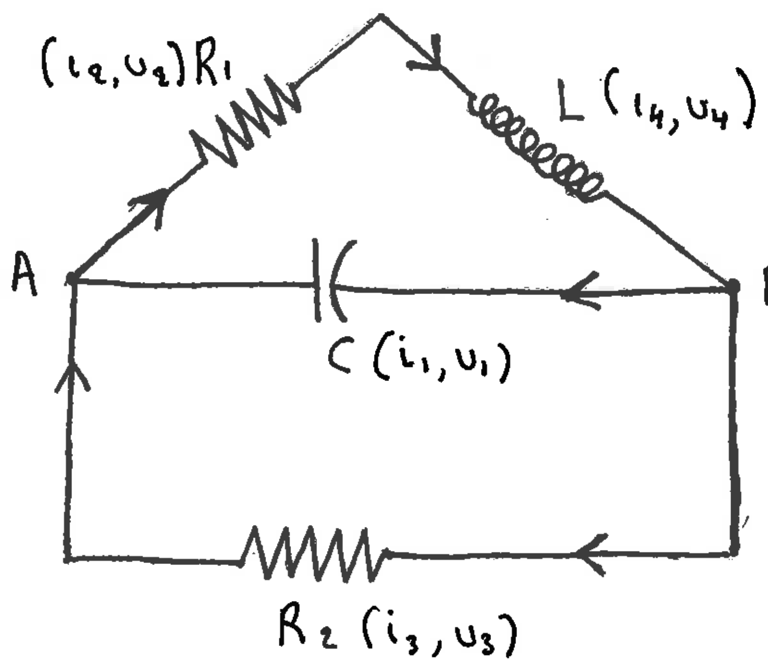
– Επίλυση κυκλώματος – Ε.Τ.Φ – Πορτραίτο φάσης

C_1



α) Διατυπώνουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που διέπει το κύκλωμα

1ος νόμος Kirchoff (i)

κόμβος A : $i_1 - i_2 + i_3 = 0$

" B : $-i_1 - i_3 + i_4 = 0$

Προκύπτει: $i_2 = i_4$

2ος νόμος Kirchoff (u)

άνω βρόγχος : $u_1 + u_2 + u_4 = 0$

κάτω " : $u_1 - u_3 = 0$

Σχέσεις διατάξεων : $u_1' = \frac{1}{C} i_1$, $i_4' = \frac{1}{L} u_4$, $u_2 = R_1 i_2$

$u_3 = R_2 i_3$

Άρα οι μεταβλητές κατάστασης είναι οι : u_1 και i_4

$$u_1' = \frac{1}{C}(-i_3 + i_4) = -\frac{1}{C}\frac{u_3}{R_2} + \frac{1}{C} i_4 = -\frac{1}{C R_2} u_1 + \frac{1}{C} i_4$$

$$i_4' = \frac{1}{L}(-u_1 - u_2) = -\frac{1}{L} u_1 - \frac{1}{L} R_1 i_2 = -\frac{1}{L} u_1 - \frac{R_1}{L} i_4$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} u' \\ i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{CR_2} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ i \end{pmatrix}, \quad u = u_1, \; i = i_4}$$

β) <u>Διερευνούμε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας (0,0)</u>

Χαρακτηριστική εξίσωση του P : $\det(P-\lambda I)=0$:

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}P\,\lambda + \det P = 0 \longrightarrow$$

$$\lambda^2 + \left(\frac{1}{CR_2} + \frac{R_1}{L}\right)\lambda + \frac{1}{CL}\left(\frac{R_1}{R_2}+1\right) = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{1}{CR_2} - \frac{R_1}{L}\right)^2 - \frac{4}{CL}$$

$\boxed{\Delta>0}$: $\left|\frac{1}{CR_2} - \frac{R_1}{L}\right| > \frac{2}{\sqrt{CL}} \longrightarrow$

$$2\lambda_{1,2} = -\left(\frac{1}{CR_2} + \frac{R_1}{L}\right) \mp \sqrt{\left(\frac{1}{CR_2} - \frac{R_1}{L}\right)^2 - \frac{4}{CL}}$$

