

ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΟΤΗΤΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ορισμός 1: Έστω A ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{C} , $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ συνάρτηση και $z_0 \in A$.

Η f καλείται **διαφορίσιμη** στο z_0 αν υπάρχει στο \mathbb{C} το όριο $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$. Το όριο αυτό (αν υπάρχει στο \mathbb{C}) καλείται **παράγωγος** της f στο z_0 και συμβολίζεται με $f'(z_0)$. □

Είναι φανερό ότι αντί του ορίου $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ μπορούμε να θεωρήσουμε το

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad (\text{προσοχή: } h \in \mathbb{C}). \text{ Αν}$$

$$A_1 = \{z \in A / \eta f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } z\}$$

τότε η απεικόνιση $f': A_1 \rightarrow \mathbb{C}$ με $(f')(z) = f'(z)$ καλείται (πρώτη) **παράγωγος** της f .

Παρατήρηση 2: Με όμοιο τρόπο όπως στην πραγματική περίπτωση αποδεικνύεται ότι $(z^n)' = nz^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$ με $z \in \mathbb{C}$ ή $z \in \mathbb{C}^*$ ανάλογα με τον εκθέτη n . □

Θεώρημα 3: Αν η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο z_0 , τότε είναι συνεχής στο z_0 . □

Το αντίστροφο δεν ισχύει:

Η συνάρτηση $f(z) = |z|$, $z \in \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο 0 αλλά όχι διαφορίσιμη στο 0 (γιατί;).

Θεώρημα 4: Αν οι συναρτήσεις f, g είναι διαφορίσιμες στο z_0 και $c \in \mathbb{C}$ τότε οι συναρτήσεις $f \pm g$, $f \cdot g$, $c \cdot f$, $\frac{f}{g}$ (με την προϋπόθεση $g(z_0) \neq 0$) είναι διαφορίσιμες στο z_0 και μάλιστα ισχύουν:

$$\text{i) } (f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$$

$$\text{ii) } (f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

$$\text{iii) } (c \cdot f)'(z_0) = c \cdot f'(z_0)$$

$$\text{iv) } \left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)} \quad \square$$

Θεώρημα 5: Αν η συνάρτηση g είναι διαφορίσιμη στο z_0 και η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο $g(z_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι διαφορίσιμη στο z_0 και μάλιστα ισχύει $(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0)) \cdot g'(z_0)$. □

Θεώρημα 6 (κανόνας L' Hospital): Έστω A ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{C} , $z_0 \in A$ και $f, g : A \rightarrow \mathbb{C}$ συναρτήσεις διαφορίσιμες στο A τέτοιες ώστε:

- $f(z_0) = g(z_0) = 0$ (αυτό σημαίνει ισοδύναμα ότι $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$ αφού οι f, g είναι συνεχείς στο z_0 ως διαφορίσιμες στο z_0)
- $g'(z_0) \neq 0$.

Τότε $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$. □

ΣΧΟΛΙΟ

Αποδεικνύεται ότι $\lim_{z \rightarrow z_0} f'(z) = f'(z_0)$ και ότι $\lim_{z \rightarrow z_0} g'(z) = g'(z_0)$. Άρα το αποτέλεσμα του προηγούμενου Θεωρήματος γράφεται

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Γενικά το όριο $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$ όταν $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$ (δηλ. όταν είναι της μορφής

$\frac{0}{0}$) αντιμετωπίζεται όπως και στις πραγματικές συναρτήσεις μίας πραγματικής μεταβλητής (δηλ. με συνεχόμενες εφαρμογές - εφόσον απαιτείται - του κανόνα του L' Hospital) με την προϋπόθεση ότι το τελικό όριο (το οποίο θα είναι της μορφής

$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h'(z)}{\varphi'(z)}$ υπάρχει στο $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Αν το όριο $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$ είναι της μορφής $\frac{\infty}{\infty}$ τότε το

φέρνουμε στη μορφή $\frac{0}{0}$ (π.χ. $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{1}{g(z)}}{\frac{1}{f(z)}}$) και στη συνέχεια εφαρμόζουμε

την προηγούμενη διαδικασία. Με παρόμοιο τρόπο αντιμετωπίζονται τα όρια των μορφών $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ καθώς $z \rightarrow \infty$ (π.χ. θεωρώντας νέα μεταβλητή την $u = \frac{1}{z}$). \square

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^3 + i}{z^{10} + 1}$.

