ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΟΤΗΤΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ορισμός 1: Έστω A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, $f: A \to \mathbb{C}$ συνάρτηση και $z_0 \in A$. Η f καλείται **διαφορίσιμη** στο z_0 αν υπάρχει στο $\mathbb{C}$ το όριο $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$. Το όριο αυτό (αν υπάρχει στο $\mathbb{C}$) καλείται **παράγωγος** της f στο z_0 και συμβολίζεται με $f'(z_0)$. □

Είναι φανερό ότι αντί του ορίου $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ μπορούμε να θεωρήσουμε το $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ (προσοχή: $h \in \mathbb{C}$). Αν

$$A_1 = \{z \in A \,/\, \text{η f είναι παραγωγίσιμη στο } z\}$$

τότε η απεικόνιση $f': A_1 \to \mathbb{C}$ με $(f')(z) = f'(z)$ καλείται (πρώτη) **παράγωγος** της f.

Παρατήρηση 2: Με όμοιο τρόπο όπως στην πραγματική περίπτωση αποδεικνύεται ότι $\left(z^n\right)' = nz^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$ με $z \in \mathbb{C}$ ή $z \in \mathbb{C}^*$ ανάλογα με τον εκθέτη n. □

Θεώρημα 3: Αν η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο z_0, τότε είναι συνεχής στο z_0.

□

Το αντίστροφο δεν ισχύει:
Η συνάρτηση $f(z) = |z|$, $z \in \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο 0 αλλά όχι διαφορίσιμη στο 0 (γιατί;).

Θεώρημα 4: Αν οι συναρτήσεις f, g είναι διαφορίσιμες στο z_0 και $c \in \mathbb{C}$ τότε οι συναρτήσεις $f \pm g$, $f \cdot g$, $c \cdot f$, $\frac{f}{g}$ (με την προϋπόθεση $g(z_0) \neq 0$) είναι διαφορίσιμες στο z_0 και μάλιστα ισχύουν:

i) $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$

ii) $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$

iii) $(c \cdot f)'(z_0) = c \cdot f'(z_0)$

iv) $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}$ □

<u>**Θεώρημα 5:**</u> Αν η συνάρτηση g είναι διαφορίσιμη στο z_0 και η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο $g(z_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι διαφορίσιμη στο z_0 και μάλιστα ισχύει $(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0)) \cdot g'(z_0)$. □

<u>**Θεώρημα 6 (κανόνας L' Hospital):**</u> Έστω A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, $z_0 \in A$ και $f, g : A \to \mathbb{C}$ συναρτήσεις διαφορίσιμες στο A τέτοιες ώστε:

- $f(z_0) = g(z_0) = 0$ (αυτό σημαίνει ισοδύναμα ότι $\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} g(z) = 0$ αφού οι f, g είναι συνεχείς στο z_0 ως διαφορίσιμες στο z_0)
- $g'(z_0) \neq 0$.

Τότε $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$. □

<u>**ΣΧΟΛΙΟ**</u>

Αποδεικνύεται ότι $\lim_{z \to z_0} f'(z) = f'(z_0)$ και ότι $\lim_{z \to z_0} g'(z) = g'(z_0)$. Άρα το αποτέλεσμα του προηγούμενου Θεωρήματος γράφεται

$$\boxed{\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}}$$

Αποδεικνύεται ότι ο προηγούμενος τύπος (υπό κατάλληλες προϋποθέσεις για να έχουν νόημα τα εμφανιζόμενα όρια) ισχύει και όταν $f'(z_0) \neq 0$, $g'(z_0) = 0$ (δηλ. και όταν $\lim_{z \to z_0} f'(z) \neq 0$, $\lim_{z \to z_0} g'(z) = 0$) οπότε τότε $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \infty$. Επίσης αποδεικνύεται (υπό κατάλληλες προϋποθέσεις) ότι ισχύει $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}$ και στην περίπτωση που $\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0} g(z)=\infty$ (δηλ. όταν το όριο $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}$ είναι της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$). Επομένως το όριο $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}$ (με τις κατάλληλες προϋποθέσεις για τις συναρτήσεις $f(z)$, $g(z)$) όταν $\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0} g(z)=0$ (δηλ. όταν είναι της μορφής $\frac{0}{0}$) ή όταν $\lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0} g(z)=\infty$ (δηλ. όταν είναι της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$) αντιμετωπίζεται όπως και στις πραγματικές συναρτήσεις μίας πραγματικής μεταβλητής, δηλ. με συνεχόμενες εφαρμογές του κανόνα του L' Hospital και την απαίτηση το τελικό όριο να υπάρχει στο $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Όρια των μορφών $\frac{0}{0}$ και $\frac{\infty}{\infty}$ όταν $z\to\infty$ υπολογίζονται (υπό κατάλληλες προϋποθέσεις για τις συναρτήσεις $f(z)$, $g(z)$) με παρόμοιους τρόπους (και στις δύο απροσδιόριστες μορφές, αν $\lim_{z\to\infty}\frac{f'(z)}{g'(z)}\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ τότε ισχύει ότι $\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to\infty}\frac{f'(z)}{g'(z)}$). Επίσης τα όρια των μορφών $\frac{0}{0}$ και $\frac{\infty}{\infty}$ για $z\to\infty$ (υπό κατάλληλες προϋποθέσεις) μπορούν να υπολογιστούν και με την αντικατάσταση $w=\frac{1}{z}$. Τότε προφανώς $\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{w\to 0}\frac{\tilde{f}(w)}{\tilde{g}(w)}$ με $\tilde{f}(w)=f\left(\frac{1}{w}\right)$ και $\tilde{g}(w)=g\left(\frac{1}{w}\right)$ και επομένως για τον υπολογισμό του ορίου $\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{g(z)}$ μπορούμε να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{w\to 0}\frac{\tilde{f}(w)}{\tilde{g}(w)}$ (μάλιστα επειδή το όριο $\lim_{w\to 0}\frac{\tilde{f}(w)}{\tilde{g}(w)}$ είναι της μορφής $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$ αντίστοιχα - αφού προφανώς $\lim_{z\to\infty} f(z)=\lim_{w\to 0}\tilde{f}(w)$ και $\lim_{z\to\infty} g(z)=\lim_{w\to 0}\tilde{g}(w)$, τότε για τον υπολογισμό του $\lim_{w\to 0}\frac{\tilde{f}(w)}{\tilde{g}(w)}$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τη διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω για τις συναρτήσεις $\tilde{f}(w)$, $\tilde{g}(w)$). □

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{z\to i}\frac{z^3+i}{z^{10}+1}$.

Λύση: Θέτουμε $f(z)=z^3+i$ και $g(z)=z^{10}+1$. Τότε:

- για κάθε $z\in\mathbb{C}$ έχουμε $f'(z)=\left(z^3+i\right)'=3z^2$ και $g'(z)=\left(z^{10}+1\right)'=10z^9$
- $f(i)=g(i)=0$
- $f'(i)=-3$, $g'(i)=10i\neq 0$

Άρα

$$\lim_{z\to i}\frac{z^3+i}{z^{10}+1}=\frac{f'(i)}{g'(i)}=-\frac{3}{10i}=\frac{3i}{10}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{z\to i}\frac{\left(z^3+i\right)'}{\left(z^{10}+1\right)'}=\lim_{z\to i}\frac{3z^2}{10z^9}=\ldots=\frac{3i}{10}$$

Επομένως

$$\lim_{z\to i}\frac{z^3+i}{z^{10}+1}=\lim_{z\to i}\frac{\left(z^3+i\right)'}{\left(z^{10}+1\right)'}$$ □

ΣΥΝΘΗΚΕΣ CAUCHY-RIEMANN

Στα επόμενα θα θεωρούμε ότι $z=x+yi$ και $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$.

Θεώρημα 7: Έστω ότι η συνάρτηση $f(z)$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $z_0=x_0+iy_0$. Τότε:

i) υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι των u, v στο σημείο (x_0,y_0)

ii) $u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)$, $u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0)$ (συνθήκες Cauchy - Riemann)

iii) $f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+i\,v_x(x_0,y_0)$ □

Η απόδειξη του προηγούμενου Θεωρήματος βασίζεται στην προσέγγιση του ορίου $\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ (το οποίο υπάρχει αφού η f είναι διαφορίσιμη στο z_0) από δύο κατευθύνσεις: της ευθείας $x=x_0$ και της ευθείας $y=y_0$.

