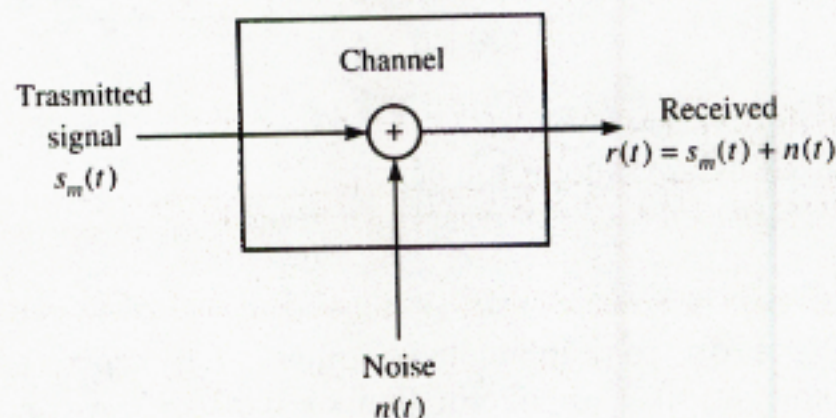


4. ΒΕΛΤΙΣΤΟΙ ΔΕΚΤΕΣ ΣΕ ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΟ ΛΕΥΚΟ ΓΚΑΟΥΣΣΙΑΝΟ ΘΟΡΥΒΟ

Αυτό το κεφάλαιο ασχολείται με την σχεδίαση και τα χαρακτηριστικά της απόδοσης των βέλτιστων δεκτών των διαφόρων μεθόδων διαμόρφωσης, όταν το κανάλι αλλοιώνει το σήμα που μεταδίδεται με την πρόσθεση γκαουσσισιανού θορύβου.

4-1 Ο ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΔΕΚΤΗΣ ΓΙΑ ΣΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΑΛΛΟΙΩΘΕΙ ΑΠΟ ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΟ ΛΕΥΚΟ ΓΚΑΟΥΣΣΙΑΝΟ ΘΟΡΥΒΟ

Θα αρχίσουμε αναπτύσσοντας ένα μαθηματικό μοντέλο για το σήμα στην είσοδο του δέκτη. Θεωρούμε ότι ο πομπός στέλνει ψηφιακές πληροφορίες με την χρήση M κυματομορφών $\{s_m(t), m = 1, 2, \dots, M\}$. Κάθε κυματομορφή μεταδίδεται εντός του διαστήματος σηματοδοσίας διάρκειας T . Πιο συγκεκριμένα, θα μελετήσουμε την μετάδοση πληροφοριών κατά το διάστημα $0 \leq t \leq T$.



ΣΧΗΜΑ 4-1-1 Το μοντέλο ενός λαμβανόμενου σήματος που διέρχεται μέσω ενός AWGN καναλιού.

Το κανάλι θεωρείται ότι αλλοιώνει το σήμα με την πρόσθεση λευκού γκαουσσισιανού θορύβου, όπως φαίνεται στο Σχ. 4-1-1. Έτσι, το σήμα που λαμβάνεται στο διάστημα $0 \leq t \leq T$ μπορεί να εκφρασθεί ως

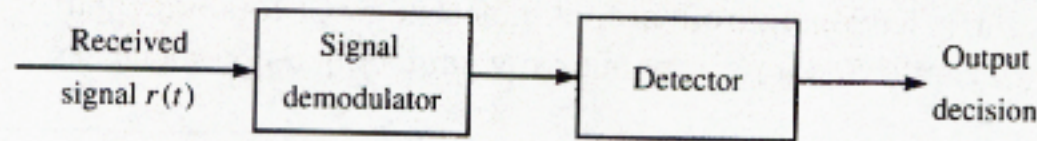
$$r(t) = s_m(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (4-1-1)$$

όπου το $n(t)$ υποδηλώνει μία δειγματική συνάρτηση της διαδικασίας του προσθετικού λευκού γκαουσσισιανού θορύβου (AWGN), με φασματική πυκνότητα ισχύος $\Phi_{nn}(f) = \frac{1}{2}N_0$ W/Hz. Επιθυμούμε να σχεδιάσουμε έναν δέκτη που είναι βέλτιστος, με την έννοια ότι ελαχιστοποιεί την πιθανότητα λάθους, με βάση την παρατήρηση του $r(t)$ κατά το διάστημα σηματοδοσίας. Είναι βολικό να υποδιαιρέσουμε τον δέκτη σε δύο τμήματα: τον αποδιαμορφωτή σήματος και τον ανιχνευτή, όπως φαίνεται στο Σχ. 4-1-2. Η λειτουργία του αποδιαμορφωτή σήματος είναι να μετατρέπει την λαμβανόμενη κυματομορφή $r(t)$ σε ένα N -διάστατο διάνυσμα $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$, όπου N είναι η διάσταση των μεταδιδόμενων κυματομορφών των σημάτων. Η λειτουργία του ανιχνευτή είναι να αποφασίσει ποια από τις M πιθανές κυματομορφές σήματος μεταδόθηκε, βάσει του διανύσματος $\mathbf{r}$.

Δύο υλοποιήσεις του αποδιαμορφωτή σήματος περιγράφονται στις επόμενες δύο ενότητες. Η μία βασίζεται στη χρήση συσχετιστών σήματος. Η δεύτερη βασίζεται στη χρήση προσαρμοσμένων φίλτρων. Ο βέλτιστος ανιχνευτής που ακολουθεί τον αποδιαμορφωτή σήματος είναι σχεδιασμένος ώστε να ελαχιστοποιεί την πιθανότητα λάθους.

4-1-1 Ο ΑΠΟΔΙΑΜΟΡΦΩΤΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΤΩΝ

Σε αυτήν την ενότητα, θα περιγράψουμε έναν συσχετιστικό αποδιαμορφωτή, ο οποίος αναλύει το λαμβανόμενο σήμα και τον θόρυβο σε N -διάστατα διανύσματα. Με άλλα λόγια, το σήμα και ο θόρυβος αναπτύσσονται σε μία σειρά ορθοκανονικών συναρτήσεων βάσης με βάρη $\{f_n(t)\}$. Υποθέτουμε ότι οι N συναρτήσεις βάσης καλύπτουν τον χώρο των σημάτων, έτσι ώστε κάθε ένα από τα πιθανά μεταδιδόμενα σήματα του συνόλου $\{s(t), 1 \leq m \leq M\}$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένας γραμμικός σταθμισμένος συνδυασμός των $\{f_n(t)\}$. Στην περίπτωση του θορύβου, οι συναρτήσεις $\{f_n(t)\}$ δεν καλύπτουν τον χώρο του θορύβου. Ωστόσο, όπως δείχνουμε στην συνέχεια, οι όροι του θορύβου που πέφτουν έξω από τον χώρο των σημάτων είναι ασυσχέτιστοι με την ανίχνευση του σήματος.



ΣΧΗΜΑ 4-1-2 Η δομή του δέκτη.

Υποθέστε ότι το λαμβανόμενο σήμα $r(t)$ περνά μέσα από μία παράλληλη συστοιχία N ετεροσυσχετιστών, οι οποίοι βασικά υπολογίζουν την προβολή του $r(t)$ στις N συναρτήσεις $\{f_n(t)\}$ βάσης, όπως φαίνεται στο Σχ. 4-1-3. Έτσι, έχουμε

$$\int_0^T r(t) f_k(t) dt = \int_0^T [s_m(t) + n(t)] f_k(t) dt \quad (4-1-2)$$

όπου

$$r_k = s_{mk} + n_k, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$s_{mk} = \int_0^T s_m(t) f_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4-1-3)$$

$$n_k = \int_0^T n(t) f_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

Το σήμα αναπαρίσταται τώρα από το διάνυσμα $\mathbf{s}_m$ με στοιχεία s_{mk} , $k = 1, 2, \dots, N$. Οι τιμές τους εξαρτώνται από το ποιο από τα M σήματα μεταδόθηκε. Τα στοιχεία $\{n_k\}$ είναι τυχαίες μεταβλητές που προκύπτουν από την παρουσία του προσθετικού θορύβου.

Πράγματι, μπορούμε να εκφράσουμε το λαμβανόμενο σήμα $r(t)$ στο διάστημα $0 \leq t \leq T$ ως

$$\begin{aligned} r(t) &= \sum_{k=1}^N s_{mk} f_k(t) + \sum_{k=1}^N n_k f_k(t) \\ &= \sum_{k=1}^N r_k f_k(t) + n'(t) \end{aligned} \quad (4-1-4)$$

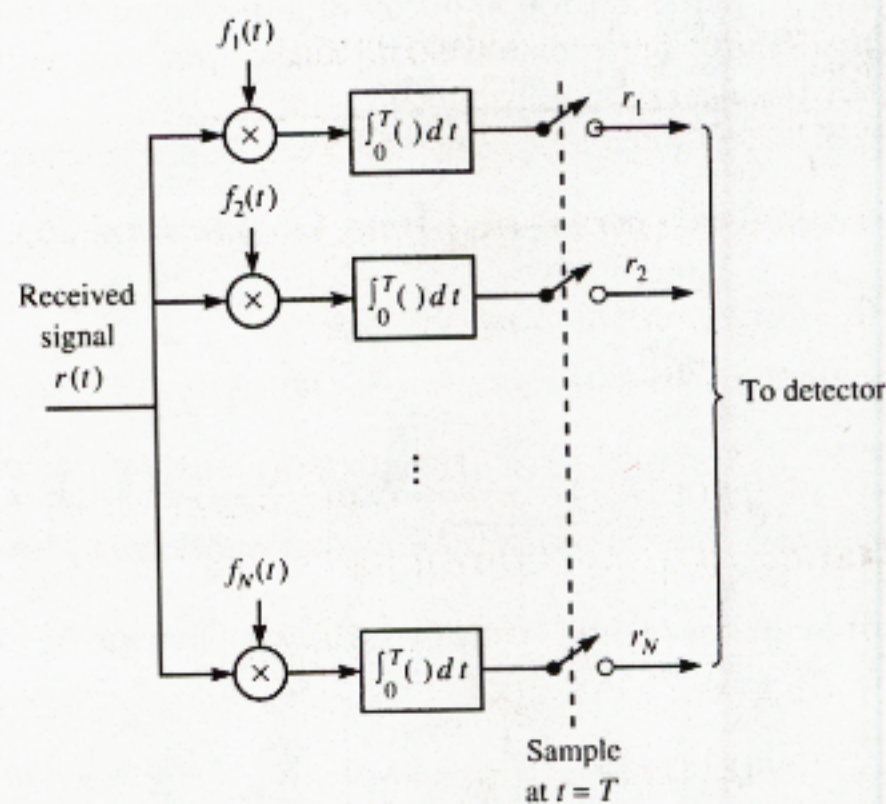
Ο όρος $n'(t)$, ορισμένος ως

$$n'(t) = n(t) - \sum_{k=1}^N n_k f_k(t) \quad (4-1-5)$$

είναι μία μηδενικού μέσου όρου διαδικασία θορύβου, η οποία αντιπροσωπεύει την διαφορά ανάμεσα στην αρχική διαδικασία του θορύβου $n(t)$ και το τμήμα που αντιστοιχεί στην προβολή του $n(t)$ στις συναρτήσεις βάσης $\{f_k(t)\}$. Θα δείξουμε παρακάτω ότι η $n'(t)$ είναι ασυσχέτιστη με την απόφαση ως προς το ποιο σήμα μεταδόθηκε. Κατά συνέπεια, η απόφαση μπορεί να βασισθεί εξ ολοκλήρου στο σήμα της εξόδου του συσχετιστή και τα στοιχεία θορύβου $r_k = s_{mk} + n_k$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Εφ' όσον τα σήματα $\{s_m(t)\}$ είναι ντετερμινιστικά, θα είναι ντετερμινιστικές και οι συνιστώσες του σήματος. Οι συνιστώσες του θορύβου $\{n_k\}$ είναι γκαουσιανές. Οι μέσες τιμές τους είναι

$$E(n_k) = \int_0^T E[n(t)] f_k(t) dt = 0 \quad (4-1-6)$$



ΣΧΗΜΑ 4-1-3 Ένας αποδιαμορφωτής συσχετιστικού τύπου.

για όλα τα n . Οι συνδιασπορές τους είναι

$$\begin{aligned} E(n_k n_m) &= \int_0^T \int_0^T E[n(t)n(\tau)] f_k(t) f_m(\tau) dt d\tau \\ &= \frac{1}{2} N_0 \int_0^T \int_0^T \delta(t-\tau) f_k(t) f_m(\tau) dt d\tau \\ &= \frac{1}{2} N_0 \int_0^T f_k(t) f_m(t) dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} N_0 \delta_{mk} \quad (4-1-7)$$

όπου $\delta_{mk} = 1$ όταν $m = k$ και μηδέν διαφορετικά. Συνεπώς, τα N στοιχεία θορύβου $\{n_k\}$ είναι μηδενικού μέσου όρου ασυσχέτιστες γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές με μία κοινή διασπορά $\sigma_n^2 = \frac{1}{2} N_0$.

Από την παραπάνω ανάπτυξη, εξυπακούεται ότι οι έξοδοι $\{r_k\}$ του συσχετιστή υπό την συνθήκη της μετάδοσης του m -οστού σήματος, είναι γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή

$$E(r_k) = E(s_{mk} + n_k) = s_{mk} \quad (4-1-8)$$

και ίσες διασπορές

$$\sigma_r^2 = \sigma_n^2 = \frac{1}{2} N_0 \quad (4-1-9)$$

Εφ' όσον οι συντεταγμένες του θορύβου $\{n_k\}$ είναι ασυσχέτιστες γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές, είναι επίσης στατιστικώς ανεξάρτητες. Ως συνέπεια, οι έξοδοι του συσχετιστή $\{r_k\}$ με δεδομένη τη μετάδοση του m -οστού σήματος, είναι στατιστικώς ανεξάρτητες γκαουσιανές μεταβλητές. Έτσι, οι υπό συνθήκη πυκνότητες πιθανότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών $[r_1, r_2, \dots, r_N] = \mathbf{r}$ είναι απλώς

$$p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) = \prod_{k=1}^N p(r_k | s_{mk}), m = 1, 2, \dots, M \quad (4-1-10)$$

όπου

$$p(r_k | s_{mk}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left[-\frac{(r_k - s_{mk})^2}{N_0} \right], k = 1, 2, \dots, N \quad (4-1-11)$$

Αντικαθιστώντας την (4-1-11) στην (4-1-10), λαμβάνουμε τις από κοινού υπό συνθήκη σ.π.π.

$$p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp \left[-\sum_{k=1}^N \frac{(r_k - s_{mk})^2}{N_0} \right], m = 1, 2, \dots, M \quad (4-1-12)$$

Τέλος, θέλουμε να δείξουμε ότι οι έξοδοι του συσχετιστή αποτελούν επαρκή στατιστικά στοιχεία (*sufficient statistics*) για την επιλογή της απόφασης ως προς το ποιο από τα M σήματα έχει μεταδοθεί, με άλλα λόγια, ότι δεν μπορεί να εξαχθεί επιπλέον σχετική πληροφορία από την υπολειπόμενη διαδικασία θορύβου $n'(t)$. Πράγματι, η $n'(t)$ είναι ασυσχέτιστη με τις N εξόδους, $\{r_k\}$, του συσχετιστή, δηλαδή

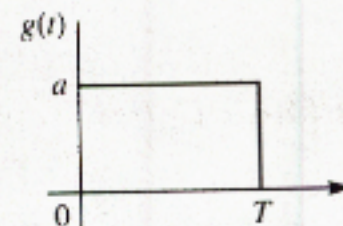
$$\begin{aligned}
E[n'(t)r_k] &= E[n'(t)]s_{mk} + E[n'(t)n_k] \\
&= E[n'(t)n_k] \\
&= E\left\{[n(t) - \sum_{j=1}^N n_j f_j(t)]n_k\right\} \\
&= \int_0^T E[n(t)n(\tau)]f_k(\tau)d\tau - \sum_{j=1}^N E(n_j n_k)f_j(t) \\
&= \frac{1}{2}N_0 f_k(t) - \frac{1}{2}N_0 f_k(t) = 0
\end{aligned} \tag{4-1-13}$$

Εφ' όσον οι $n'(t)$ και $\{r_k\}$ είναι γκαουσιανές και ασυσχέτιστες, είναι και στατιστικώς ανεξάρτητες. Συνεπώς, η $n'(t)$ δεν περιέχει πληροφορίες σχετικές με το ποια κυματομορφή σήματος μεταδόθηκε. Όλες οι σχετικές πληροφορίες περιέχονται στις εξόδους του συσχετιστή $\{r_k\}$. Έτσι, η $n'(t)$ μπορεί να αγνοηθεί.

Παράδειγμα 4-1-1

Θεωρείστε ένα σύνολο M -αδικών PAM σημάτων βασικής ζώνης, στο οποίο η βασική μορφή παλμού $g(t)$ είναι ορθογώνια, όπως φαίνεται στο Σχ. 4-1-4. Ο προσθετικός θόρυβος είναι μία μηδενικού μέσου όρου λευκή γκαουσιανή διαδικασία θορύβου. Ας καθορίσουμε την συνάρτηση βάσης $f(t)$ και την έξοδο του αποδιαμορφωτή συσχετιστικού τύπου. Η ενέργεια τού τετραγωνικού παλμού είναι

$$E_g = \int_0^T g^2(t)dt = \int_0^T a^2 dt = a^2 T$$



ΣΧΗΜΑ 4-1-4. Ο παλμός του σήματος του Παραδείγματος 4-1-1.

Εφ' όσον το σύνολο των PAM σημάτων έχει διάσταση $N = 1$, υπάρχει μία μόνο συνάρτηση βάσης $f(t)$. Αυτή δίνεται ως

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\sqrt{a^2 T}} g(t) \\
&= \begin{cases} 1/\sqrt{T}, & (0 \leq t \leq T) \\ 0, & (\text{αλλιώς}) \end{cases}
\end{aligned}$$

Η έξοδος του αποδιαμορφωτή συσχετιστικού τύπου είναι

$$r = \int_0^T r(t) f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T r(t) dt$$

Είναι ενδιαφέρουσα η παρατήρηση ότι ο συσχετιστής γίνεται ένας απλός ολοκληρωτής όταν η $f(t)$ είναι ορθογώνια. Εάν αντικαταστήσουμε ως προς το $r(t)$, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{\sqrt{T}} \left\{ \int_0^T [s_m(t) + n(t)] dt \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \left[\int_0^T s_m(t) dt + \int_0^T n(t) dt \right] \\ r &= s_m + n \end{aligned}$$

όπου ο όρος του θορύβου χαρακτηρίζεται από $E(n) = 0$ και

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= E \left[\frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T n(t) n(\tau) dt d\tau \right] \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T E[n(t) n(\tau)] dt d\tau \\ &= \frac{N_0}{2T} \int_0^T \int_0^T \delta(t - \tau) dt d\tau = \frac{1}{2} N_0 \end{aligned}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της εξόδου μετά την δειγματοληψία είναι

$$p(r | s_m) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left[-\frac{(r - s_m)^2}{N_0} \right]$$

4-1-2 Ο Αποδιαμορφωτής Προσαρμοσμένου Φίλτρου

Αντί να χρησιμοποιήσουμε μία συστοιχία N συσχετιστών για την παραγωγή των μεταβλητών $\{r_k\}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μία συστοιχία N γραμμικών φίλτρα. Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι οι κρουστικές αποκρίσεις των N φίλτρων είναι

$$h_k(t) = f_k(T - t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (4-1-14)$$

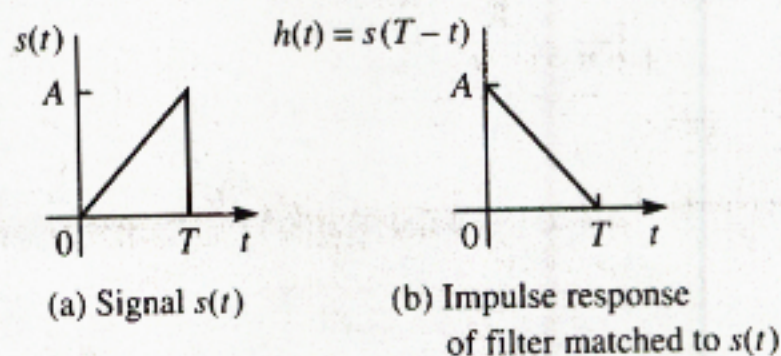
όπου $\{f_k(t)\}$ είναι οι N συναρτήσεις βάσης και $h_k(t) = 0$ έξω από το διάστημα $0 \leq t \leq T$. Οι εξοδοί αυτών των φίλτρων είναι

$$\begin{aligned} y_k(t) &= \int_0^t r(\tau) h_k(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^T r(\tau) f_k(T - t + \tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (4-1-15)$$

Τώρα, αν πάρουμε τα δείγματα των εξόδων των φίλτρων στην χρονική στιγμή $t = T$, λαμβάνουμε

$$y_k(T) = \int_0^T r(\tau) f_k(\tau) d\tau = r_k, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4-1-16)$$

Έτσι, τα δείγματα των εξόδων των φίλτρων στην χρονική στιγμή $t = T$ είναι ακριβώς το σύνολο των τιμών $\{r_k\}$ που παίρνουμε από τους N γραμμικούς συσχετιστές.



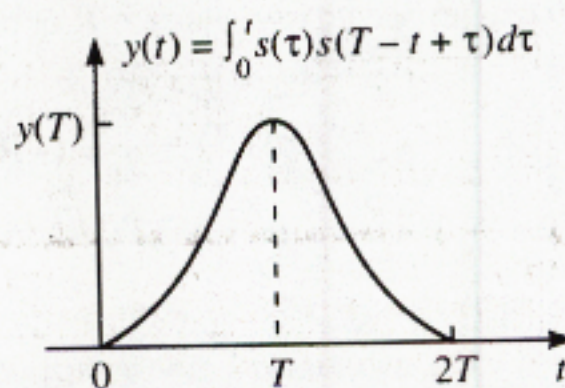
ΣΧΗΜΑ 4-1-5 Το σήμα $s(t)$ και το φίλτρο το προσαρμοσμένο στο $s(t)$.

Ένα φίλτρο του οποίου η κρουστική απόκριση είναι $h(t) = s(T-t)$, όπου το $s(t)$ θεωρείται περιορισμένο στο χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq T$, ονομάζεται *προσαρμοσμένο φίλτρο (matched filter)* στο σήμα $s(t)$. Ένα παράδειγμα σήματος και του προσαρμοσμένου του φίλτρου φαίνεται στο Σχ. 4-1-5. Η απόκριση του $h(t) = s(T-t)$ στο σήμα $s(t)$ είναι

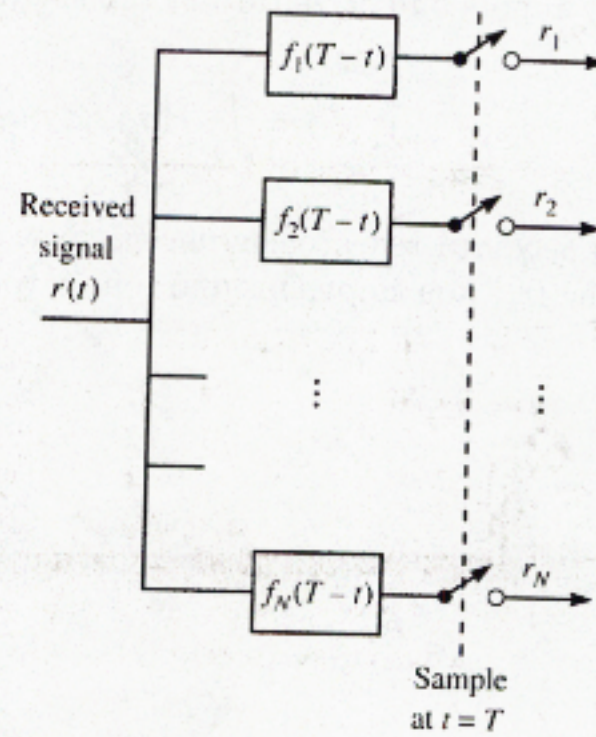
$$y(t) = \int_0^t s(\tau) s(T-t+\tau) d\tau \quad (4-1-17)$$

η οποία είναι βασικά η χρονική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος $s(t)$. Το Σχ. 4-1-6 δείχνει την $y(t)$ για τον τριγωνικό παλμό που φαίνεται στο Σχ. 4-1-5. Παρατηρείστε ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $y(t)$ είναι μία άρτια συνάρτηση του t , η οποία έχει μία αιχμή στο $t = T$.

Στην περίπτωση του αποδιαμορφωτή που περιγράφεται παραπάνω, τα N προσαρμοσμένα φίλτρα είναι προσαρμοσμένα στις συναρτήσεις βάσης $\{f_k(t)\}$. Στο Σχ. 4-1-7 φαίνεται ο αποδιαμορφωτής προσαρμοσμένου φίλτρου που παράγει τις μεταβλητές παρατήρησης $\{r_k\}$.



ΣΧΗΜΑ 4-1-6 Η έξοδος του προσαρμοσμένου φίλτρου είναι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του $s(t)$.



ΣΧΗΜΑ 4-1-7 Ένας Αποδιαμορφωτής προσαρμοσμένου φίλτρου.

Οι Ιδιότητες του Προσαρμοσμένου Φίλτρου Ένα προσαρμοσμένο φίλτρο παρουσιάζει ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Ας αποδείξουμε την πιο σημαντική, η οποία μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Εάν ένα σήμα έχει αλλοιωθεί από AWGN, το φίλτρο με κρουστική απόκριση προσαρμοσμένη με το $s(t)$ μεγιστοποιεί τον λόγο σήματος-προς-θόρυβο (SNR) της εξόδου. Για να αποδείξουμε την ιδιότητα αυτή, θεωρούμε ότι το λαμβανόμενο σήμα $r(t)$ αποτελείται από το σήμα $s(t)$ και τον AWGN (θόρυβο) $n(t)$ που έχει μηδενικό μέσο όρο και φασματικής πυκνότητας ισχύος: $\Phi_{nn}(f) = \frac{1}{2} N_0$ W/Hz. Υποθέστε ότι το σήμα $r(t)$ περνά από ένα φίλτρο με κρουστική απόκριση $h(t)$, $0 \leq t \leq T$ και η έξοδός του υφίσταται δειγματοληψία στην χρονική στιγμή $t = T$. Η απόκριση του φίλτρου στις συνιστώσες του σήματος και του θορύβου είναι

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t r(\tau) h(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^t s(\tau) h(t-\tau) d\tau + \int_0^t n(\tau) h(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4-1-18)$$

Στην στιγμή δειγματοληψίας $t = T$, οι συνιστώσες του σήματος και του θορύβου είναι

$$\begin{aligned} y(T) &= \int_0^T s(\tau) h(T-\tau) d\tau + \int_0^T n(\tau) h(T-\tau) d\tau \\ &= y_s(T) + y_n(T) \end{aligned} \quad (4-1-19)$$

όπου η $y_s(T)$ αναπαριστά την συνιστώσα του σήματος και η $y_n(T)$ την συνιστώσα του θορύβου. Το πρόβλημα είναι να επιλέξουμε την κρουστική απόκριση του φίλτρου η οποία μεγιστοποιεί τον λόγο σήματος-προς-θόρυβο (SNR_0) στην έξοδο που ορίζεται ως

$$SNR_0 = \frac{y_s^2(T)}{E[y_n^2(T)]} \quad (4-1-20)$$

Ο παρονομαστής στην (4-1-20) είναι απλώς η διασπορά του όρου του θορύβου στην έξοδο του φίλτρου. Ας υπολογίσουμε την $E[y_n^2(T)]$. Έχουμε

$$\begin{aligned} E[y_n^2(T)] &= \int_0^T \int_0^T E[n(\tau)n(t)]h(T-\tau)h(T-t)dtd\tau \\ &= \frac{1}{2}N_0 \int_0^T \int_0^T \delta(t-\tau)h(T-\tau)h(T-t)dtd\tau \\ &= \frac{1}{2}N_0 \int_0^T h^2(T-t)dt \end{aligned} \quad (4-1-21)$$

Παρατηρείστε ότι η διασπορά εξαρτάται από την φασματική πυκνότητα ισχύος του θορύβου και την ενέργεια της κρουστικής απόκρισης $h(t)$.

Αντικαθιστώντας τις $y_n(T)$ και $E[y_n^2(T)]$ στην (4-1-20), λαμβάνουμε την έκφραση για τον SNR της εξόδου ως

$$SNR_0 = \frac{\left[\int_0^T s(\tau)h(T-\tau)d\tau \right]^2}{\frac{1}{2}N_0 \int_0^T h^2(T-t)dt} = \frac{\left[\int_0^T h(\tau)s(T-\tau)d\tau \right]^2}{\frac{1}{2}N_0 \int_0^T h^2(T-t)dt} \quad (4-1-22)$$

Εφ' όσον ο παρονομαστής του SNR εξαρτάται από την ενέργεια της $h(t)$, ο μέγιστος SNR στην έξοδο ως προς την $h(t)$ λαμβάνεται με την μεγιστοποίηση του αριθμητή, με την προϋπόθεση ότι ο παρονομαστής παραμένει σταθερός. Η μεγιστοποίηση του αριθμητή πραγματοποιείται πολύ εύκολα με τη χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz, σύμφωνα με την οποία, γενικώς, εάν $g_1(t)$ και $g_2(t)$ είναι πεπερασμένης-ενέργειας σήματα, τότε

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t)dt \right]^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} g_1^2(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} g_2^2(t)dt \quad (4-1-23)$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $g_1(t) = Cg_2(t)$, για οποιαδήποτε αυθαίρετη σταθερά C . Εάν θέσουμε $g_1(t) = h(t)$ και $g_2(t) = S(T-t)$, είναι προφανές ότι ο SNR μεγιστοποιείται όταν $h(t) = Cs(T-t)$, δηλαδή, όταν η $h(t)$ συνδυάζεται με το σήμα $s(t)$. Ο όρος κλιμάκωσης C^2 απαλείφεται από την έκφραση του SNR, εφ' όσον εμφανίζεται και στον αριθμητή και στον παρονομαστή.

Ο μέγιστος SNR εξόδου που λαμβάνεται με το προσαρμοσμένο φίλτρο είναι

$$\begin{aligned} SNR_0 &= \frac{2}{N_0} \int_0^T s^2(t)dt \\ &= \frac{2E}{N_0} \end{aligned} \quad (4-1-24)$$

Σημειώστε ότι ο SNR εξόδου του προσαρμοσμένου φίλτρου εξαρτάται από την ενέργεια της κυματομορφής $s(t)$, αλλά όχι από τα λεπτομερή χαρακτηριστικά της $s(t)$. Αυτή είναι μία άλλη ενδιαφέρουσα ιδιότητα του προσαρμοσμένου φίλτρου.

Μία Ερμηνεία του Προσαρμοσμένου Φίλτρου στο Πεδίο της Συχνότητας. Το προσαρμοσμένο φίλτρο έχει μία ενδιαφέρουσα ερμηνεία στο πεδίο της συχνότητας. Εφ' όσον $h(t) = S(T-t)$, ο μετασχηματισμός Fourier της σχέσης είναι

$$\begin{aligned} H(f) &= \int_0^T s(T-t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \left[\int_0^T s(\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau \right] e^{-j2\pi fT} \\ &= S^*(f) e^{-j2\pi fT} \end{aligned} \quad (4-1-25)$$

Παρατηρούμε ότι το προσαρμοσμένο φίλτρο έχει μία απόκριση συχνότητας που αποτελεί τον μιγαδικό συζυγή του φάσματος του μεταδιδόμενου σήματος πολλαπλασιασμένο επί τον παράγοντα φάσης $e^{-j2\pi fT}$, ο οποίος αναπαριστά την καθυστέρηση δειγματοληψίας του T . Με άλλα λόγια, $|H(f)| = |S(f)|$, ώστε το μέτρο της απόκρισης του προσαρμοσμένου φίλτρου να ταυτίζεται με το φάσμα του μεταδιδόμενου σήματος. Από την άλλη πλευρά, η φάση του $H(f)$ είναι η αρνητική της φάσης του $S(f)$.

Εάν τώρα το σήμα $s(t)$ με φάσμα $S(f)$ περάσει μέσα από το προσαρμοσμένο φίλτρο, η έξοδος του φίλτρου έχει ένα φάσμα $Y(f) = |S(f)|^2 e^{-j2\pi fT}$. Άρα, η κυματομορφή εξόδου είναι

$$\begin{aligned} y_s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} Y(f) e^{j2\pi ft} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 e^{-j2\pi fT} e^{j2\pi ft} df \end{aligned} \quad (4-1-26)$$

Παίρνοντας το δείγμα από την έξοδο του προσαρμοσμένου φίλτρου στην $t = T$, λαμβάνουμε

$$y_s(T) = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = \int_0^T s^2(t) dt = E \quad (4-1-27)$$

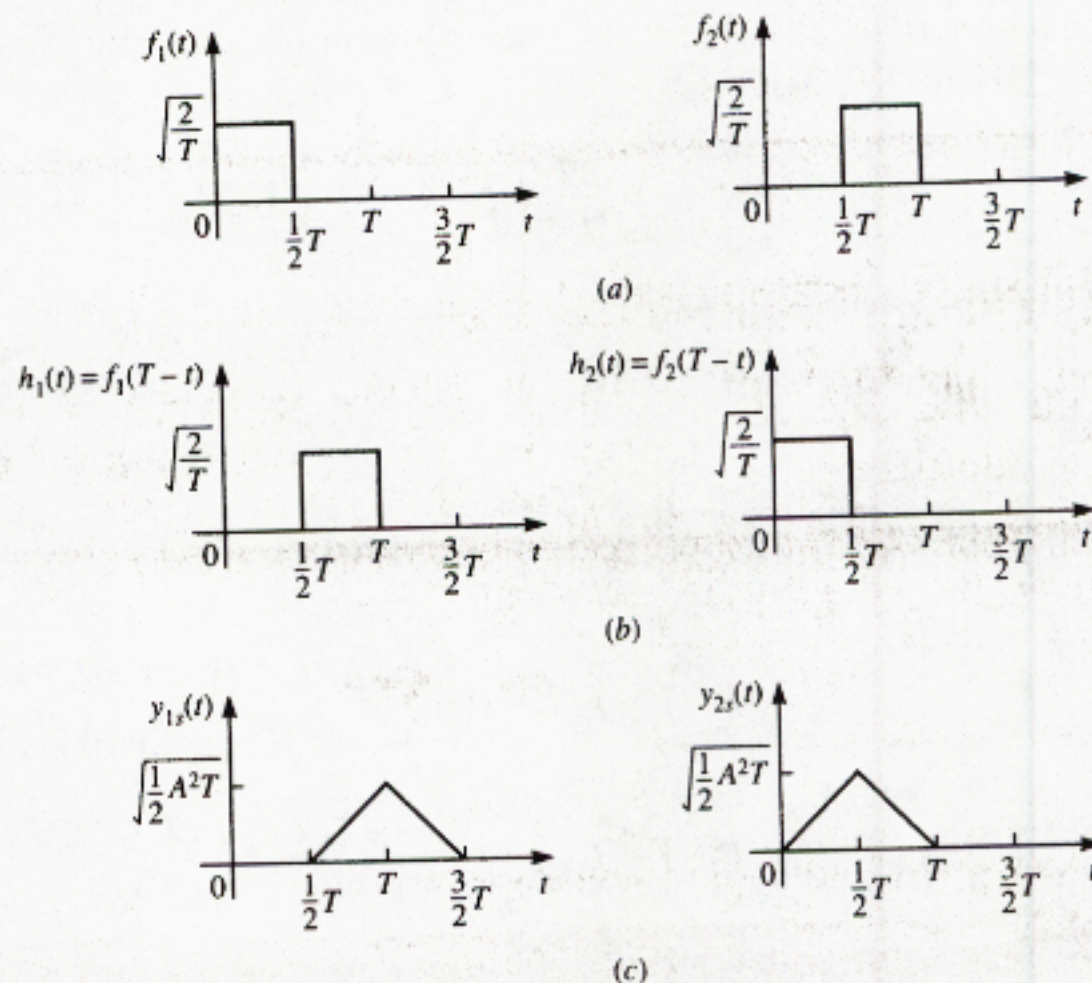
όπου το τελευταίο βήμα προκύπτει από την σχέση του Parseval.

Ο θόρυβος στην έξοδο του προσαρμοσμένου φίλτρου έχει φασματική πυκνότητα ισχύος

$$\Phi_0(f) = \frac{1}{2} |H(f)|^2 N_0 \quad (4-1-28)$$

Επομένως, η ολική ισχύς του θορύβου στην έξοδο του προσαρμοσμένου φίλτρου είναι

$$P_n = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0(f) df = \frac{1}{2} N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \frac{1}{2} EN_0 \quad (4-1-29)$$



ΣΧ. 4-1-8 Οι Συναρτήσεις βάσης και οι αποκρίσεις των προσαρμοσμένων φίλτρων του Παραδείγματος 4-1-2.

Ο SNR εξόδου είναι απλώς ο λόγος της ισχύος του σήματος P_s , ο οποίος δίνεται από την

$$P_s = y_s^2(T) \quad (4-1-30)$$

προς την ισχύ του θορύβου P_n . Άρα,

$$SNR_0 = \frac{P_s}{P_n} = \frac{E^2}{\frac{1}{2} E N_0} = \frac{2E}{N_0} \quad (4-1-31)$$

το οποίο συμφωνεί με το αποτέλεσμα που δίνεται από την (4-1-24).

Παράδειγμα 4-1-2

Υποθέστε ότι χρησιμοποιούμε τα $M = 4$ αμφορθογώνια σήματα που φαίνονται στο Σχ. 4-1-8 για την μετάδοση πληροφοριών μέσω ενός AWGN καναλιού. Ο θόρυβος θεωρείστε ότι έχει μηδενικό μέσο όρο και φασματική πυκνότητα ισχύος $\frac{1}{2} N_0$. Ας καθορίσουμε τις συναρτήσεις βάσης για αυτό το σύνολο σημάτων, τις κρουστικές αποκρίσεις των αποδιαμορφωτών προσαρμοσμένων φίλτρων και τις κυματομορφές εξόδου των αποδιαμορφωτών προσαρμοσμένων φίλτρων όταν το μεταδιδόμενο σήμα είναι το $s_1(t)$.

Τα $M = 4$ αμφορθογώνια σήματα έχουν διάσταση $N = 2$. Έτσι, χρειάζονται δύο συναρτήσεις βάσης για την αναπαράσταση των σημάτων. Από το Σχ. 4-1-8, επιλέγουμε τις $f_1(t)$ και $f_2(t)$ ως

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \begin{cases} \sqrt{2/T}, & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}T) \\ 0, & (\text{αλλιως}) \end{cases} \\ f_2(t) &= \begin{cases} \sqrt{2/T}, & (\frac{1}{2}T \leq t \leq T) \\ 0, & (\text{αλλιως}) \end{cases} \end{aligned} \quad (4-1-32)$$

Αυτές οι κυματομορφές φαίνονται στο Σχ. 4-1-8 (α). Οι κρουστικές αποκρίσεις των δύο προσαρμοσμένων φίλτρων είναι

$$\begin{aligned} h_1(t) &= f_1(T-t) = \begin{cases} \sqrt{2/T}, & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}T) \\ 0, & (\text{αλλιως}) \end{cases} \\ h_2(t) &= f_2(T-t) = \begin{cases} \sqrt{2/T}, & (\frac{1}{2}T \leq t \leq T) \\ 0, & (\text{αλλιως}) \end{cases} \end{aligned} \quad (4-1-33)$$

και φαίνονται στο Σχ. 4-1-8 (β).

Όταν μεταδίδεται το $s_1(t)$, οι (απαλλαγμένες από θόρυβο) αποκρίσεις των δύο προσαρμοσμένων φίλτρων φαίνονται στο Σχ. 4-1-8(γ). Εφ' όσον έχουμε πάρει δείγματα των $y_1(t)$ και $y_2(t)$ στην $t = T$, παρατηρούμε ότι $y_{1s}(T) = \sqrt{\frac{1}{2}A^2T}$ και $y_{2s}(T) = 0$. Ας σημειωθεί ότι $\frac{1}{2}A^2T = E$, είναι η ενέργεια του σήματος. Έτσι, το λαμβανόμενο διάνυσμα που σχηματίζεται από τις εξόδους των δύο προσαρμοσμένων φίλτρων στην στιγμή δειγματοληψίας $t = T$ είναι

$$\mathbf{r} = [r_1 \ r_2] = [\sqrt{E} + n_1 \ n_2] \quad (4-1-34)$$

όπου $n_1 = y_{1n}(T)$ και $n_2 = y_{2n}(T)$ είναι οι συνιστώσες του θορύβου στις εξόδους των προσαρμοσμένων φίλτρων, ο οποίος δίνονται από την

$$y_{kn}(T) = \int_0^T n(t) f_k(t) dt, \quad k=1, 2 \quad (4-1-35)$$

Προφανώς, $E(n_k) = E[y_{kn}(T)] = 0$. Η διασπορά τους είναι

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= E[y_{kn}^2(T)] = \int_0^T \int_0^T E[n(T)n(\tau)] f_k(t) f_k(\tau) dt d\tau \\ &= \frac{1}{2} N_0 \int_0^T \int_0^T \delta(t-\tau) f_k(\tau) f_k(t) dt d\tau \\ &= \frac{1}{2} N_0 \int_0^T f_k^2(t) dt = \frac{1}{2} N_0 \end{aligned} \quad (4-1-36)$$

Παρατηρούμε ότι ο SNR_0 για το πρώτο προσαρμοσμένο φίλτρο είναι

$$SNR_0 = \frac{(\sqrt{E})^2}{\frac{1}{2} N_0} = \frac{2E}{N_0} \quad (4-1-37)$$

το οποίο συμφωνεί με το προηγούμενο αποτέλεσμα. Ας σημειωθεί επίσης ότι οι τέσσερις πιθανές έξοδοι των δύο προσαρμοσμένων φίλτρων, οι οποίες αντιστοιχούν στα τέσσερα πιθανώς μεταδοθέντα σήματα στο Σχ. 4-1-8 είναι οι $(r_1, r_2) = (\sqrt{E} + n_1, n_2)$, $(r_1, r_2) = (n_1, \sqrt{E} + n_2)$, $(r_1, r_2) = (-\sqrt{E} + n_1, n_2)$ και $(r_1, r_2) = (n_1, -\sqrt{E} + n_2)$.

4-1-3 Ο Βέλτιστος Ανιχνευτής

Έχουμε αποδείξει ότι, όταν ένα σήμα μεταδίδεται μέσω ενός AWGN καναλιού, το διάνυσμα $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$ που περιέχει όλες τις σχετικές πληροφορίες της κυματομορφής του λαμβανομένου σήματος το παράγει είτε ένας αποδιαμορφωτής συσχετιστών είτε ένας αποδιαμορφωτής προσαρμοσμένων φίλτρων. Σε αυτή την ενότητα, περιγράφουμε έναν κανόνα βέλτιστης απόφασης που βασίζεται στο διάνυσμα παρατήρησης $\mathbf{r}$. Στα πλαίσια της ανάλυσης αυτής, θεωρούμε ότι δεν υπάρχει μνήμη στα σήματα που μεταδίδονται σε διαδοχικά διαστήματα σήματος.

Επιθυμούμε να σχεδιάσουμε έναν ανιχνευτή σήματος ο οποίος θα αποφασίζει ως προς το ποιο σήμα έχει μεταδοθεί σε κάθε διάστημα σηματοδοσίας, βασιζόμενος στην παρατήρηση του διανύσματος $\mathbf{r}$ σε κάθε διάστημα, με έναν τρόπο που να μεγιστοποιεί την πιθανότητα σωστής απόφασης. Με αυτόν το στόχο κατά νου, μελετούμε έναν κανόνα απόφασης βασισμένο στον υπολογισμό των *εκ των υστέρων πιθανοτήτων* (*posterior probabilities*) που ορίζονται ως

$$P(\text{μεταδόθηκε το σήμα } s_m | \text{έχει ληφθεί το } \mathbf{r}), \quad m = 1, 2, \dots, M$$

τις οποίες συντομεύουμε ως $P(s_m | \mathbf{r})$. Το κριτήριο απόφασης βασίζεται στην επιλογή του σήματος, το οποίο αντιστοιχεί στην μέγιστη τιμή από το σύνολο των *εκ των υστέρων πιθανοτήτων* $P(s_m | \mathbf{r})$. Αργότερα, θα δείξουμε ότι το κριτήριο μεγιστοποιεί την πιθανότητα σωστής απόφασης και, συνεπώς, ελαχιστοποιεί την πιθανότητα σφάλματος. Αυτό το κριτήριο απόφασης ονομάζεται *κριτήριο της μέγιστης εκ των υστέρων πιθανότητας* (*maximum a posteriori probability* - MAP). Εάν χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του Bayes, οι *εκ των υστέρων πιθανότητες* μπορούν να εκφραστούν ως

$$P(s_m | \mathbf{r}) = \frac{p(\mathbf{r} | s_m) P(s_m)}{p(\mathbf{r})} \quad (4-1-38)$$

όπου $p(\mathbf{r} | s_m)$ είναι η υπό συνθήκη σ.π.π. του παρατηρούμενου διανύσματος s_m , και $P(s_m)$ είναι η *εκ των προτέρων πιθανότητα* (*a priori probability*) να μεταδοθεί το m -οστό σήμα. Ο παρονομαστής του (4-1-38) μπορεί να εκφρασθεί ως

$$p(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^M p(\mathbf{r} | s_m) P(s_m) \quad (4-1-39)$$

Από τις (4-1-38) και (4-1-39), παρατηρούμε ότι ο υπολογισμός των εκ των υστέρων πιθανοτήτων $P(\mathbf{s}_m|\mathbf{r})$ απαιτεί την γνώση των εκ των προτέρων πιθανοτήτων (*a priori probabilities*) $P(\mathbf{s}_m)$ και των υπό συνθήκη σ.π.π. $p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)$ για $m = 1, 2, \dots, M$.

Όταν τα M σήματα είναι εκ των προτέρων ισοπίθανα, δηλαδή, $P(\mathbf{s}_m) = 1/M$ για όλα τα M , το κριτήριο MAP μπορεί κάπως να απλοποιηθεί. Επιπλέον, σημειώνουμε ότι ο παρονομαστής στην (4-1-38) δεν εξαρτάται από το ποιο είναι το σήμα που μεταδίδεται. Συνεπώς, ο κανόνας απόφασης που βασίζεται στην εύρεση του σήματος που μεγιστοποιεί την $P(\mathbf{s}_m|\mathbf{r})$ είναι ισοδύναμος με την εύρεση του σήματος που μεγιστοποιεί την $p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)$.

Η υπό συνθήκη σ.π.π. $p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)$ ή οποιαδήποτε μονοτονική της συνάρτηση ονομάζεται συνήθως *συνάρτηση πιθανοφάνειας (likelihood function)*. Το κριτήριο απόφασης που βασίζεται στην μεγιστοποίηση της $p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)$ ως προς τα M σήματα ονομάζεται *κριτήριο μέγιστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood criterion - ML)*. Παρατηρούμε ότι ένας ανιχνευτής που βασίζεται στο κριτήριο MAP και ένας που βασίζεται στο ML κριτήριο παίρνουν τις ίδιες αποφάσεις εφ' όσον οι εκ των προτέρων πιθανότητες $P(\mathbf{s}_m)$ είναι όλες ίσες, δηλαδή, τα σήματα $\{\mathbf{s}_m\}$ είναι ισοπίθανα.

Στην περίπτωση του AWGN καναλιού, η συνάρτηση πιθανοφάνειας $p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)$ δίνεται από την (4-1-12). Για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς, μπορούμε να δουλέψουμε με τον φυσικό λογάριθμο της $p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)$ που είναι μία μονοτονική συνάρτηση. Έτσι,

$$\ln p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m) = -\frac{1}{2} N \ln(\pi N_0) - \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^N (r_k - s_{mk})^2 \quad (4-1-40)$$

Το μέγιστο του $\ln p(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)$ ως προς το $\mathbf{s}_m$ ισοδυναμεί με την εύρεση του σήματος $\mathbf{s}_m$ το οποίο μεγιστοποιεί την Ευκλείδεια απόσταση

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = \sum_{k=1}^N (r_k - s_{mk})^2 \quad (4-1-41)$$

Ονομάζουμε το $D(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m)$, $m = 1, 2, \dots, M$, *μέτρο της απόστασης (distance metric)*. Έτσι, στο AWGN κανάλι, ο κανόνας απόφασης που βασίζεται στο ML κριτήριο ανάγεται στην εύρεση του $\mathbf{s}_m$ που έχει την μικρότερη απόσταση από το διάνυσμα του λαμβανομένου σήματος $\mathbf{r}$. Θα αναφερόμαστε σε αυτόν τον κανόνα απόφασης ως την *ανίχνευση της ελάχιστης απόστασης (minimum distance detection)*.

Μία άλλη ερμηνεία του κανόνα βέλτιστης απόφασης που βασίζεται στο ML κριτήριο, προκύπτει με την ανάλυση του μέτρου της απόστασης της (4-1-41) ως

$$\begin{aligned} D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) &= \sum_{n=1}^N r_n^2 - 2 \sum_{n=1}^N r_n s_{mn} + \sum_{n=1}^N s_{mn}^2 \\ &= |\mathbf{r}|^2 - 2\mathbf{r} \bullet \mathbf{s}_m + |\mathbf{s}_m|^2, \quad m = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (4-1-42)$$

Ο όρος $|\mathbf{r}|^2$ είναι κοινός σε όλα τα μέτρα αποφάσεων, και έτσι μπορεί να αγνοηθεί κατά τον υπολογισμό των μέτρων. Το αποτέλεσμα είναι ένα σύνολο από τροποποιημένα μέτρα αποστάσεων

$$D'(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = -2\mathbf{r} \bullet \mathbf{s}_m + |\mathbf{s}_m|^2 \quad (4-1-43)$$

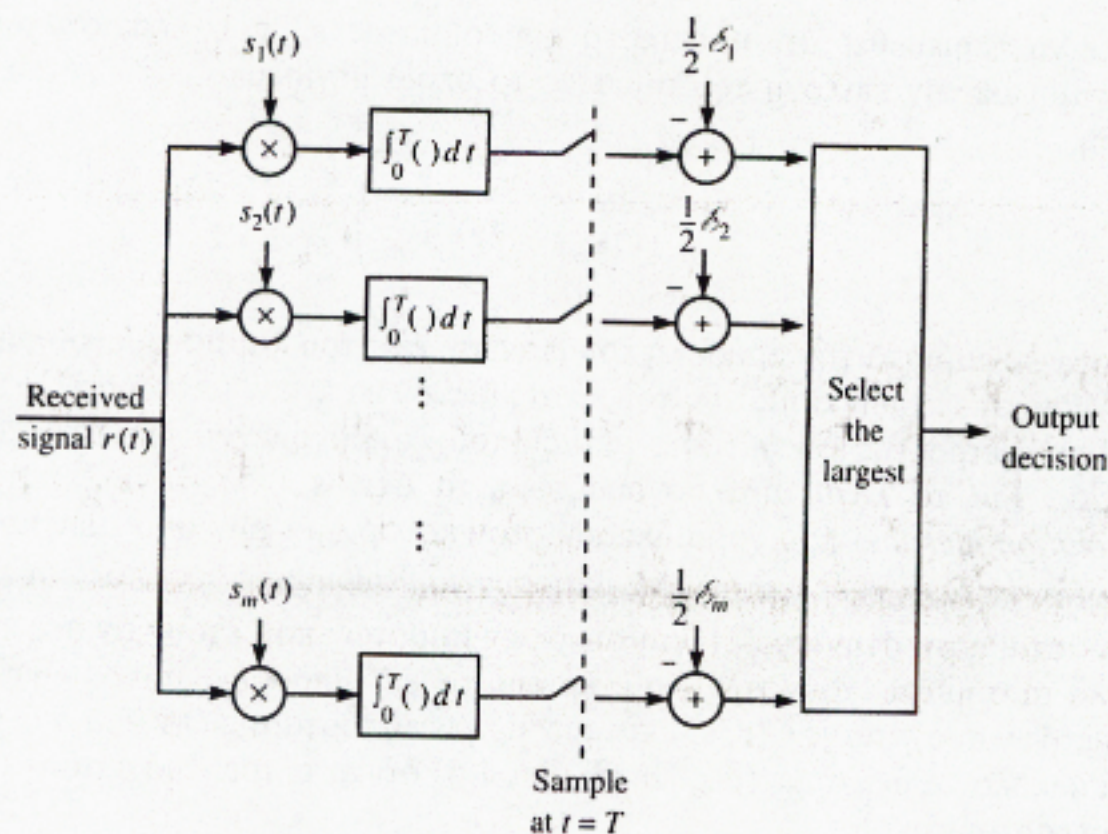
Πρέπει να σημειωθεί ότι η επιλογή του σήματος s_m που ελαχιστοποιεί το $D'(\mathbf{r}, s_m)$ είναι ισοδύναμη με την επιλογή του σήματος το οποίο μεγιστοποιεί το μέτρο $C(\mathbf{r}, s_m) = -D'(\mathbf{r}, s_m)$, δηλαδή,

$$C(\mathbf{r}, s_m) = 2\mathbf{r} \bullet \mathbf{s}_m - |\mathbf{s}_m|^2 \quad (4-1-44)$$