Λύση: Θέτουμε $f(z) = z^3 + i$ και $g(z) = z^{10} + 1$. Τότε:

- για κάθε $z \in \mathbb{C}$ έχουμε $f'(z) = (z^3 + i)' = 3z^2$ και $g'(z) = (z^{10} + 1)' = 10z^9$
- $f(i) = g(i) = 0$
- $f'(i) = -3, g'(i) = 10i \neq 0$

Άρα

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^3 + i}{z^{10} + 1} = \frac{f'(i)}{g'(i)} = -\frac{3}{10i} = \frac{3i}{10}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{(z^3 + i)'}{(z^{10} + 1)'} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{3z^2}{10z^9} = \dots = \frac{3i}{10}$$

Επομένως

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^3 + i}{z^{10} + 1} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z^3 + i)'}{(z^{10} + 1)'} \quad \square$$

ΣΥΝΘΗΚΕΣ CAUCHY-RIEMANN

Στα επόμενα θα θεωρούμε ότι $z = x + iy$ και $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$.

Θεώρημα 7: Έστω ότι η συνάρτηση $f(z)$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $z_0 = x_0 + iy_0$. Τότε:

- i) υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι των u, v στο σημείο (x_0, y_0)
- ii) $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$ (συνθήκες Cauchy - Riemann)
- iii) $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0)$ □

Η απόδειξη του προηγούμενου Θεωρήματος βασίζεται στην προσέγγιση του ορίου

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ (το οποίο υπάρχει αφού η f είναι διαφορίσιμη στο z_0) από δύο

κατευθύνσεις: της ευθείας $x = x_0$ και της ευθείας $y = y_0$.

Παρατήρηση 8: Από τα ii), iii) του Θεωρήματος 7 έχουμε αμέσως ότι αν η f είναι διαφορίσιμη στο z_0 , τότε:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0) \\ &= u_x(x_0, y_0) - i u_y(x_0, y_0) \\ &= v_y(x_0, y_0) - i u_y(x_0, y_0) \\ &= v_y(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0) \end{aligned}$$

□

Το αντίστροφο του προηγούμενου Θεωρήματος δεν ισχύει. Το επόμενο Θεώρημα δίνει ικανές συνθήκες για τη διαφορισιμότητα μιας συνάρτησης:

Θεώρημα 9: Αν οι συναρτήσεις $u(x, y), v(x, y)$ έχουν μερικές παραγώγους u_x, u_y, v_x, v_y συνεχείς στο (x_0, y_0) και ισχύουν οι συνθήκες Cauchy - Riemann

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

Τότε η συνάρτηση $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ είναι διαφορίσιμη στο z_0 . □

Παρατήρηση 10: Από τα Θεωρήματα 9 και 10 έχουμε αμέσως ότι αν οι u_x, u_y, v_x, v_y συνεχείς στο (x_0, y_0) , τότε η f είναι διαφορίσιμη στο z_0 αν και μόνο αν ισχύουν οι συνθήκες Cauchy - Riemann

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \quad \square$$

Παράδειγμα

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = x^2 + y^2 + 2xyi$ όπου $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί το υποσύνολο του \mathbb{C} στο οποίο η f είναι διαφορίσιμη καθώς και η παράγωγος της f στα σημεία αυτού του συνόλου.

Λύση: Είναι $u(x, y) = x^2 + y^2$ και $v(x, y) = 2xy$. Επομένως:

- $u_x = 2x, u_y = 2y$
- $v_x = 2y, v_y = 2x$

Είναι φανερό ότι οι μερικές παράγωγοι u_x, u_y, v_x, v_y είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^2 (\cong \mathbb{C})$.

Τότε, για $z = x + yi$, από την Παρατήρηση 10 έχουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο z αν και μόνο αν ισχύουν οι συνθήκες Cauchy - Riemann:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = 2x \\ 2y = -2y \end{array} \right\} \Leftrightarrow y = 0$$

Άρα το σύνολο των σημείων στα οποία η f είναι διαφορίσιμη είναι ακριβώς όλα τα σημεία της μορφής $z = x + 0i = x \in \mathbb{R}$, δηλ. ο άξονας $x'x$ των πραγματικών αριθμών. Στα σημεία αυτά η παράγωγος της f είναι (βλ. Παρατήρηση 8):

$$f'(x + 0i) = u_x(x, 0) + iv_x(x, 0) = 2x \quad \square$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(z) = \bar{z}$ είναι συνεχής στο \mathbb{C} αλλά δεν είναι διαφορίσιμη σε κανένα σημείο του \mathbb{C} .
2. Έστω $f(z) = (x + y^2) + x^2yi$ συνάρτηση. Να βρεθεί το υποσύνολο του \mathbb{C} στο οποίο η f είναι διαφορίσιμη καθώς και την παράγωγο της f στα σημεία αυτού του συνόλου. □

ΟΛΟΜΟΡΦΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός 11: Έστω A μη κενό υποσύνολο του \mathbb{C} , $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ συνάρτηση και $z_0 \in A$.

- i) Η f καλείται **ολόμορφη στο σημείο** z_0 αν υπάρχει ένα B ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{C} τέτοιο ώστε:
- $z_0 \in B$
 - η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του B .
- ii) Αν το A είναι ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{C} και η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του A , τότε η f ονομάζεται **ολόμορφη στο A** . □

Μία συνάρτηση η οποία είναι ολόμορφη στο \mathbb{C} καλείται **ακέραια**. Π.χ. οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι ακέραιες συναρτήσεις. Επίσης μία ολόμορφη συνάρτηση ονομάζεται και **αναλυτική** συνάρτηση.

Έστω D μη κενό υποσύνολο του \mathbb{C} (ή του \mathbb{R}^2 αφού το \mathbb{R}^2 "ταυτίζεται" με το \mathbb{C} μέσω της $(x, y) \leftrightarrow x + yi$).

- Το D ονομάζεται **πολυγωνικά συνεκτικό** αν κάθε δύο σημεία του μπορούν να συνδεθούν με μία πολυγωνική γραμμή που ανήκει στο D .
- Το D ονομάζεται **πεδίο** αν είναι ανοικτό και πολυγωνικά συνεκτικό.
- Το D ονομάζεται **απλό συνεκτικό** αν είναι ένα πεδίο χωρίς "οπές".
- Το D ονομάζεται **πολλαπλό συνεκτικό** αν είναι ένα πεδίο με "οπές".



Το D_1 είναι απλό συνεκτικό πεδίο ενώ το D_2 είναι πολλαπλό συνεκτικό πεδίο.

Πρόταση 12: Έστω D πεδίο και $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ συνάρτηση ολόμορφη στο D τέτοια ώστε $f'(z) = 0$ για κάθε $z \in D$. Τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση. \square

Η συνεκτικότητα του D είναι σημαντική αφού για παράδειγμα η συνάρτηση

$$f(z) = \begin{cases} 1, & \text{αν } |z| < 2 \\ 0, & \text{αν } |z| > 4 \end{cases}$$

είναι ολόμορφη στο πεδίο ορισμού της με $f'(z) = 0$ αλλά η f δεν είναι σταθερή.

Από την Πρόταση 12 έχουμε αμέσως το εξής :

Πόρισμα 13: Έστω D πεδίο και $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ συναρτήσεις ολόμορφες στο D με $f'(z) = g'(z)$ για κάθε $z \in D$. Τότε υπάρχει $c \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(z) = g(z) + c$ για κάθε $z \in D$. \square

Άσκηση: Έστω D πεδίο και $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ συνάρτηση ολόμορφη στο D τέτοια ώστε $f(z) \in \mathbb{R}$ για κάθε $z \in D$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Λύση:

Από υπόθεση έχουμε ότι $f(z) = u(x, y) + 0 \cdot i$ για κάθε $z = x + yi \in D$. Άρα $v(x, y) = 0$ και επομένως $v_x(x, y) = v_y(x, y) = 0$ για κάθε $x + yi \in D$ κι επομένως, επειδή η f είναι ολόμορφη στο D , από την Παρατήρηση 8, έχουμε ότι για κάθε $z = x + yi \in D$ ισχύει

$$f'(z) = v_y(x, y) + i v_x(x, y) = 0$$

Τότε από την Πρόταση 12 έπεται αμέσως ότι η f είναι σταθερή. \square

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι αν για κάθε $z \in D$ ισχύει $f(z) \in \mathbb{I}$ (\mathbb{I} είναι το σύνολο των φανταστικών αριθμών), τότε η f είναι σταθερή.

ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός 14: Έστω D πεδίο του \mathbb{R}^2 και $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 - συνάρτηση. Η φ ονομάζεται **αρμονική** στο D αν ικανοποιεί στο D την εξίσωση Laplace

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad \square$$

Θεώρημα 15: Έστω D πεδίο και $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ συνάρτηση ολόμορφη στο D . Τότε οι συναρτήσεις u και v είναι αρμονικές στο D . □

Επομένως αν μία (τουλάχιστον) από τις συναρτήσεις u, v δεν είναι αρμονικές στο D , τότε η $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ δεν είναι ολόμορφη στο D .

Έστω τώρα D πεδίο του \mathbb{R}^2 και $u(x, y)$ αρμονική συνάρτηση στο D . Μία συνάρτηση $v: D \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται **συζυγής αρμονική** της $u(x, y)$ στο D αν η μιγαδική συνάρτηση $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ είναι ολόμορφη στο D (και επομένως η συνάρτηση $v(x, y)$, σύμφωνα με το Θεώρημα 15, θα είναι αρμονική στο D). Από τα παραπάνω έπεται αμέσως ότι η συνάρτηση $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ είναι ολόμορφη στο D αν και μόνο αν η v είναι συζυγής αρμονική της u . Σχετικά με τις συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις, ισχύει το εξής:

Θεώρημα 16: Έστω D απλό συνεκτικό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 και $u(x, y)$ αρμονική συνάρτηση στο D . Τότε υπάρχει συζυγής αρμονική συνάρτηση της $u(x, y)$ στο D . □

Παράδειγμα

Έστω $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$ και $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ με $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$.

- i) Να δείξετε ότι η u είναι αρμονική στο D .
- ii) Να βρείτε όλες τις συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις της u στο D .

Λύση: Είναι φανερό ότι το D είναι απλό συνεκτικό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 .

- i)

- $u_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \right) = \dots = \frac{x}{x^2 + y^2}$
- $u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \dots = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$
- $u_y = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \right) = \dots = \frac{y}{x^2 + y^2}$
- $u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \dots = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$
- $u_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \dots = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, u_{yx} = \dots = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$

Παρατηρούμε ότι

- η u είναι C^2 - συνάρτηση (αφού προφανώς οι μερικές παράγωγοι 2ης τάξης είναι συνεχείς)
- $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Άρα η u είναι αρμονική στο πεδίο D (βλ. Ορισμό 14).

- ii)** Από το Θεώρημα 16 έχουμε αμέσως ότι υπάρχει συζυγής αρμονική συνάρτηση της $u(x, y)$. Έστω τώρα $v: D \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση. Τότε η $v(x, y)$ είναι συζυγής αρμονική συνάρτηση της $u(x, y)$ στο D αν και μόνο αν η συνάρτηση $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ είναι ολόμορφη στο D . Αυτό όμως συμβαίνει αν και μόνο αν (υπάρχουν στο D οι μερικές παράγωγοι v_x, v_y και) για τις συναρτήσεις u, v ισχύουν στο D οι συνθήκες Cauchy-Riemann (γιατί;)

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_y = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ v_x = -\frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} v_y = \frac{x}{x^2 + y^2} &\Leftrightarrow \int v_y dy = \int \frac{x}{x^2 + y^2} dy \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow v(x, y) = \frac{1}{x} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} dy + c(x) = \dots = \text{Arc tan}\left(\frac{y}{x}\right) + c(x) \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}v_x = -\frac{y}{x^2+y^2} &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\text{Arc tan} \left(\frac{y}{x} \right) + c(x) \right) = -\frac{y}{x^2+y^2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow -\frac{y}{x^2+y^2} + c'(x) = -\frac{y}{x^2+y^2} \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow c'(x) = 0 \Leftrightarrow c(x) = d, d \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Άρα $v(x, y) = \text{Arc tan} \left(\frac{y}{x} \right) + d$, $d \in \mathbb{R}$. Συνεπώς (αφού προφανώς υπάρχουν στο

D οι μερικές παράγωγοι v_x , v_y) οι συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις της u στο D είναι ακριβώς όλες οι συναρτήσεις

$$v: D \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } v(x, y) = \text{Arc tan} \left(\frac{y}{x} \right) + d, d \in \mathbb{R} \quad \square$$

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω $u(x, y) = 4xy^3 - 4x^3y + x$.

- i) Να δείξετε ότι η u είναι αρμονική στο \mathbb{R}^2 .
- ii) Να βρεθεί μία ακέραια συνάρτηση $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ τέτοια ώστε $f(1+i) = 1+4i$. □