το (0,0) είναι <u>ευσταθής κόμβος</u>

$\boxed{\Delta=0}$: $\left|\frac{1}{CR_2} - \frac{R_1}{L}\right| = \frac{2}{\sqrt{CL}} \longrightarrow$

$$2\lambda_1 = 2\lambda_2 = -\left(\frac{1}{CR_2} + \frac{R_1}{L}\right)$$

το (0,0) είναι <u>ευσταθής εκφυλισμένος κόμβος</u>

$\boxed{\Delta<0}$: $\left|\frac{1}{CR_2} - \frac{R_1}{L}\right| < \frac{2}{\sqrt{CL}} \longrightarrow$

$$2\lambda_{1,2} = -\left(\frac{1}{CR_2} + \frac{R_1}{L}\right) \pm i\sqrt{\frac{4}{CL} - \left(\frac{1}{CR_2} - \frac{R_1}{L}\right)^2}$$

το (0,0) είναι <u>ευσταθής εστία</u>

γ) Αριθμητική εφαρμογή - Επίλυση

$R_1 = R_2 = 4$ Ohm, $C = \frac{1}{2}$ Farad, $L = 8$ Henry

Έχουμε:

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \text{χ.ε.} \quad \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{2} = 0, \quad \Delta = -1 < 0 \rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = -0.5 \pm i\, 0.5$$

$$(P - \lambda_1 I)\bar{\xi}_1 = \bar{0} : \quad \left(\begin{array}{cc|c} -0.5-\lambda_1 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{8} & -0.5-\lambda_1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\bar{\xi}_1 = s \begin{pmatrix} \frac{2}{0.5+\lambda_1} \\ 1 \end{pmatrix} \overset{s=1}{=\!=\!=} \begin{pmatrix} \frac{2}{0.5 i} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Άρα, γιά το θεμελιώδη πίνακα $\Phi(t)$, έχουμε:

$$e^{\lambda_1 t}\bar{\xi}_1 = e^{-0.5t}(\cos 0.5t + i \sin 0.5t)\begin{pmatrix} -4i \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\boxed{\Phi(t) = e^{-0.5t}\begin{pmatrix} 4\sin 0.5t & -4\cos 0.5t \\ \cos 0.5t & \sin 0.5t \end{pmatrix}}$$

δηλαδή η γενική λύση είναι

$$\boxed{\begin{pmatrix} v_1(t) \\ i_4(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-0.5t}\begin{pmatrix} 4\sin 0.5t \\ \cos 0.5t \end{pmatrix} + c_2 e^{-0.5t}\begin{pmatrix} -4\cos 0.5t \\ \sin 0.5t \end{pmatrix}}$$

δ) Υπολογισμός όλων των τάσεων και εντάσεων του κυκλώματος

Τα υπόλοιπα μεγέθη προσδιορίζονται βάσει των σχέσεων που έχουμε (νόμοι Kirchhoff, σχέσεις διατάξεων):

$$u_3 = u_1, \quad i_2 = i_4, \quad u_2 = R_1 i_2 = R_1 i_4$$

$$u_4 = -u_1 - u_2 = -u_1 - R_1 i_4, \quad i_3 = \frac{u_3}{R_2} = \frac{u_1}{R_2}$$

$$i_1 = i_4 - i_3 = -\frac{u_1}{R_2} + i_4$$

δηλαδή προκύπτουν σαν γραμμικοί συνδυασμοί των μεταβλητών φάσης, (u_1, i_4).

ε) Λύσεις Π.Α.Τ

– Αν έχουμε αρχικές συνθήκες στις μεταβλητές φάσης

$$u_1(0) = u_0, \quad i_4(0) = i_0$$

από τη γενική λύση βρίσκουμε τα (c_1, c_2):

$$\Phi(0)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ i_0 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ i_0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$(c_1, c_2) = \left(i_0, -\frac{u_0}{4}\right) \quad \text{και άρα}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ i_4 \end{pmatrix} = e^{-0.5t}\begin{pmatrix} 4 i_0 \sin 0.5t + u_0 \cos 0.5t \\ i_0 \cos 0.5t - \frac{u_0}{4} \sin 0.5t \end{pmatrix}$$

– Αν έχουμε αρχικές συνθήκες σε άλλες μεταβλητές του κυκλώματος (η μία συνθήκη ή και οι δύο), με χρήση των αντίστοιχων εκφράσεων τους ως προς τα (u_1, i_4), προσδιορίζουμε τις $(u_{1,0}, i_{4,0})$ (αν κάτι τέτοιο είναι εφικτό).