<u>Παρατήρηση 8:</u> Από τα ii), iii) του Θεωρήματος 7 έχουμε αμέσως ότι αν η f είναι διαφορίσιμη στο z_0, τότε:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= u_x(x_0,y_0)+i\, v_x(x_0,y_0) \\ &= u_x(x_0,y_0)-i\, u_y(x_0,y_0) \\ &= v_y(x_0,y_0)-i\, u_y(x_0,y_0) \\ &= v_y(x_0,y_0)+i\, v_x(x_0,y_0) \end{aligned}$$

□

Το αντίστροφο του προηγούμενου Θεωρήματος δεν ισχύει. Το επόμενο Θεώρημα δίνει ικανές συνθήκες για τη διαφορισιμότητα μιας συνάρτησης:

<u>Θεώρημα 9:</u> Αν οι συναρτήσεις $u(x,y)$, $v(x,y)$ έχουν μερικές παραγώγους u_x, u_y, v_x, v_y <u>συνεχείς</u> στο (x_0,y_0) και ισχύουν οι συνθήκες Cauchy - Riemann

$$u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0),\ u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0)$$

Τότε η συνάρτηση $f(z)=u(x,y)+i\, v(x,y)$ είναι διαφορίσιμη στο z_0. □

<u>Παρατήρηση 10:</u> Από τα Θεωρήματα 9 και 10 έχουμε αμέσως ότι αν οι u_x, u_y, v_x, v_y συνεχείς στο (x_0,y_0), τότε η f είναι διαφορίσιμη στο z_0 αν και μόνο αν ισχύουν οι συνθήκες Cauchy - Riemann

$$u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0),\ u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0)$$ □

<u>Παράδειγμα</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z)=x^2+y^2+2xyi$ όπου $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί το υποσύνολο του $\mathbb{C}$ στο οποίο η f είναι διαφορίσιμη καθώς και η παράγωγος της f στα σημεία αυτού του συνόλου.

Λύση: Είναι $u(x,y) = x^2 + y^2$ και $v(x,y) = 2xy$. Επομένως:

- $u_x = 2x$, $u_y = 2y$
- $v_x = 2y$, $v_y = 2x$

Είναι φανερό ότι οι μερικές παράγωγοι u_x, u_y, v_x, v_y είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^2$ ($\cong \mathbb{C}$). Τότε, για $z = x + yi$, από την Παρατήρηση 10 έχουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο z αν και μόνο αν ισχύουν οι συνθήκες Cauchy - Riemann:

$$\left\{\begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x = 2x \\ 2y = -2y \end{array}\right\} \Leftrightarrow y = 0$$

Άρα το σύνολο των σημείων στα οποία η f είναι διαφορίσιμη είναι ακριβώς όλα τα σημεία της μορφής $z = x + 0i = x \in \mathbb{R}$, δηλ. ο άξονας $x'x$ των πραγματικών αριθμών. Στα σημεία αυτά η παράγωγος της f είναι (βλ. Παρατήρηση 8):

$$f'(x+0i) = u_x(x,0) + iv_x(x,0) = 2x$$ □

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(z) = \overline{z}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{C}$ αλλά δεν είναι διαφορίσιμη σε κανένα σημείο του $\mathbb{C}$.

2. Έστω $f(z) = \left(x + y^2\right) + x^2 yi$ συνάρτηση. Να βρεθεί το υποσύνολο του $\mathbb{C}$ στο οποίο η f είναι διαφορίσιμη καθώς και την παράγωγο της f στα σημεία αυτού του συνόλου. □

ΟΛΟΜΟΡΦΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός 11: Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ συνάρτηση και $z_0 \in A$.

i) Η f καλείται **ολόμορφη στο σημείο** z_0 αν υπάρχει ένα B ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ τέτοιο ώστε:

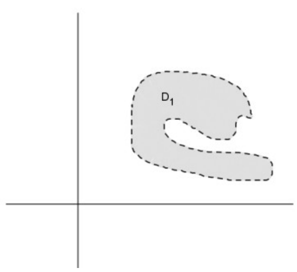
- $z_0 \in B$
- η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του B.

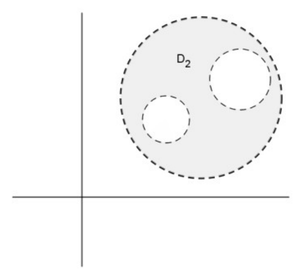
ii) Αν το A είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του A, τότε η f ονομάζεται **ολόμορφη** στο A. □

Μία συνάρτηση η οποία είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ καλείται **ακέραια**. Π.χ. οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι ακέραιες συναρτήσεις. Επίσης μία ολόμορφη συνάρτηση ονομάζεται και **αναλυτική** συνάρτηση.

Έστω D μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ (ή του $\mathbb{R}^2$ αφού το $\mathbb{R}^2$ "ταυτίζεται" με το $\mathbb{C}$ μέσω της $(x, y) \leftrightarrow x + yi$).

- Το D ονομάζεται **πολυγωνικά συνεκτικό** αν κάθε δύο σημεία του μπορούν να συνδεθούν με μία πολυγωνική γραμμή που ανήκει στο D.
- Το D ονομάζεται **πεδίο** αν είναι ανοικτό και πολυγωνικά συνεκτικό.
- Το D ονομάζεται **απλό συνεκτικό** αν είναι ένα πεδίο χωρίς "οπές".
- Το D ονομάζεται **πολλαπλά συνεκτικό** αν είναι ένα πεδίο με "οπές".





Το D_1 είναι απλό συνεκτικό πεδίο ενώ το D_2 είναι πολλαπλό συνεκτικό πεδίο.

<u>**Πρόταση 12:**</u> Έστω D πεδίο και $f : D \to \mathbb{C}$ συνάρτηση ολόμορφη στο D τέτοια ώστε $f'(z) = 0$ για κάθε $z \in D$. Τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση. □

Η συνεκτικότητα του D είναι σημαντική αφού για παράδειγμα η συνάρτηση

$$f(z) = \begin{cases} 1, & \text{αν } |z| < 2 \\ 0, & \text{αν } |z| > 4 \end{cases}$$

είναι ολόμορφη στο πεδίο ορισμού της με $f'(z) = 0$ αλλά η f δεν είναι σταθερή.

Από την Πρόταση 12 έχουμε αμέσως το εξής :

Πόρισμα 13: Έστω D πεδίο και $f, g : D \to \mathbb{C}$ συναρτήσεις ολόμορφες στο D με $f'(z) = g'(z)$ για κάθε $z \in D$. Τότε υπάρχει $c \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(z) = g(z) + c$ για κάθε $z \in D$. □

Άσκηση: Έστω D πεδίο και $f : D \to \mathbb{C}$ συνάρτηση ολόμορφη στο D τέτοια ώστε $f(z) \in \mathbb{R}$ για κάθε $z \in D$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Λύση:

Από υπόθεση έχουμε ότι $f(z) = u(x, y) + 0 \cdot i$ για κάθε $z = x + yi \in D$. Άρα $v(x, y) = 0$ και επομένως $v_x(x, y) = v_y(x, y) = 0$ για κάθε $x + yi \in D$ κι επομένως, επειδή η f είναι ολόμορφη στο D, από την Παρατήρηση 8, έχουμε ότι για κάθε $z = x + yi \in D$ ισχύει

$$f'(z) = v_y(x, y) + i\, v_x(x, y) = 0$$

Τότε από την Πρόταση 12 έπεται αμέσως ότι η f είναι σταθερή. □

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι αν για κάθε $z \in D$ ισχύει $f(z) \in \mathbb{I}$ ($\mathbb{I}$ είναι το σύνολο των φανταστικών αριθμών), τότε η f είναι σταθερή.

ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός 14: Έστω D πεδίο του $\mathbb{R}^2$ και $\varphi : D \to \mathbb{R}$ C^2 - συνάρτηση. Η φ ονομάζεται **αρμονική** στο D αν ικανοποιεί στο D την εξίσωση Laplace

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$$ □

Θεώρημα 15: Έστω D πεδίο και $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ συνάρτηση ολόμορφη στο D. Τότε οι συναρτήσεις u και v είναι αρμονικές στο D. □

Επομένως αν μία (τουλάχιστον) από τις συναρτήσεις u, v δεν είναι αρμονικές στο D, τότε η $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ δεν είναι ολόμορφη στο D.