Ο όρος $\mathbf{r} \bullet \mathbf{s}_m$ παριστά την προβολή του διανύσματος του λαμβανόμενου σήματος σε κάθε ένα από τα M διανύσματα των σημάτων που είναι πιθανόν να έχουν μεταδοθεί. Η τιμή της κάθε προβολής είναι ένα μέτρο της συσχέτισης μεταξύ του λαμβανόμενου διανύσματος και του m -οστού σήματος. Για το λόγο αυτό, ονομάζουμε τα $C(\mathbf{r}, s_m)$, $m = 1, 2, \dots, M$, μέτρα συσχέτισης (*correlation metrics*) που χρησιμεύουν στον καθορισμό των σημάτων που μεταδόθηκαν. Τέλος, οι όροι $|\mathbf{s}_m|^2 = E_m$, $m = 1, 2, \dots, M$, μπορούν να θεωρηθούν όροι πόλωσης, οι οποίοι εξυπηρετούν ως αντιστάθμιση στην περίπτωση συνόλων σημάτων που έχουν άνισες ενέργειες, όπως η PAM. Αν όλα τα σήματα έχουν την ίδια ενέργεια, τα $|\mathbf{s}_m|^2$ μπορούν να αγνοηθούν κατά τον υπολογισμό των μέτρων συσχέτισης $C(\mathbf{r}, s_m)$ και των μέτρων απόστασης $D(\mathbf{r}, s_m)$ ή $D'(\mathbf{r}, s_m)$. Είναι εύκολο να δείξουμε (δες Πρόβλημα 4-5) ότι τα μέτρα συσχέτισης $C(\mathbf{r}, s_m)$ μπορούν επίσης να εκφραστούν ως

$$C(\mathbf{r}, s_m) = 2 \int_0^T r(t)s_m(t)dt - E_m, \quad m = 0, 1, \dots, M \quad (4-1-45)$$

Κατά συνέπεια, αυτά τα μέτρα μπορούν να παραχθούν από έναν αποδιαμορφωτή που ετεροσυσχετίζει το λαμβανόμενο σήμα $r(t)$ με κάθε ένα από τα πιθανώς μεταδοθέντα σήματα και προσαρμόζει κάθε έξοδο κάθε συσχετιστή σύμφωνα με την πόλωση στην περίπτωση των άνισων ενεργειών. Ισοδύναμα, το λαμβανόμενο σήμα μπορεί να περάσει μέσα από μία συστοιχία M φίλτρων, τα οποία είναι προσαρμοσμένα με τα πιθανώς μεταδιδόμενα σήματα $\{s_m(t)\}$ και να υποστεί δειγματοληψία τη στιγμή $t = T$, στο τέλος του διαστήματος συμβόλου. Συνεπώς, ο βέλτιστος δέκτης (αποδιαμορφωτής και ανιχνευτής) μπορεί να υλοποιηθεί με την εναλλακτική σχεδίαση που φαίνεται στο Σχ. 4-1-9).



Σχήμα 4-1-9 Μία εναλλακτική υλοποίηση του βέλτιστου AWGN δέκτη

Με λίγα λόγια, έχουμε δείξει ότι ο βέλτιστος ML ανιχνευτής υπολογίζει ένα σύνολο M αποστάσεων $D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$ ή $D'(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$ και επιλέγει το σήμα που αντιστοιχεί στο μικρότερο μέτρο (απόστασης). Ισοδύναμα, ο βέλτιστος ML ανιχνευτής υπολογίζει ένα σύνολο M μέτρων συσχέτισης $C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$ και επιλέγει το σήμα που αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο μέτρο συσχέτισης. Στην προηγούμενη ανάλυση του βέλτιστου ανιχνευτή ασχοληθήκαμε με την σημαντική περίπτωση κατά την οποία όλα τα σήματα είναι ισοπίθανα. Στην περίπτωση αυτή, το MAP κριτήριο είναι ισοδύναμο με το ML κριτήριο. Ωστόσο, όταν τα σήματα δεν είναι εξ ίσου πιθανά, ο βέλτιστος MAP ανιχνευτής βασίζει την απόφασή του στις πιθανότητες $P(\mathbf{s}_m | \mathbf{r})$, $m = 1, 2, \dots, M$, που δίνονται από την (4-1-38) ή, ισοδύναμα, στα μέτρα (metrics),

$$PM(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) P(\mathbf{s}_m)$$

Το ακόλουθο παράδειγμα παρουσιάζει αυτόν τον υπολογισμό για τα δυαδικά PAM σήματα.

Παράδειγμα 4-1-3

Θεωρείστε την περίπτωση δυαδικών PAM σημάτων, κατά την οποία τα δύο πιθανά σημεία σήματος είναι τα $s_1 = -s_2 = \sqrt{E_b}$, όπου E_b είναι η ενέργεια ανά bit. Οι εκ των προτέρων πιθανότητες είναι $P(s_1) = p$ και $P(s_2) = 1 - p$. Ας καθορίσουμε τα μέτρα για τον βέλτιστο MAP ανιχνευτή όταν το μεταδιδόμενο σήμα είναι αλλοιωμένο με AWGN. Το διάνυσμα του ληφθέντος σήματος (μονοδιάστατο) για δυαδικό PAM είναι

$$r = \pm \sqrt{E} + y_n(T) \quad (4-1-46)$$

όπου $y_n(T)$ είναι μία μηδενικού μέσου όρου γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή με διασπορά $\sigma_n^2 = 1/2 N_0$. Συνεπώς, οι υπο συνθήκη σ.π.π. $p(r | s_m)$ για τα δύο σήματα είναι

$$p(r | s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp \left[-\frac{(r - \sqrt{E_b})^2}{2\sigma_n^2} \right] \quad (4-1-47)$$

$$p(r | s_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp \left[-\frac{(r + \sqrt{E_b})^2}{2\sigma_n^2} \right] \quad (4-1-48)$$

Τότε τα μέτρα $PM(\mathbf{r}, s_1)$ και $PM(\mathbf{r}, s_2)$ είναι

$$\begin{aligned} PM(\mathbf{r}, s_1) &= pp(r | s_1) \\ &= \frac{p}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp \left[-\frac{(r - \sqrt{E_b})^2}{2\sigma_n^2} \right] \end{aligned} \quad (4-1-49)$$

$$PM(\mathbf{r}, s_2) = \frac{1-p}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp \left[-\frac{(r + \sqrt{E_b})^2}{2\sigma_n^2} \right] \quad (4-1-50)$$

Εάν $PM(\mathbf{r}, s_1) > PM(\mathbf{r}, s_2)$, επιλέγουμε το s_1 ως το μεταδοθέν σήμα, αλλιώς, επιλέγουμε το s_2 . Ο κανόνας απόφασης μπορεί να εκφραστεί ως

$$\frac{PM(\mathbf{r}, s_1)}{PM(\mathbf{r}, s_2)} \underset{s_2}{\overset{s_1}{>}} 1 \quad (4-1-51)$$

Αλλά

$$\frac{PM(\mathbf{r}, s_1)}{PM(\mathbf{r}, s_2)} = \frac{p}{1-p} \exp \left[\frac{(r + \sqrt{E_b})^2 - (r - \sqrt{E_b})^2}{2\sigma_n^2} \right] \quad (4-1-52)$$

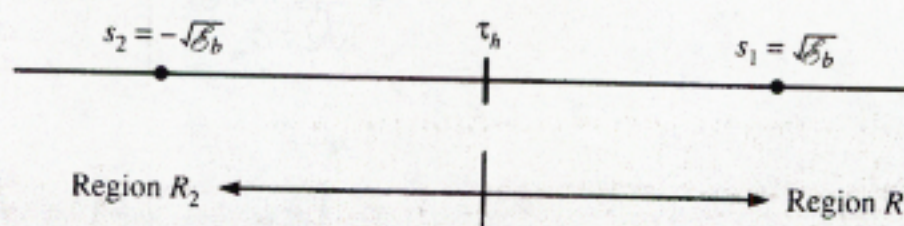
έτσι ώστε η (4-1-51) να μπορεί να εκφραστεί ως

$$\frac{(r + \sqrt{E_b})^2 - (r - \sqrt{E_b})^2}{2\sigma_n^2} \underset{s_2}{\overset{s_1}{>}} \ln \frac{1-p}{p} \quad (4-1-53)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\sqrt{E_b} r \underset{s_2}{\overset{s_1}{> \frac{1}{2} \sigma_n^2 \ln \frac{1-p}{p} = \frac{1}{4} N_0 \ln \frac{1-p}{p}}} \quad (4-1-54)$$

Αυτός είναι ο τελικός τύπος του βέλτιστου ανιχνευτή. Υπολογίζει το μέτρο συσχέτισης $C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_1) = r \sqrt{E_b}$ και το συγκρίνει με το όριο $\frac{1}{4} N_0 \ln [(1-p)/p]$. Στο Σχήμα 4-1-10 φαίνονται τα δύο σημεία σήματος s_1 και s_2 . Το όριο, που υποδηλώνεται με τ_h , υποδιαιρεί την γραμμή των πραγματικών αριθμών σε δύο περιοχές, τις R_1 και R_2 , όπου η R_1 αποτελείται από το σύνολο των σημείων τα οποία είναι μεγαλύτερα από τ_h και η R_2 αποτελείται από το σύνολο σημείων που είναι μικρότερο του τ_h . Εάν $r \sqrt{E_b} \geq \tau_h$, καταλήγουμε στο ότι έχει μεταδοθεί το s_1 , και αν $r \sqrt{E_b} \leq \tau_h$, ότι έχει μεταδοθεί το s_2 . Το κατώφλι τ_h εξαρτάται από τα N_0 και p . Εάν $p = 1/2$, $\tau_h = 0$. Εάν $p > 1/2$, το σημείο σήματος s_1 είναι περισσότερο πιθανό, και έτσι $\tau_h \leq 0$. Σε αυτή την περίπτωση, η περιοχή R_1 είναι μεγαλύτερη από την R_2 , έτσι ώστε το s_1 να είναι πιθανότερο να επιλεγεί από το s_2 . Εάν $p < 1/2$, ισχύει το αντίθετο. Έτσι, ελαχιστοποιείται η μέση πιθανότητα σφάλματος.



ΣΧΗΜΑ 4-1-10 Μία αναπαράσταση στον διανυσματικό χώρο που απεικονίζει την λειτουργία του βέλτιστου ανιχνευτή για δυαδική (PAM) διαμόρφωση.

Είναι ενδιαφέρον να σημειωθεί ότι στην περίπτωση που οι εκ των υστέρων πιθανότητες είναι άνισες, είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε όχι μόνο τις τιμές των εκ των προτέρων πιθανοτήτων αλλά και την τιμή της φασματικής πυκνότητας ισχύος N_0 , προκειμένου να υπολογίσουμε το κατώφλι. Όταν $p = 1/2$, το κατώφλι είναι μηδέν και δεν απαιτείται η γνώση του N_0 από τον ανιχνευτή.

Ολοκληρώνουμε την ενότητα αυτή με την απόδειξη του ότι ο κανόνας απόφασης που βασίζεται στο κριτήριο μέγιστης πιθανοφάνειας ελαχιστοποιεί την πιθανότητα σφάλματος όταν τα M σήματα είναι εκ των προτέρων εξίσου πιθανά. Ας δηλώσουμε με R_m την περιοχή του μονοδιάστατου χώρου στην οποία αποφασίζουμε ότι μεταδόθηκε το σήμα $s_m(t)$ όταν έχει ληφθεί το διάνυσμα $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_N]$. Η πιθανότητα μίας εσφαλμένης απόφασης, με την προϋπόθεση ότι έχει μεταδοθεί το $s_m(t)$, είναι

$$P(e | \mathbf{s}_m) = \int_{R_m^c} p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) d\mathbf{r} \quad (4-1-55)$$

όπου R_m^c είναι το συμπλήρωμα του R_m . Η μέση πιθανότητα σφάλματος είναι

$$\begin{aligned}
 P(e) &= \sum_{m=1}^M \frac{1}{M} P(e | s_m) \\
 &= \sum_{m=1}^M \frac{1}{M} \int_{R_m^c} p(\mathbf{r} | s_m) d\mathbf{r} \\
 &= \sum_{m=1}^M \frac{1}{M} \left[1 - \int_{R_m} p(\mathbf{r} | s_m) d\mathbf{r} \right]
 \end{aligned}
 \tag{4-1-56}$$

Να σημειωθεί ότι το $P(e)$ ελαχιστοποιείται εάν επιλεγεί το σήμα s_m , εάν το $p(\mathbf{r} | s_m)$ είναι μεγαλύτερο από $p(\mathbf{r} | s_k)$ για κάθε $m \neq k$. Όταν τα M σήματα δεν είναι εξ ίσου πιθανά, η παραπάνω απόδειξη μπορεί να γενικευθεί ώστε ναδειχθεί ότι το MAP κριτήριο ελαχιστοποιεί την μέση πιθανότητα σφάλματος.

4-1-4 Ο Ανιχνευτής Ακολουθίας Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Όταν το σήμα δεν έχει μνήμη, ο ανά σύμβολο ανιχνευτής που περιγράφεται στην προηγούμενη ενότητα είναι βέλτιστος υπό την έννοια ότι ελαχιστοποιεί την πιθανότητα ενός εσφαλμένου συμβόλου. Από την άλλη πλευρά, όταν το μεταδιδόμενο σήμα έχει μνήμη, δηλαδή, τα σήματα που μεταδίδονται σε διαδοχικά διαστήματα συμβόλου είναι αλληλοεξαρτώμενα, ο βέλτιστος ανιχνευτής είναι ένας ανιχνευτής ο οποίος βασίζει τις αποφάσεις του στην παρατήρηση μίας ακολουθίας λαμβανόμενων σημάτων κατά την διάρκεια διαδοχικών διαστημάτων σηματοδοσίας. Παρακάτω, θα περιγράψουμε δύο διαφορετικούς τύπους αλγορίθμων ανίχνευσης. Σε αυτήν την ενότητα, περιγράψουμε έναν αλγόριθμο ανίχνευσης ακολουθίας μέγιστης πιθανοφάνειας, ο οποίος αναζητά την διαδρομή ελάχιστης ευκλείδειας απόστασης του trellis διαγράμματος, το οποίο χαρακτηρίζει τη μνήμη στο μεταδιδόμενο σήμα. Στην ακόλουθη ενότητα, θα περιγράψουμε έναν αλγόριθμο μέγιστης εκ των υστέρων πιθανότητας, ο οποίος λαμβάνει μεν τις αποφάσεις του σε μία ανά σύμβολο βάση, όμως βασίζει κάθε απόφαση συμβόλου στην παρατήρηση μίας ακολουθίας λαμβανομένων διανυσμάτων σημάτων.

Για να αναλύσουμε έναν αλγόριθμο ανίχνευσης ακολουθίας μέγιστης πιθανοφάνειας, ας θεωρήσουμε, ως ένα παράδειγμα, το NRZI σήμα που περιγράφεται στην Ενότητα 4-3-2. Η μνήμη του χαρακτηρίζεται από το διάγραμμα trellis που απεικονίζεται στο Σχ. 4-3-14. Το σήμα που μεταδίδεται σε κάθε διάστημα σηματοδοσίας είναι δυαδικό PAM. Έτσι, υπάρχουν δύο πιθανώς μεταδιδόμενα σήματα που αντιστοιχούν στα σημεία σήματος $s_1 = -s_2 = \sqrt{E_b}$, όπου E_b είναι η ενέργεια ανά bit. Η έξοδος του αποδιαμορφωτή προσαρμοσμένων φίλτρων ή του συσχετιστικού αποδιαμορφωτή για την δυαδική PAM στο k -οστό διάστημα σηματοδοσίας μπορεί να εκφρασθεί ως

$$r_k = \pm \sqrt{E_b} + n_k \tag{4-1-57}$$

όπου n_k είναι μία γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή μηδενικού μέσου όρου με διασπορά $\sigma_n^2 = 1/2 N_0$. Συνεπώς, οι υπο συνθήκη σ.π.π. για τα δύο πιθανώς μεταδιδόμενα σήματα είναι

$$\begin{aligned}
 p(r_k | s_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(r_k - \sqrt{E_b})^2}{2\sigma_n^2}\right] \\
 p(r_k | s_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(r_k + \sqrt{E_b})^2}{2\sigma_n^2}\right]
 \end{aligned}
 \tag{4-1-58}$$

Τώρα, υποθέστε ότι παρατηρούμε την ακολουθία των εξόδων των προσαρμοσμένων φίλτρων, $r_1, r_2, \dots, r_K$. Εφ' όσον το κανάλι θεωρείται γκαουσιανό και λευκό, και τα $f(t-iT), f(t-jT)$ για $i \neq j$ είναι ορθογώνια, συνεπάγεται ότι $E(n_k n_j) = 0, k \neq j$. Έτσι, η ακολουθία θορύβου $n_1, n_2, \dots, n_K$ είναι επίσης λευκή. Συνεπώς, για οποιαδήποτε δεδομένη μεταδιδόμενη ακολουθία $s^{(m)}$, η από κοινού σ.π.π. των $r_1, r_2, \dots, r_K$ μπορεί να εκφραστεί ως γινόμενο των K οριακών σ.π.π., δηλαδή,

$$\begin{aligned}
 p(r_1, r_2, \dots, r_K | s^{(m)}) &= \prod_{k=1}^K p(r_k | s_k^{(m)}) \\
 &= \prod_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(r_k - s_k^{(m)})^2}{2\sigma_n^2}\right] \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\right)^K \exp\left[-\sum_{k=1}^K \frac{(r_k - s_k^{(m)})^2}{2\sigma_n^2}\right]
 \end{aligned}
 \tag{4-1-59}$$

όπου είτε $s_k = \sqrt{E_b}$ ή $s_k = -\sqrt{E_b}$. Κατόπιν, με δεδομένη την λαμβανόμενη ακολουθία $r_1, r_2, \dots, r_K$ στην έξοδο του αποδιαμορφωτή προσαρμοσμένων φίλτρων ή του αποδιαμορφωτή συσχετιστών, ο ανιχνευτής καθορίζει την ακολουθία $s^{(m)} = \{s_1^{(m)}, s_2^{(m)}, \dots, s_K^{(m)}\}$ η οποία μεγιστοποιεί την υπο συνθήκη σ.π.π. $p(r_1, r_2, \dots, r_K | s^{(m)})$. Ένας ανιχνευτής του τύπου αυτού ονομάζεται *ανιχνευτής ακολουθίας μέγιστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood (ML) sequence detector)*.

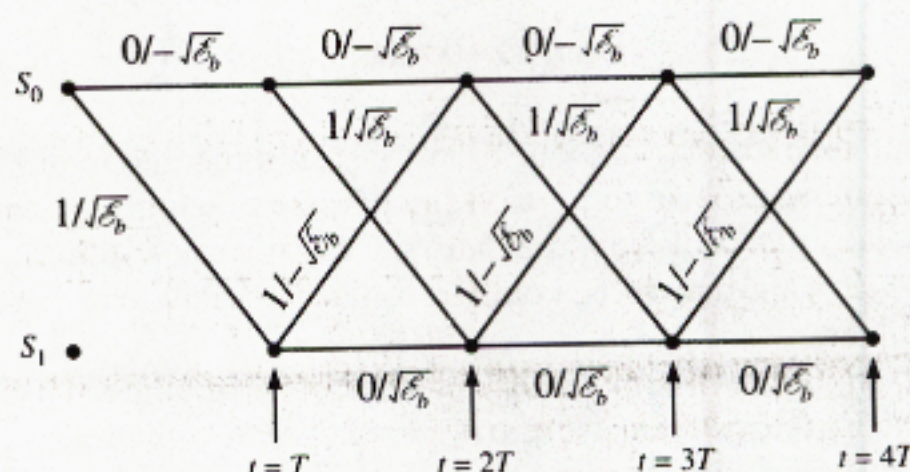
Εάν πάρουμε τον λογάριθμο της (4-1-59) και παραλείψουμε τους όρους που είναι ανεξάρτητοι από τα $(r_1, r_2, \dots, r_K)$, βρίσκουμε ότι ένας ισοδύναμος ανιχνευτής ML ακολουθίας επιλέγει την ακολουθία $s^{(m)}$ που ελαχιστοποιεί το μέτρο της ευκλείδιας απόστασης (*euclidean distance metric*)

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{s}^{(m)}) = \sum_{k=1}^K (r_k - s_k^{(m)})^2
 \tag{4-1-60}$$

Ίσως να νομίζει κάποιος ότι, κατά την αναζήτηση της ακολουθίας trellis που ελαχιστοποιεί την ευκλείδια απόσταση $D(\mathbf{r}, \mathbf{s}^{(m)})$, χρειάζεται να υπολογισθεί η απόσταση $D(\mathbf{r}, \mathbf{s}^{(m)})$ για κάθε πιθανή ακολουθία. Για το παράδειγμα του NRZI, το οποίο εφαρμόζει δυαδική διαμόρφωση, ο συνολικός αριθμός ακολουθιών είναι 2^K , όπου K είναι ο αριθμός των εξόδων του αποδιαμορφωτή. Ωστόσο, αυτό δεν είναι απαραίτητο. Μπορούμε να μειώσουμε τον αριθμό των ακολουθιών κατά την αναζήτηση στο διάγραμμα trellis, εάν χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο Viterbi (*Viterbi algorithm*) για να εξαλείψουμε κάποιες ακολουθίες, ενώ από τον αποδιαμορφωτή λαμβάνονται νέα δεδομένα.