π.χ αν έχουμε $u_1(0) = u_0$, $i_1(0) = i_0$, τότε

$$i_{4,0} = i_{1,0} + \frac{u_0}{R_2} = i_{1,0} + \frac{u_0}{4}$$

και συνεχίζουμε όπως πριν, με τη γενική λύση,
με Α.Σ: $(u_0, i_{4,0}) \longrightarrow \ldots\ (c_1, c_2) = \left(i_{4,0}, -\frac{u_0}{4}\right) \ldots$

στ) E.T.Φ (Εξίσωση τροχιάς φάσης)

Μέσω της (4) (σελ. 3^*_{ps}) καταλήγουμε στην E.T.Φ

$$\ln\sqrt{[(C-r)v_1 + Di_4]^2 + \mu^2 v_1^2} = \frac{r}{\mu}\arctan\frac{\mu v_1}{(C-r)v_1 + Di_4} + K$$

(η Εξ.(18), σελ. 19^*_{ps}) , όπου

$$\begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad r = -\frac{1}{2}, \quad \mu = \frac{1}{2} \quad \left(\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\right)$$

Έτσι, η εξίσωση τροχιάς στο επίπεδο φάσης (v_1, i_4) γράφεται :

$$\ln\sqrt{4i_4^2 + \frac{1}{4}v_1^2} = -\arctan\frac{v_1}{4i_4} + K \qquad T_{(v_1,i_4)}$$

– Αν θέλουμε να βρούμε την εξίσωση τροχιάς στο επίπεδο δύο οποιονδήποτε μεταβλητών του κυκλώματος (η μία από αυτές ή και οι δύο δεν είναι οι μεταβλητές του συστήματος, (v_1, i_4)), μέσω των αντίστοιχων εκφράσεών τους ως προς τα (v_1, i_4), επιλύουμε ως προς τα τελευταία και αντικαθιστούμε στην $T_{(v_1,i_4)}$. π.χ.

E.T.Φ στο επίπεδο (v_4, i_1)

Έχουμε ότι

$$\left.\begin{aligned} v_4 &= -v_1 - R_1 i_4 \\ i_1 &= -\frac{v_1}{R_2} + i_4 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} v_4 &= -v_1 - 4i_4 \\ i_1 &= -\frac{v_1}{4} + i_4 \end{aligned}\right\} \quad \text{ή} \quad \begin{aligned} v_1 + 4i_4 &= -v_4 \\ \frac{v_1}{4} - i_4 &= -i_1 \end{aligned}$$

Επιλύοντας ως προς (v_1, i_4), παίρνουμε

C6

$$u_1 = -\frac{u_4}{2} - 2i_1 \quad , \quad i_4 = -\frac{u_4}{8} + \frac{i_1}{2}$$

και αντικαθιστώντας στην $T(u_1, i_4)$, προκύπτει

$$\ln\sqrt{4\frac{1}{4}\left(\frac{u_4}{4}-i_1\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{u_4}{2}+2i_1\right)^2} = -\arctan\frac{\frac{u_4}{2}+2i_1}{\frac{u_4}{2}-2i_1} + K$$

ή

$$\ln\sqrt{\frac{u_4^2}{8}+2i_1^2} = -\arctan\frac{u_4+4i_1}{u_4-4i_1} + K \qquad T(u_4, i_1)$$

που είναι και η εξίσωση τροχιάς στο επίπεδο (u_4, i_1)

E.T.Φ στο επίπεδο (i_1, i_4)

Καθώς $i_1 = -\frac{u_1}{R_2} + i_4 = -\frac{u_1}{4} + i_4 \rightarrow u_1 = -4i_1 + 4i_4$

Αντικαθιστώντας στην $T(u_1, i_4)$, παίρνουμε

$$\ln\sqrt{4i_4^2 + \frac{1}{4}16(i_1-i_4)^2} = -\arctan\left(-\frac{i_1-i_4}{i_4}\right) + K$$

$$\ln 2\sqrt{2i_4^2 + i_1^2 - 2i_1 i_4} = \arctan\left(\frac{i_1-i_4}{i_4}\right) + K \qquad T(i_1, i_4)$$

που είναι η εξίσωση τροχιάς στο επίπεδο (i_1, i_4)

J) Πορτρέτα φάσης

Από την κάθε E.T.Φ, για κάθε ζευγάρι αρχικών τιμών $(u_{k,0}, i_{\lambda,0})$, $k,\lambda = 1,2,3,4$, υπολογίζουμε το K και χαράσσουμε γραφικά την αντίστοιχη καμπύλη της τροχιάς στο επίπεδο (u_k, i_λ), δημιουργώντας για διάφορα ζεύγη αρχικών τιμών ένα πορτρέτο φάσης.