- Ομογενής εξίσωση Euler 2ης τάξης

Εℓ1

$$\boxed{x^2 y''_{xx} + a x y'_x + b y = 0 \,, \quad y = y(x) \,, \quad x > 0}$$

Μέσω της αντικατάστασης

$$\left\langle x = e^t \rightarrow t = \ln x \,, \quad y(x) = w[t(x)] \right\rangle$$

έχουμε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dw}{dt}\frac{1}{x} \longrightarrow x y'_x = w'_t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dw}{dt}\frac{1}{x^2} + \frac{d^2w}{dt^2}\frac{1}{x^2} \longrightarrow x^2 y''_{xx} = w''_{tt} - w'_t$$

και η εξίσωση γίνεται:

$w''_{tt} + (a-1)\, w'_t + b w = 0$ (σταθερών συντελεστών)

με χ.ε: $\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0$, $\Delta = (a-1)^2 - 4b$

με λύσεις $\left(w(t) \xrightarrow{t = t(x)} y(x) \right)$:

$\Delta > 0$: $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 - a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

$$w(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \longrightarrow y(x) = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2}$$

$\Delta = 0$: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \dfrac{1-a}{2}$

$$w(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{\lambda t} \longrightarrow y(x) = (c_1 + c_2 \ln x)\, x^{\lambda}$$

$\Delta < 0$: $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 - a \pm i\sqrt{-\Delta}}{2} = r \pm i\omega$, $r = \dfrac{1-a}{2}$, $\omega = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}$

$$w(t) = e^{rt}\left[c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)\right] \longrightarrow$$

$$y(x) = x^{r}\left[c_1 \cos(\omega \ln x) + c_2 \sin(\omega \ln x)\right]$$

Για την Euler $3^{ης}$ τάξης : Εl₂

$$x^3 y'''_{xxx} + a x^2 y''_{xx} + b x y'_x + c y = 0 \ , \quad y = y(x), \quad x > 0$$

μέσω της ίδιας αντικατάστασης, έχουμε ανάλογα

$$\frac{d^3 y}{d x^3} = \frac{dw}{dt}\frac{2}{x^3} - \frac{d^2 w}{dt^2}\frac{3}{x^3} + \frac{d^3 w}{dt^3}\frac{1}{x^3} \rightarrow$$

$$x^3 y'''_{xxx} = w'''_{ttt} - 3 w''_{tt} + 2 w'_t$$

και η εξίσωση γίνεται:

$$w'''_{ttt} + (a-3) w''_{tt} - (a-b-2) w'_t + c w = 0$$ (σταθερών συντελ.)

με Χ.Ε: $\lambda^3 + (a-3)\lambda^2 - (a-b-2)\lambda + c = 0$ (κυβική)

οπότε για τις λύσεις ($w(t) \xrightarrow{t = t(x)} y(x)$ έχουμε:

Αν λ πραγματική ρίζα πολ/τητας 1 : $e^{\lambda t} \rightarrow x^{\lambda}$

" " " " " 2 : $(e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}) \rightarrow$

$(x^{\lambda}, \ln x . x^{\lambda})$

" " " " " 3 : $(e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}) \rightarrow$

$(x^{\lambda}, \ln x . x^{\lambda}, \ln^2 x . x^{\lambda})$

Αν $\lambda_{1,2}$ ζεύγος συζυγών μιγαδικών ριζών $r \pm i\omega$:

$$(e^{rt}\cos\omega t, \ e^{rt}\sin\omega t) \rightarrow (x^r \cos(\omega \ln x), \ x^r \sin(\omega \ln x))$$

Γενικότερα γιά $n \geq 4$, αν $\lambda_{1,2}$ ζεύγος συζ. μιγ. ριζών $r \pm i\omega$ πολ/τητας k, $2 \leq k \leq [\frac{n}{2}]$:

$$(e^{rt}\cos\omega t, \ e^{rt}\sin\omega t, \ t e^{rt}\cos\omega t, \ t e^{rt}\sin\omega t, \ \dots, \ t^{k-1} e^{rt}\cos\omega t, \ t^{k-1} e^{rt}\sin\omega t)$$

$$\rightarrow (x^r\cos(\omega\ln x), \ x^r\sin(\omega \ln x), \ \ln x . x^r \cos(\omega \ln x), \ \ln x . x^r \sin(\omega \ln x), \ \dots$$

$$\dots, \ \ln^{k-1} x . x^r \cos(\omega \ln x), \ \ln^{k-1} x . x^r \sin(\omega \ln x))$$