Έστω τώρα D πεδίο του $\mathbb{R}^2$ και $u(x,y)$ αρμονική συνάρτηση στο D. Μία συνάρτηση $v: D \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **συζυγής αρμονική** της $u(x,y)$ στο D αν η μιγαδική συνάρτηση $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ είναι ολόμορφη στο D (και επομένως η συνάρτηση $v(x,y)$, σύμφωνα με το Θεώρημα 15, θα είναι αρμονική στο D). Από τα παραπάνω έπεται αμέσως ότι η συνάρτηση $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ είναι ολόμορφη στο D αν και μόνα αν η v είναι συζυγής αρμονική της u. Σχετικά με τις συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις, ισχύει το εξής:

Θεώρημα 16: Έστω D απλό συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $u(x,y)$ αρμονική συνάρτηση στο D. Τότε υπάρχει συζυγής αρμονική συνάρτηση της $u(x,y)$ στο D. □

Παράδειγμα

Έστω $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$ και $u: D \to \mathbb{R}$ με $u(x,y) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right)$.

i) Να δείξετε ότι η u είναι αρμονική στο D.

ii) Να βρείτε όλες τις συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις της u στο D.

Λύση: Είναι φανερό ότι το D είναι απλό συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

i)

- $u_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)\right) = \ldots = \dfrac{x}{x^2+y^2}$
- $u_{xx} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right) = \ldots = \dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$
- $u_y = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)\right) = \ldots = \dfrac{y}{x^2+y^2}$
- $u_{yy} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right) = \ldots = \dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$
- $u_{xy} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right) = \ldots = -\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $u_{yx} = \ldots = -\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

Παρατηρούμε ότι

- η u είναι C^2 - συνάρτηση (αφού προφανώς οι μερικές παράγωγοι 2ης τάξης είναι συνεχείς)
- $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Άρα η u είναι αρμονική στο πεδίο D (βλ. Ορισμό 14).

ii) Από το Θεώρημα 16 έχουμε αμέσως ότι υπάρχει συζυγής αρμονική συνάρτηση της $u(x,y)$. Έστω τώρα $v : D \to \mathbb{R}$ συνάρτηση. Τότε η $v(x,y)$ είναι συζυγής αρμονική συνάρτηση της $u(x,y)$ στο D αν και μόνο αν η συνάρτηση $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ είναι ολόμορφη στο D. Αυτό όμως συμβαίνει αν και μόνο αν (υπάρχουν στο D οι μερικές παράγωγοι v_x, v_y και) για τις συναρτήσεις u, v ισχύουν στο D οι συνθήκες Cauchy-Riemann (γιατί;)

$$\left\{\begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} v_y = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v_x = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \end{array}\right\}$$

Επομένως

$$v_y = \frac{x}{x^2+y^2} \Leftrightarrow \int v_y dy = \int \frac{x}{x^2+y^2} dy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v(x,y) = \frac{1}{x}\int \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} dy + c(x) = \ldots = \operatorname{Arc}\tan\left(\frac{y}{x}\right) + c(x)$$

Συνεπώς

$$v_x = -\frac{y}{x^2+y^2} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{Arc}\tan\left(\frac{y}{x}\right) + c(x)\right) = -\frac{y}{x^2+y^2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{y}{x^2+y^2} + c'(x) = -\frac{y}{x^2+y^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c'(x) = 0 \Leftrightarrow c(x) = d,\ d \in \mathbb{R}$$

Άρα $v(x,y) = \operatorname{Arc}\tan\left(\frac{y}{x}\right) + d$, $d \in \mathbb{R}$. Συνεπώς (αφού προφανώς υπάρχουν στο D οι μερικές παράγωγοι v_x, v_y) οι συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις της u στο D είναι ακριβώς όλες οι συναρτήσεις

$$v : D \to \mathbb{R} \text{ με } v(x,y) = \operatorname{Arc}\tan\left(\frac{y}{x}\right) + d,\ d \in \mathbb{R}$$ □

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>

Έστω $u(x,y) = 4xy^3 - 4x^3y + x$.

i) Να δείξετε ότι η u είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^2$.

ii) Να βρεθεί μία ακέραια συνάρτηση $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ τέτοια ώστε $f(1+i) = 1 + 4i$. □