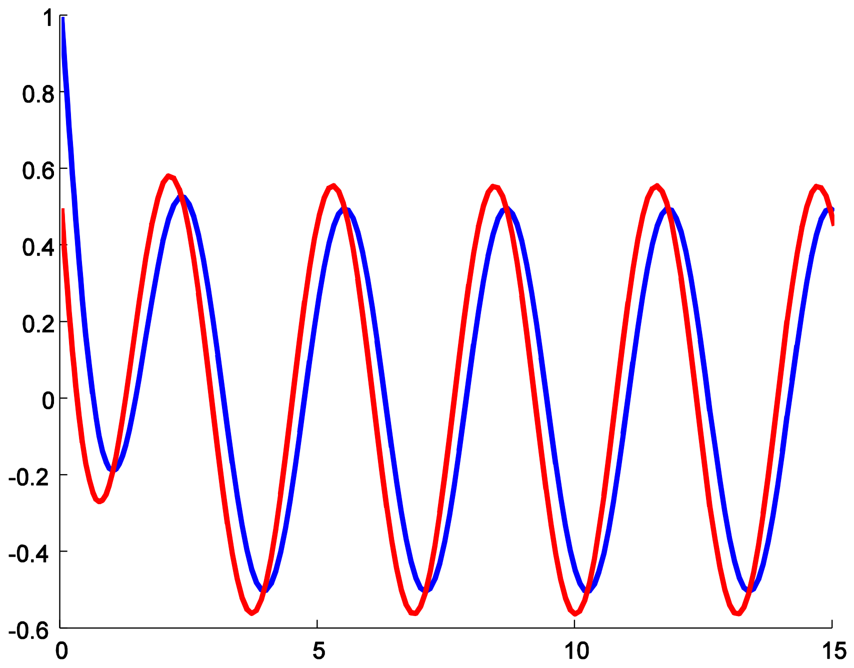
Εικόνα 5. Ευσταθής Εκφυλισμένος κόμβος, v_0=1, i_0=0.5, E=0



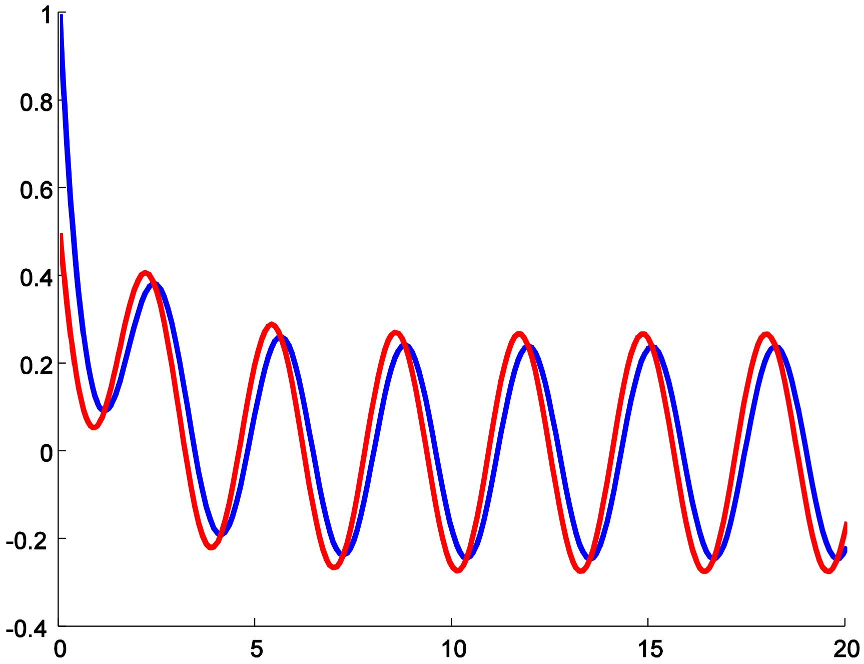
Εικόνα 6. Ευσταθής κόμβος, v_0=1, i_0=0.1, E=0



Εικόνα 7. Ευσταθής Εστία v_0=3, i_0=0.5, E=cos(2t)/4



Εικόνα 8. Εκφυλισμένος κόμβος v_0=1, i_0=0.5, E=cos(2t)/4



Εικόνα 9-Ευσταθής κόμβος, v_0=1, i_0=0.5, E=cos(2t)/4

Βιβλιογραφία

[1] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Tables of integrals, series and products*, Academic Press, New York and London 1965

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού ΕκδόσεωνΈργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης