ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΑ ΥΠΟΛΟΙΠΑ

Έστω $f(z)$ μιγαδική συνάρτηση και $z_0 \in \mathbb{C}$ μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της $f(z)$. Τότε, ως γνωστό, υπάρχει $R>0$ τέτοιο ώστε η $f(z)$ να είναι ολόμορφη στο δακτύλιο $\Delta = \{z \in \mathbb{C} / 0 < |z - z_0| < R\}$ (εν συντομία θα γράφουμε στο δακτύλιο $0 < |z - z_0| < R$) και επομένως η συνάρτηση $f(z)$ έχει στο δακτύλιο Δ ανάπτυγμα Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} (z - z_0)^{-n}, \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C} \text{ με } 0 < |z - z_0| < R$$

Αποδεικνύεται ότι οι συντελεστές της παραπάνω σειράς Laurent δίνονται από τον τύπο

$$\boxed{\alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$$

όπου C είναι μία (οποιαδήποτε) απλή, κλειστή, τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμη και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη του δακτυλίου Δ που περιέχει το z_0 στο εσωτερικό της.

<u>Παρατήρηση 1:</u> Από την παραπάνω σχέση έχουμε αμέσως ότι

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \Leftrightarrow \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = 2\pi i \alpha_n, \ n \in \mathbb{Z}$$

Ο προηγούμενος τύπος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$ (εφόσον βέβαια πληρούνται οι προϋποθέσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω για τη συνάρτηση $f(z)$ και την καμπύλη C). Στην πράξη συνήθως εμφανίζονται ολοκληρώματα της μορφής $\int_C f(z) dz$. Οπότε από τον προηγούμενο τύπο για $n = -1$ έχουμε αμέσως ότι

$$\alpha_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz \Leftrightarrow \int_C f(z)dz = 2\pi i \alpha_{-1}$$

Όμως $\alpha_{-1} = \mathrm{Res}(f, z_0)$. Άρα

$$\boxed{\int_C f(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, z_0)}$$

Οι παραπάνω τύποι συνήθως εφαρμόζονται για καμπύλη C κάποιον από τους θετικά προσανατολισμένους κύκλους $|z - z_0| = r$ με $0 < r < R$.

Είναι φανερό ότι για να εφαρμόσουμε τους παραπάνω τύπους πρέπει πρώτα να έχουμε βρει το ανάπτυγμα Laurent της $f(z)$ στο δακτύλιο Δ - το $\mathrm{Res}(f, z_0)$ μπορούμε προφανώς να το υπολογίσουμε και με κάποιον από τους τρόπους που περιγράφηκαν στο αρχείο (MA8). □

Από τον παραπάνω τύπο και το Θεώρημα 15 του αρχείου (MA10) έχουμε αμέσως το εξής:

<u>**Θεώρημα 2:**</u> Έστω D απλό συνεκτικό πεδίο του $\mathbb{C}$, $z_1, z_2, \dots, z_n \in D$ (n θετικός ακέραιος), $f(z)$ συνάρτηση ολόμορφη στο σύνολο $D - \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ και z_1, z_2, ..., z_n μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της $f(z)$. Έστω ακόμη C μία απλή, κλειστή, τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμη και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη του $D - \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ η οποία περιέχει στο εσωτερικό της τα z_1, z_2, ..., z_n. Τότε

$$\boxed{\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{\kappa=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_\kappa)} \qquad \square$$

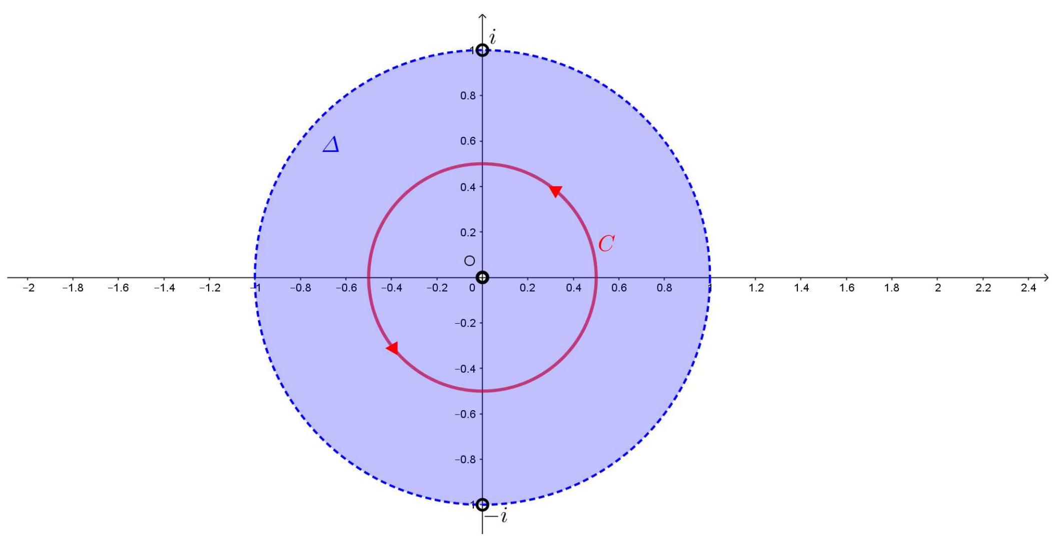
Στην πράξη το προηγούμενο Θεώρημα εφαρμόζεται συνήθως για καμπύλη C κατάλληλους θετικά προσανατολισμένους κύκλους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_C \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+1} dz$, όπου C είναι η απλή, κλειστή και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη $|z| = \frac{1}{2}$.

Λύση:

Επειδή $z^2+1 = (z-i)(z+i)$, τότε έχουμε αμέσως ότι το πεδίο ορισμού της $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+1}$ είναι το σύνολο $\mathbb{C} - \{-i, 0, i\}$ το οποίο είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και στο οποίο η $f(z)$ είναι ολόμορφη (ως πράξεις ολόμορφων συναρτήσεων). Προφανώς οι μιγαδικοί $-i$, 0, i είναι τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της $f(z)$. Η καμπύλη $|z| = \frac{1}{2}$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\frac{1}{2}$. Από το παρακάτω σχήμα



έχουμε τώρα αμέσως ότι

- η $f(z)$ είναι ολόμορφη στο δακτύλιο $0 < |z| < 1$ (μπλε περιοχή)

- ο δακτύλιος Δ είναι απλό συνεκτικό πεδίο του $\mathbb{C}$
- η καμπύλη C (κόκκινος κύκλος) είναι απλή, κλειστή, τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμη και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη του δακτυλίου Δ που στο εσωτερικό της περιέχει το μεμονωμένο ανώμαλα σημείο $z=0$ της $f(z)$.

Άρα

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,0) \Leftrightarrow \int_C \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+1}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,0) \qquad (1)$$

- Το ανάπτυγμα Laurent της $e^{\frac{1}{z}}$ στο δακτύλιο Δ είναι

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} = 1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\ldots \qquad (2)$$

- Το ανάπτυγμα Laurent (Maclaurin) της $\frac{1}{z^2+1}$ στο δακτύλιο Δ είναι

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{1-\left(-z^2\right)} \underset{\left(\left|-z^2\right|=|z|^2<1\right)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left(-z^2\right)^n = 1-z^2+z^4-z^6+z^8-\ldots \qquad (3)$$

Τότε στο δακτύλιο Δ έχουμε

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+1} = e^{\frac{1}{z}}\cdot\frac{1}{z^2+1} \underset{((2),(3))}{=} \left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\ldots\right)\cdot\left(1-z^2+z^4-z^6+z^8-\ldots\right)$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει το ανάπτυγμα Laurent της $f(z)$ στο δακτύλιο Δ. Υπολογίζοντας το συντελεστή α_{-1} του $\frac{1}{z}$ βρίσκουμε ότι:

$$\alpha_{-1} = 1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{9!}-\ldots. = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} = \sin 1$$

Άρα

$$\mathrm{Res}(f,0) = \sin 1$$

Τότε από την (1) έπεται αμέσως ότι

$$\int_C \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+1}dz = 2\pi i \sin 1 \qquad \square$$

2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_C \frac{1}{z^2 - z}dz$, όπου C είναι η απλή, κλειστή και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη $|2z-1| = 2$.

<u>Λύση:</u> Παρατηρούμε ότι

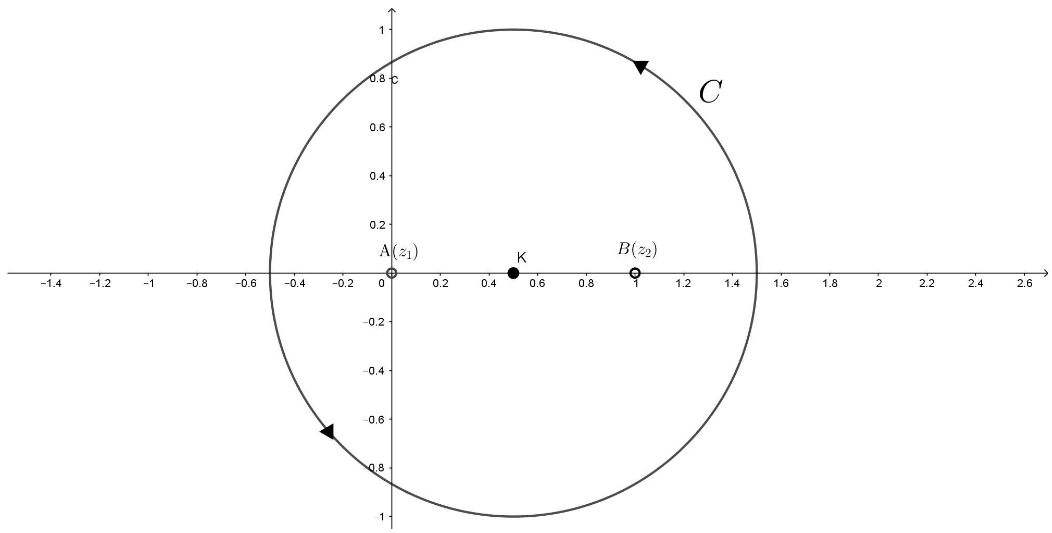
$$|2z-1| = 2 \Leftrightarrow \left|z - \frac{1}{2}\right| = 1$$

Άρα η καμπύλη C είναι ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος με κέντρο $K\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ και ακτίνα 1.

Επειδή

$$z^2 - z = 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow z = 0 \text{ ή } z = 1$$

έπεται αμέσως ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(z) = \frac{1}{z^2 - z}$ είναι το πεδίο $\mathbb{C} - \{0,1\}$ στο οποίο η $f(z)$ είναι ολόμορφη (ως ρητή συνάρτηση). Προφανώς οι μιγαδικοί 0, 1 είναι τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της $f(z)$. Επίσης οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των μιγαδικών $z_1 = 0$ και $z_2 = 1$ βρίσκονται στο εσωτερικό της καμπύλης C:



Τότε από το Θεώρημα 2 έχουμε αμέσως ότι

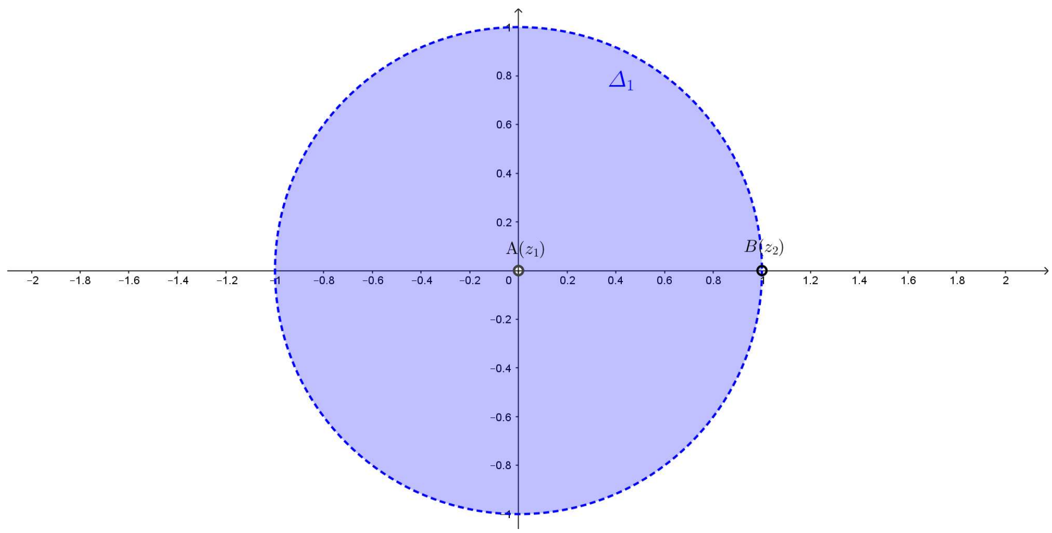
$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\big(\mathrm{Res}(f,0)+\mathrm{Res}(f,1)\big) \qquad (1)$$

Θα υπολογίσουμε τώρα τα $\mathrm{Res}(f,0)$, $\mathrm{Res}(f,1)$. Παρατηρούμε ότι

$$f(z)=\frac{1}{z^2-z}=\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}$$

- $\underline{\mathrm{Res}(f,0)}$:

  Θα υπολογίσουμε το ανάπτυγμα Laurent της $f(z)$ στο δακτύλιο $0<|z|<1$ (γιατί;), έστω Δ_1:



Έστω τώρα $z \in \mathbb{C}$ με $0 < |z| < 1$. Τότε:

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} \underset{(|z|<1)}{=} -\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1) z^n$$

Επομένως το ανάπτυγμα Laurent της $f(z)$ στο δακτύλιο Δ_1 είναι

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1) z^n + \frac{-1}{z}$$

Συνεπώς $\alpha_{-1} = -1$ και άρα

$$\operatorname{Res}(f,0) = -1 \qquad (2)$$

Παρατήρηση: Το $\operatorname{Res}(f,0)$ μπορεί να υπολογιστεί και ως εξής:

Επειδή

$$\lim_{z\to 0}(zf(z)) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{z-1} = -1 \neq 0$$

τότε έχουμε αμέσως ότι το 0 είναι απλός πόλος της $f(z)$ και άρα από τον τύπο

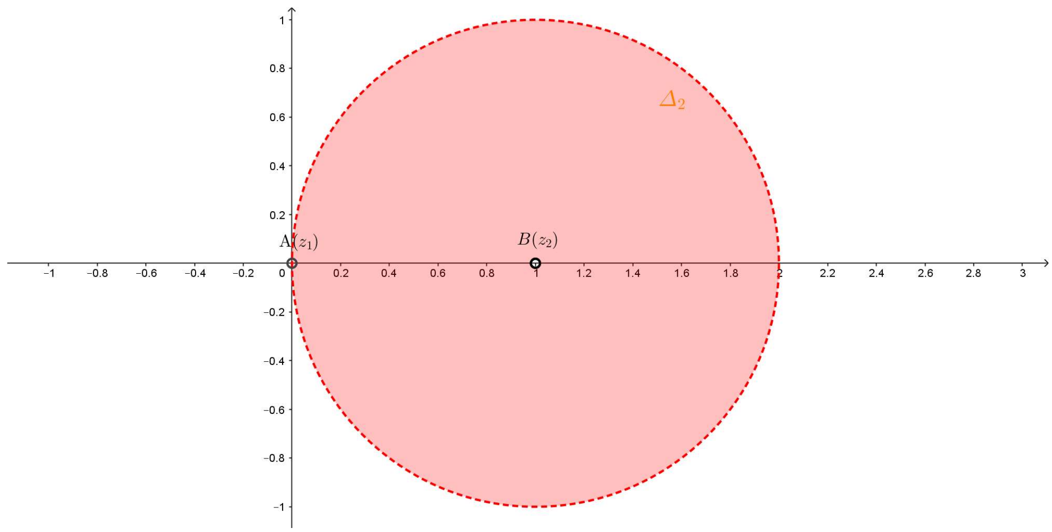
$$\operatorname{Res}(f,z_0) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{(\kappa-1)!}\frac{d^{\kappa-1}}{dz^{\kappa-1}}\left[(z-z_0)^{\kappa} f(z)\right]\right)$$

για $z_0 = 0$ και $\kappa = 1$ έπεται

$$\operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0}\left(zf(z)\right) = \ldots = -1$$

- $\underline{\operatorname{Res}(f,1):}$

  Θα υπολογίσουμε το ανάπτυγμα Laurent της $f(z)$ στο δακτύλιο $0<|z-1|<1$ (γιατί;), έστω Δ_2:



Έστω τώρα $z \in \mathbb{C}$ με $0<|z-1|<1$. Τότε:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1)+1} = \frac{1}{1-(-(z-1))} \underset{(|-(z-1)|=|z-1|<1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left(-(z-1)\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z-1)^n$$

Επομένως το ανάπτυγμα Laurent της $f(z)$ στο δακτύλιο Δ_2 είναι

$$f(z) = \frac{1}{z^2-z} = \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-1)^n + \frac{1}{z-1}$$

Συνεπώς $\alpha_{-1} = 1$ και άρα

$$\operatorname{Res}(f,1) = 1 \qquad (3)$$

Παρατήρηση: Το $\operatorname{Res}(f,1)$ μπορεί να υπολογιστεί και ως εξής:

Επειδή

$$\lim_{z\to 1}\left((z-1)f(z)\right)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}=1\neq 0$$

τότε έχουμε αμέσως ότι το 1 είναι απλός πόλος της $f(z)$ και άρα

$$\operatorname{Res}(f,1)=\lim_{z\to 0}\left((z-1)f(z)\right)=\ldots=1$$

Τότε από τις (1), (2), (3) έχουμε ότι

$$\int_C f(z)dz=2\pi i(-1+1)=0$$

Τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα $\operatorname{Res}(f,0)$, $\operatorname{Res}(f,1)$ *μπορούν να υπολογιστούν και από την Πρόταση 11 του αρχείου (MA8).* □

3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\displaystyle\int_C \frac{e^{iz}}{z^4+2z^2+1}dz$, όπου C είναι η απλή, κλειστή και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη $|z|=2$.

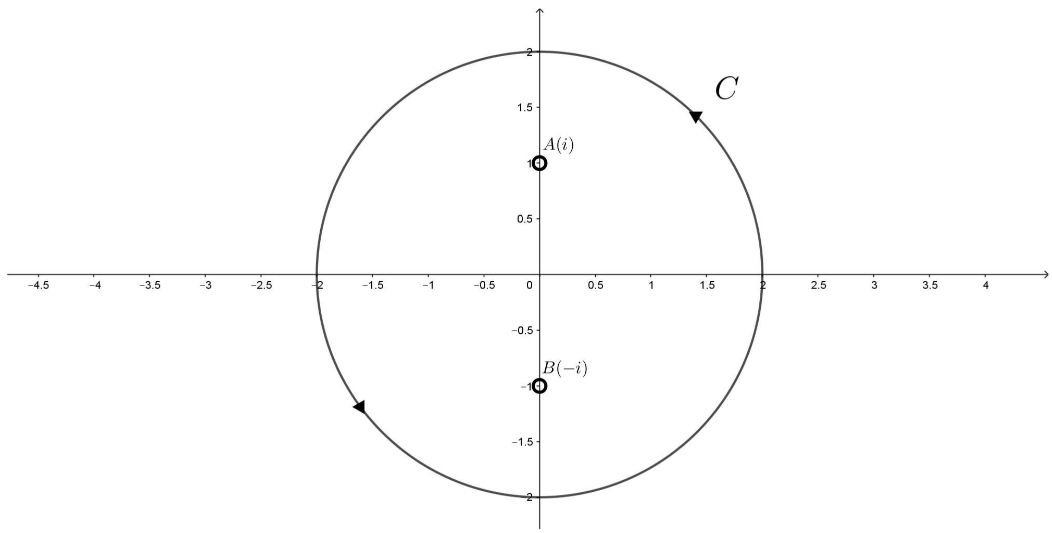
<u>Λύση:</u>

Επειδή

$$z^4+2z^2+1=0\Leftrightarrow\left(z^2+1\right)^2=0\Leftrightarrow z^2+1=0\Leftrightarrow z^2=-1\Leftrightarrow z=\pm i$$

έπεται αμέσως ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^4+2z+1}$ είναι το πεδίο $\mathbb{C}-\{-i,i\}$ στο οποίο η $f(z)$ είναι ολόμορφη (ως ρητή συνάρτηση). Προφανώς οι μιγαδικοί $-i$, i είναι τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της $f(z)$.

Η καμπύλη C είναι ο κύκλος με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα 2. Επίσης οι εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο των μιγαδικών $-i$, i βρίσκονται στο εσωτερικό της καμπύλης C:



Τότε από το Θεώρημα 2 έχουμε αμέσως ότι

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\big(\mathrm{Res}(f,-i)+\mathrm{Res}(f,i)\big) \qquad (1)$$

Θα υπολογίσουμε τώρα τα $\mathrm{Res}(f,-i)$, $\mathrm{Res}(f,i)$. Παρατηρούμε ότι

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z^4+2z^2+1}=\frac{e^{iz}}{\left(z^2+1\right)^2}=\frac{e^{iz}}{(z-i)^2(z+i)^2}$$

- $\underline{\mathrm{Res}(f,-i)}$:

  Επειδή

$$\lim_{z\to -i}\left((z+i)^2 f(z)\right)=\lim_{z\to -i}\frac{e^{iz}}{(z-i)^2}=\ldots=-\frac{e}{4}\neq 0$$

  τότε έχουμε αμέσως ότι το $-i$ είναι πόλος της $f(z)$ τάξης $\kappa=2$. Άρα από τον τύπο

$$\mathrm{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{(\kappa-1)!}\frac{d^{\kappa-1}}{dz^{\kappa-1}}\left[(z-z_0)^{\kappa} f(z)\right]\right)$$

για $z_0=-i$ και $\kappa=2$ έπεται αμέσως ότι

$$\operatorname{Res}(f,-i)=\lim_{z\to -i}\left(\frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[(z+i)^2 f(z)\right]\right)=\lim_{z\to -i}\left(\frac{e^{iz}}{(z-i)^2}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to -i}\frac{ie^{iz}(z-i)^2-2e^{iz}(z-i)}{(z-i)^4}=\ldots=0 \qquad (2)$$

- $\underline{\operatorname{Res}(f,i)}$:

  Επειδή

$$\lim_{z\to i}\left((z-i)^2 f(z)\right)=\lim_{z\to i}\frac{e^{iz}}{(z+i)^2}=\ldots=-\frac{1}{4e}\neq 0$$

τότε έχουμε αμέσως ότι το i είναι πόλος της $f(z)$ τάξης $\kappa=2$. Άρα από τον τύπο

$$\operatorname{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{(\kappa-1)!}\frac{d^{\kappa-1}}{dz^{\kappa-1}}\left[(z-z_0)^\kappa f(z)\right]\right)$$

για $z_0=i$ και $\kappa=2$ έπεται αμέσως ότι

$$\operatorname{Res}(f,i)=\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left[(z-i)^2 f(z)\right]\right)=\lim_{z\to i}\left(\frac{e^{iz}}{(z+i)^2}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{ie^{iz}(z+i)^2-2e^{iz}(z+i)}{(z+i)^4}=\ldots=-\frac{1}{2e}i \qquad (3)$$

Τότε από τις (1), (2), (3) έχουμε ότι

$$\int_C f(z)\,dz=2\pi i\left(0-\frac{1}{2e}i\right)=\frac{\pi}{e} \qquad \square$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int_C z^2\sin\frac{1}{z}dz$, όπου C είναι μία απλή, κλειστή, τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμη και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη η οποία περιέχει το 0 στο εσωτερικό της.

2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int_C \frac{ze^z}{z^2-1}dz$, όπου C είναι η απλή, κλειστή και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη με καρτεσιανή εξίσωση $x^2+4y^2=4$. □

Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(3+2\cos t)^2}$.

Λύση:

Σε προηγούμενες θεωρήσεις καταλήγαμε από μιγαδικά ολοκληρώματα σε πραγματικά. Εδώ θα κάνουμε την ανάποδη διαδικασία, δηλ. θα βρούμε μία μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ και μία απλή, κλειστή και συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη C (είναι ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος $|z|=1$) έτσι ώστε το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C f(z)dz$ να αναχθεί στο πραγματικό ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(3+2\cos t)^2}$.

Θεωρούμε τη μοναδιαίο κύκλο (C): $|z|=1$ ο οποίος ως γνωστόν έχει παραμετρική εξίσωση

$$z=z(t)=e^{it},\ t\in[0,2\pi]$$

Τότε

- $$\cos t=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}=...=\frac{e^{2ti}+1}{2e^{it}}=\frac{z^2+1}{2z}$$

- $$\frac{dz}{dt}=ie^{it}\Leftrightarrow dz=ie^{it}dt\Leftrightarrow dt=\frac{dz}{ie^{it}}\Leftrightarrow dt=\frac{dz}{iz}$$

Άρα

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(3+2\cos t)^2}=\int_C\frac{1}{\left(3+2\frac{z^2+1}{2z}\right)^2}\frac{dz}{iz}=...=-i\int_C\frac{z}{(z^2+3z+1)^2}dz \qquad (1)$$

Θέτουμε

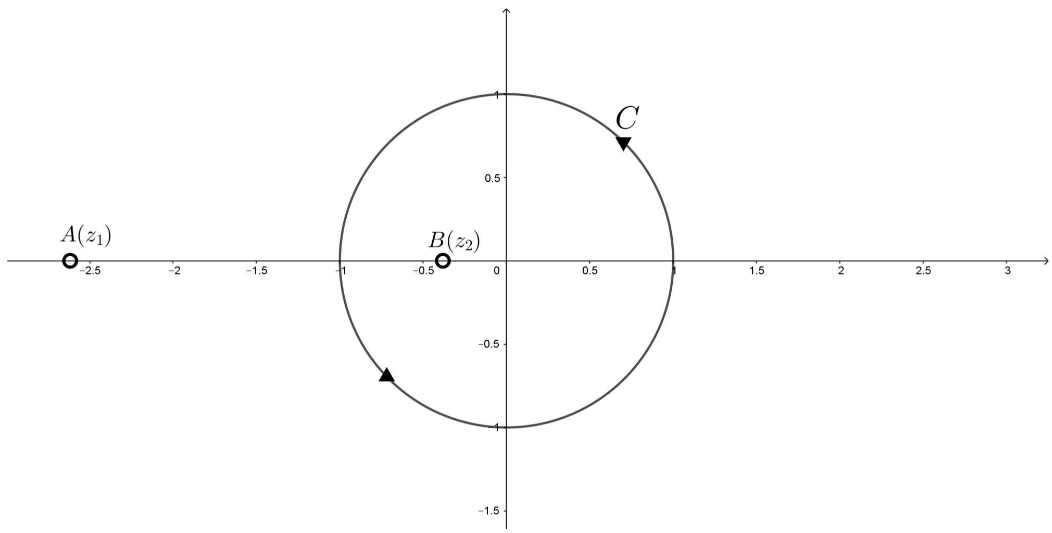
$$f(z)=\frac{z}{(z^2+3z+1)^2}$$

και επομένως πρέπει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_C f(z)dz$. Για τον υπολογισμό του προηγούμενου ολοκληρώματος θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων.

Επειδή

$$z^2+3z+1=0\Leftrightarrow...\Leftrightarrow z_1=\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\ z_2=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$$

έπεται αμέσως ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(z)=\frac{z}{(z^2+3z+1)^2}$ είναι το πεδίο $\mathbb{C}-\{z_1,z_2\}$ στο οποίο η $f(z)$ είναι ολόμορφη (ως ρητή συνάρτηση). Προφανώς οι μιγαδικοί z_1, z_2 είναι τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της $f(z)$. Από αυτά μόνο το z_2 είναι στο εσωτερικό της C:



Τότε από το Θεώρημα 2 έχουμε αμέσως ότι

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_2) \qquad (2)$$

Επειδή προφανώς $z^2 + 3z + 1 = (z - z_1)(z - z_2)$, τότε έχουμε

$$\lim_{z\to z_2}\left((z-z_2)^2 f(z)\right) = \lim_{z\to z_2}\left((z-z_2)^2 \frac{z}{(z-z_1)^2 (z-z_2)^2}\right) = \lim_{z\to z_2}\frac{z}{(z-z_1)^2} = \ldots = \frac{-3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \neq 0$$

Άρα το z_2 είναι πόλος της $f(z)$ τάξης 2. Συνεπώς

$$\operatorname{Res}(f, z_2) = \lim_{z\to z_2}\left((z-z_2)^2 f(z)\right)' = \lim_{z\to z_2}\left(\frac{z}{(z-z_1)^2}\right)' = \ldots = \lim_{z\to z_2}\frac{-z-z_1}{(z-z_1)^3} = -\frac{z_2+z_1}{(z_2-z_1)^3} = \ldots = \frac{3}{5\sqrt{5}}$$

Τότε από την (2) έχουμε αμέσως ότι

$$\int_C f(z)\,dz = \frac{6\pi i}{5\sqrt{5}}$$

και επομένως από την (1) έπεται ότι $I = \dfrac{6\pi}{5\sqrt{5}}$. □

Επειδή

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \ldots \underset{(z=e^{it})}{=} \frac{z^2 - 1}{2iz}$$

τότε την προηγούμενη μέθοδο μπορούμε την εφαρμόσουμε γενικότερα για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt$$

όπου η $R(x, y)$ είναι μία ρητή συνάρτηση των x, y με την προϋπόθεση ότι η μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ που θεωρούμε δεν έχει πόλους πάνω στο μοναδιαίο κύκλο.

Άσκηση: Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 + \sin t}$. □

Γενικευμένα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων

Έστω $f : [\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε αν το όριο $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_\alpha^b f(x)\, dx$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο καλείται **γενικευμένο ολοκλήρωμα της f πάνω στο** $[\alpha, +\infty)$ (ή αλλιώς γενικευμένο ολοκλήρωμα 1ου είδους της f) και συμβολίζεται με $\int_\alpha^{+\infty} f(x)\, dx$. Σε αυτήν την περίπτωση συνήθως λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_\alpha^{+\infty} f(x)\, dx$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ (στην αντίθετη περίπτωση λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα αποκλίνει - ή δεν συγκλίνει στο $\mathbb{R}$).

Με όμοιο τρόπο ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\alpha} f(x)\, dx$.

Αν τώρα για μία $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx$ και $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$ για κάποιο $\alpha\in\mathbb{R}$ συγκλίνουν στο $\mathbb{R}$, τότε ορίζουμε $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx+\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$. Ο προηγούμενος ορισμός είναι ανεξάρτητος από το $\alpha\in\mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι αν για κάποιο $\alpha\in\mathbb{R}$ τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx$ και $\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνουν στο $\mathbb{R}$, τότε για κάθε $b\in\mathbb{R}$ έχουμε ότι

- τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ και $\int_{b}^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνουν στο $\mathbb{R}$, και
- $\int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx+\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{b} f(x)dx+\int_{b}^{+\infty} f(x)dx$.

Όταν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ορίζεται, τότε λέμε συνήθως ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

Επίσης αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, και τα γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re}(f(x))dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Im}(f(x))dx$ συγκλίνουν στο $\mathbb{R}$, τότε ορίζουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re}(f(x))dx+i\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Im}(f(x))dx$$

Θεώρημα 3: Έστω $P(z)$, $Q(z)$ πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές τέτοια ώστε:

- $\deg(P(z))+2\le\deg(Q(z))$, και
- $Q(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Θέτουμε $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$. Έστω z_1, z_2, ..., z_n οι πόλοι της $f(z)$ που βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο (ισοδύναμα $\operatorname{Im}(z_\kappa)>0$, $\kappa=1,2,...,n$). Τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=2\pi i\sum_{\kappa=1}^{n}\operatorname{Res}(f,z_\kappa)\qquad\square$$

Παρατήρηση 4: Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3, αν η C είναι μία απλή, κλειστή, τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμη και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη του άνω ημιεπιπέδου η οποία περιέχει στο εσωτερικό της τους πόλους της $f(z)$ που βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο z_1, z_2, ..., z_n, τότε από τα Θεωρήματα 3 και 2 έχουμε αμέσως ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int_C f(z)dz\qquad\square$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(x^2+2x+2)(x^2+4)}dx$$

Λύση:

Θέτουμε

$$P(z)=z,\quad Q(z)=(z^2+2z+2)(z^2+4)\quad\text{και}\quad f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{z}{(z^2+2z+2)(z^2+4)}$$

Παρατηρούμε ότι

- $P(z)$, $Q(z)$ πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές
- $\deg(P(z))=1$, $\deg(Q(z))=4$. Άρα $\deg(P(z))+2=3\le 4=\deg(Q(z))$

- $$Q(z)=0 \Leftrightarrow \left(z^2+2z+2\right)\left(z^2+4\right)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} z^2+2z+2=0 \\ \text{ή} \\ z^2+4=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} z_1=-1+i \\ z_2=-1-i \\ z_3=2i \\ z_4=-2i \end{matrix}\right\}$$

Άρα $Q(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επίσης έχουμε αμέσως ότι

$$Q(z)=(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$$

Επειδή η $f(z)$ είναι ολόμορφη συνάρτηση στο $\mathbb{C}-\{z_1,z_2,z_3,z_4\}$, τότε έπεται αμέσως ότι τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της $f(z)$ είναι τα z_1, z_2, z_3, z_4. Επομένως ανάμεσα σε αυτά θα αναζητηθούν οι πόλοι της $f(z)$ που βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο. Επειδή μόνο τα z_1, z_3 ανήκουν στο άνω ημιεπίπεδο, τότε πρέπει να εξετάσουμε μόνο αυτά.

- $\underline{z_1}$

$$\lim_{z\to z_1}\left((z-z_1)f(z)\right)=\lim_{z\to z_1}\left((z-z_1)\frac{z}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}\right)=\lim_{z\to z_1}\frac{z}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}=$$

$$=\frac{z_1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)}\neq 0$$

Άρα το z_1 είναι πόλος της $f(z)$ τάξης 1. Τότε

$$\operatorname{Res}(f,z_1)=\lim_{z\to z_1}\left((z-z_1)f(z)\right)=\frac{z_1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)}=\ldots=\frac{1+3i}{20}$$

- $\underline{z_3}$

$$\lim_{z\to z_3}\left((z-z_3)f(z)\right)=\lim_{z\to z_3}\left((z-z_3)\frac{z}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}\right)=\lim_{z\to z_3}\frac{z}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_4)}=$$

$$=\frac{z_3}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)(z_3-z_4)}\neq 0$$

Άρα το z_3 είναι πόλος της $f(z)$ τάξης 1. Τότε

$$\operatorname{Res}(f, z_3)=\lim_{z\to z_3}\left((z-z_3)f(z)\right)=\frac{z_3}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)(z_3-z_4)}=\ldots=-\frac{1+2i}{20}$$

Συνεπώς από το Θεώρημα 3 έχουμε αμέσως ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\left(x^2+2x+2\right)\left(x^2+4\right)}dx=2\pi i\left(\operatorname{Res}(f, z_1)+\operatorname{Res}(f, z_3)\right)=2\pi i\left(\frac{1+3i}{20}-\frac{1+2i}{20}\right)=\ldots=-\frac{\pi}{10}$$

Άρα $I=-\dfrac{\pi}{10}$. □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x^2+3}{\left(x^2+9\right)^2}dx$, $J=\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{2x^2+3}{\left(x^2+9\right)^2}dx$.

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $K=\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}dx$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι $\displaystyle\int_{C}\frac{z^3-z}{2z\left(z^2+1\right)^2}dz=K$ όπου C η θετικά προσανατολισμένη καμπύλη

$$4|z|^2-8\operatorname{Im}z+3=0$$

□

Ολοκληρώματα Fourier

Θεώρημα 5: Έστω $P(z)$, $Q(z)$ πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές τέτοια ώστε:

- $\deg(P(z))+1\leq\deg(Q(z))$, και
- $Q(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έστω ακόμη $\alpha>0$, $f(z)=e^{i\alpha z}\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ και z_1, z_2, ..., z_n οι πόλοι της $f(z)$ (ισοδύναμα της $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$) που βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο. Τότε:

i) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos(\alpha x)dx=-2\pi\sum_{\kappa=1}^{n}\operatorname{Im}(\operatorname{Res}(f,z_\kappa))$$

ii) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin(\alpha x)dx=2\pi\sum_{\kappa=1}^{n}\operatorname{Re}(\operatorname{Res}(f,z_\kappa))$$ □

Ολοκληρώματα των μορφών i), ii) του Θεωρήματος 4 εμφανίζονται στην ανάλυση Fourier γι αυτό καλούνται ολοκληρώματα Fourier.

Παρατήρηση 6:

Με τις προϋποθέσεις του προηγούμενου Θεωρήματος έχουμε αμέσως ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\alpha x}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(\cos(\alpha x)+i\sin(\alpha x))\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos(\alpha x)dx+i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin(\alpha x)dx=$$

$$\underset{\left(\substack{\text{i), ii)}\\ \text{Θεώρημα 5}}\right)}{=}-2\pi\sum_{\kappa=1}^{n}\operatorname{Im}(\operatorname{Res}(f,z_\kappa))+2\pi i\sum_{\kappa=1}^{n}\operatorname{Re}(\operatorname{Res}(f,z_\kappa))=$$

$$=2\pi i\left(\sum_{\kappa=1}^{n}\operatorname{Re}(\operatorname{Res}(f,z_\kappa))+i\sum_{\kappa=1}^{n}\operatorname{Im}(\operatorname{Res}(f,z_\kappa))\right)=$$

$$=2\pi i\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\operatorname{Re}(\operatorname{Res}(f,z_\kappa))+i\operatorname{Im}(\operatorname{Res}(f,z_\kappa))\right)=2\pi i\sum_{\kappa=1}^{n}\operatorname{Res}(f,z_\kappa)$$

Άρα

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\alpha x}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=2\pi i\sum_{\kappa=1}^{n}\operatorname{Res}(f,z_\kappa)}$$

(όπου, όπως προαναφέρθηκε, z_1, z_2, ..., z_n είναι οι πόλοι της $f(z)=e^{i\alpha z}\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, $\alpha>0$ που βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο). □

<u>Παρατήρηση 7:</u> Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 5, αν η C είναι μία απλή, κλειστή, τμηματικά συνεχώς διαφορίσιμη και θετικά προσανατολισμένη καμπύλη του άνω ημιεπιπέδου η οποία περιέχει στο εσωτερικό της τους πόλους της $f(z)$ που βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο z_1, z_2, ..., z_n, τότε από την Παρατήρηση 6 και το Θεώρημα 2 έχουμε αμέσως ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x}\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int_C f(z)dz$$ □

Παράδειγμα

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(2x)}{x^2+2x+2}dx$, $J=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2ix}}{x^2+2x+2}dx$.

<u>Λύση:</u>

Θέτουμε

$$P(z)=1,\ \ Q(z)=z^2+2z+2,\ \ \alpha=2\ \text{ και }\ f(z)=e^{i\alpha z}\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{e^{2iz}}{z^2+2z+2}$$

Παρατηρούμε ότι

- $P(z)$, $Q(z)$ πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές
- $\deg(P(z))=1$, $\deg(Q(z))=2$. Άρα $\deg(P(z))+1=2\le 2=\deg(Q(z))$
- $Q(z)=0\Leftrightarrow z^2+2z+2=0\Leftrightarrow z^2+2z+2=0\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} z_1=-1+i \\ z_2=-1-i\end{matrix}\right\}$

  Άρα $Q(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επίσης έχουμε αμέσως ότι

$$Q(z)=(z-z_1)(z-z_2)$$

Επειδή η $f(z)$ είναι ολόμορφη συνάρτηση στο $\mathbb{C}-\{z_1,z_2\}$, τότε έπεται αμέσως ότι τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της $f(z)$ είναι τα z_1, z_2. Επομένως ανάμεσα σε αυτά θα αναζητηθούν οι πόλοι της $f(z)$ που βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο. Επειδή μόνο το z_1 ανήκει στο άνω ημιεπίπεδο, τότε πρέπει να εξετάσουμε μόνο αυτόν το μιγαδικό:

$$\lim_{z\to z_1}\left((z-z_1)f(z)\right)=\lim_{z\to z_1}\left((z-z_1)\frac{e^{2iz}}{(z-z_1)(z-z_2)}\right)=\lim_{z\to z_1}\frac{e^{2iz}}{z-z_2}=\frac{e^{2iz_1}}{z_1-z_2}\neq 0$$

Άρα το z_1 είναι πόλος της $f(z)$ τάξης 1. Τότε

$$\operatorname{Res}(f,z_1)=\lim_{z\to z_1}\left((z-z_1)f(z)\right)=\frac{e^{2iz_1}}{z_1-z_2}=\ldots=-\frac{\sin 2+i\cos 2}{2e^2}$$

Συνεπώς από το Θεώρημα 5i) έχουμε αμέσως ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(2x)}{x^2+2x+2}dx=-2\pi\cdot\operatorname{Im}\left(\operatorname{Res}(f,z_1)\right)=-2\pi\cdot\operatorname{Im}\left(-\frac{\sin 2+i\cos 2}{2e^2}\right)=-2\pi\left(-\frac{\cos 2}{2e^2}\right)=\frac{\pi\cdot\cos 2}{e^2}$$

Άρα $I=\dfrac{\pi\cdot\cos 2}{e^2}$.

Από την Παρατήρηση 6 έχουμε αμέσως ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2ix}}{x^2+2x+2}dx=2\pi i\operatorname{Res}(f,z_1)=2\pi i\left(-\frac{\sin 2+i\cos 2}{2e^2}\right)=\ldots=\frac{\pi}{e^2}(\cos 2-i\sin 2)$$

Επομένως $J=\dfrac{\pi}{e^2}(\cos 2-i\sin 2)$. □

Άσκηση: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(4x)}{x^2+1}dx$, $J=\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos(4x)}{x^2+1}dx$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\cos x+i\sin x)^4}{x^2+1}dx=2J+i\cdot I$. □