Ο αλγόριθμος Viterbi, είναι ένας αλγόριθμος ακολουθιακής αναζήτησης του διαγράμματος trellis, ο οποίος χρησιμοποιείται στην ανίχνευση της ML ακολουθίας. Παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 8 ως ένας αλγόριθμος αποκωδικοποίησης για συνελικτικούς κώδικες. Θα τον

περιγράψουμε στην συνέχεια, στα πλαίσια του NRZI σήματος. Θα υποθέσουμε ότι η διαδικασία αναζήτησης αρχίζει στην κατάσταση S_0 . Το αντίστοιχο trellis διάγραμμα απεικονίζεται στο Σχ.5-1-11.



ΣΧΗΜΑ 4-1-11 Το διάγραμμα Trellis του NRZI σήματος.

Στην χρονική στιγμή $t = T$, λαμβάνουμε $r_1 = s_1^{(m)} + n$ από τον αποδιαμορφωτή, και στην $t = 2T$ παίρνουμε $r_2 = s_2^{(m)} + n_2$. Εφ' όσον η μνήμη του σήματος είναι του ενός bit, το οποίο δηλώνουμε ως $L = 1$, παρατηρούμε ότι το trellis διάγραμμα φθάνει στην κανονική του μορφή (σταθερή κατάσταση) μετά από δύο μεταβάσεις. Έτσι, με την λήψη του r_2 στην $t = 2T$ (και κατόπιν), παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο διαδρομές σήματος που εισέρχονται στον κάθε κόμβο και δύο που εξέρχονται από τον κάθε κόμβο. Οι δύο διαδρομές που εισέρχονται στον S_0 στην $t = 2T$ αντιστοιχούν στα πληροφοριακά bits (0, 0) και (1, 1), ή, ισοδύναμα, στα σημεία σήματος $(-\sqrt{E_b}, -\sqrt{E_b})$ και $(\sqrt{E_b}, -\sqrt{E_b})$, αντιστοίχως. Οι δύο διαδρομές που εισέρχονται στον κόμβο S_1 στην $t = 2T$ αντιστοιχούν στα πληροφοριακά bits (0, 1) και (1, 0) ή, ισοδύναμα, στα σημεία σήματος $(-\sqrt{E_b}, \sqrt{E_b})$ και $(\sqrt{E_b}, \sqrt{E_b})$, αντιστοίχως.

Για τις δύο διαδρομές που εισέρχονται στον κόμβο S_0 , υπολογίζουμε τα δύο μέτρα των ευκλείδειων αποστάσεων

$$\begin{aligned} D_0(0,0) &= (r_1 + \sqrt{E_b})^2 + (r_2 + \sqrt{E_b})^2 \\ D_0(1,1) &= (r_1 - \sqrt{E_b})^2 + (r_2 + \sqrt{E_b})^2 \end{aligned} \quad (4-1-61)$$

χρησιμοποιώντας τις εξόδους r_1 και r_2 του αποδιαμορφωτή. Ο αλγόριθμος Viterbi συγκρίνει αυτά τα δύο μέτρα και απορρίπτει τη διαδρομή με το μεγαλύτερο μέτρο (μεγαλύτερη απόσταση)*. Η διαδρομή με το μικρότερο μέτρο αποθηκεύεται και ονομάζεται η *επιζώσα* (survivor) στην $t = 2T$. Η απαλοιφή της μίας από τις δύο διαδρομές μπορεί να γίνει χωρίς να μετριάσθει η βελτιστοποίηση της αναζήτησης του διαγράμματος trellis, επειδή οποιαδήποτε επέκταση της διαδρομής με την μεγαλύτερη απόσταση μετά το $t = 2T$ θα έχει πάντα μεγαλύτερο μέτρο από την *επιζώσα* η οποία επεκτείνεται κατά μήκος της ίδιας διαδρομής πέρα από το $t = 2T$.

* Σημειώστε ότι στο NRZI η λήψη του r_2 από τον αποδιαμορφωτή ούτε αυξάνει ούτε μειώνει την σχετική διαφορά μεταξύ των $D_0(0,0)$ και $D_0(1,1)$. Στο σημείο αυτό, κανείς να αναρωτηθεί για τις συνέπειες αυτής της παρατήρησης. Εν πάσει περιπτώσει, θα συνεχίσουμε την περιγραφή του ανιχνευτή της ML ακολουθίας βάσει του αλγορίθμου του Viterbi.

Ομοίως, για τις δύο διαδρομές που εισέρχονται στον κόμβο S_1 στην $t = 2T$, υπολογίζουμε τα δύο μέτρα ευκλείδειων αποστάσεων

$$\begin{aligned} D_1(0, 1) &= (r_1 + \sqrt{E_b})^2 + (r_2 - \sqrt{E_b})^2 \\ D_1(1, 0) &= (r_1 - \sqrt{E_b})^2 + (r_2 + \sqrt{E_b})^2 \end{aligned} \quad (4-1-62)$$

χρησιμοποιώντας τις εξόδους r_1 και r_2 του αποδιαμορφωτή. Τα δύο μέτρα συγκρίνονται και η διαδρομή σήματος με το μεγαλύτερο μέτρο απαλείφεται. Έτσι, στην $t = 2T$, έχουμε δύο επιζώσες διαδρομές, μία στον κόμβο S_0 και την άλλη στον κόμβο S_1 , και τα αντίστοιχα μέτρα τους. Οι διαδρομές σημάτων στους κόμβους S_0 και S_1 εκτείνονται κατόπιν κατά μήκος των δύο επιζωσών διαδρομών.

Μόλις ληφθεί το r_3 στην $t = 3T$, υπολογίζουμε τα μέτρα των δύο διαδρομών που εισέρχονται στο S_0 . Υποθέστε ότι οι επιζώσες στην $t = 2T$ είναι οι διαδρομές $(0, 0)$ στον S_0 , και $(0, 1)$ στον S_1 . Παρομοίως, τα δύο μέτρα για τις διαδρομές που εισέρχονται στον S_0 στην $t = 3T$ είναι

$$\begin{aligned} D_0(0, 0, 0) &= D_0(0, 0) + (r_3 + \sqrt{E_b})^2 \\ D_0(0, 1, 1) &= D_1(0, 1) + (r_3 + \sqrt{E_b})^2 \end{aligned} \quad (4-1-63)$$

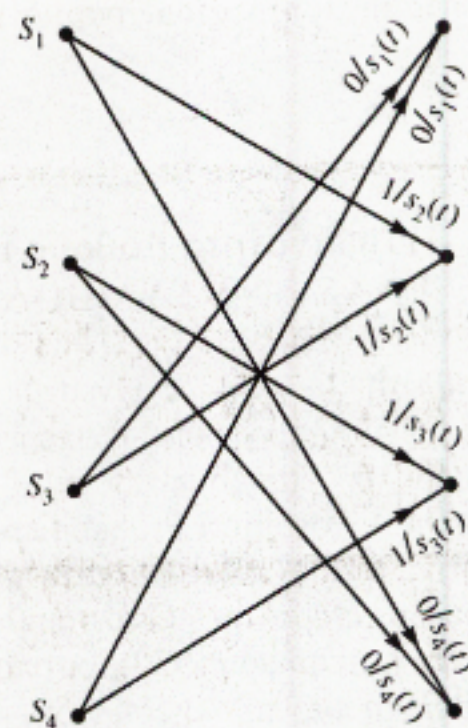
Αυτά τα δύο μέτρα συγκρίνονται και η διαδρομή με το μεγαλύτερο μέτρο (μεγαλύτερη απόσταση) απαλείφεται. Ομοίως, τα μέτρα για τις δύο διαδρομές που εισέρχονται στον S_1 στην $t = 3T$ είναι

$$\begin{aligned} D_1(0, 0, 1) &= D_0(0, 0) + (r_3 - \sqrt{E_b})^2 \\ D_1(0, 1, 0) &= D_1(0, 1) + (r_3 - \sqrt{E_b})^2 \end{aligned} \quad (4-1-64)$$

Αυτά τα δύο μέτρα συγκρίνονται και η διαδρομή με το μεγαλύτερο μέτρο (μεγαλύτερη απόσταση) απαλείφεται.

Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται καθώς λαμβάνεται κάθε νέο δείγμα σήματος από τον αποδιαμορφωτή. Έτσι, ο αλγόριθμος Viterbi υπολογίζει δύο μέτρα για τις δύο διαδρομές που εισέρχονται στον κόμβο σε κάθε στάδιο της αναζήτησης του διαγράμματος trellis και απαλείφει μία από τις δύο διαδρομές σε κάθε κόμβο. Οι δύο επιζώσες διαδρομές εκτείνονται στην επόμενη κατάσταση. Επομένως, ο αριθμός των διαδρομών που ερευνώνται στο διάγραμμα trellis μειώνεται κατά τον παράγοντα δύο σε κάθε στάδιο.

Είναι σχετικά εύκολο να γενικεύσουμε την αναζήτηση του διαγράμματος trellis που πραγματοποιείται από τον αλγόριθμο Viterbi στην M-αδική διαμόρφωση. Για παράδειγμα, η διαμόρφωση καθυστέρησης χρησιμοποιεί $M = 4$ σήματα και χαρακτηρίζεται από το τεσσάρων καταστάσεων διάγραμμα trellis που φαίνεται στο Σχ. 4-1-12. Παρατηρούμε ότι κάθε κατάσταση έχει δύο διαδρομές σημάτων που εισέρχονται και δύο που εγκαταλείπουν τον κάθε κόμβο. Η μνήμη του σήματος είναι $L = 1$. Έτσι, ο αλγόριθμος Viterbi θα έχει τέσσερις επιζώσες σε κάθε κατάσταση και τα αντίστοιχα τους μέτρα. Σε κάθε κόμβο υπολογίζονται δύο μέτρα, τα οποία αντιστοιχούν στις δύο εισερχόμενες διαδρομές σήματος, και σε κάθε κατάσταση απαλείφεται μία από τις δύο διαδρομές που εισέρχονται στον κόμβο του διαγράμματος trellis. Έτσι, ο αλγόριθμος Viterbi ελαχιστοποιεί τον αριθμό των διαδρομών του trellis που διερευνώνται κατά την ανίχνευση της ML ακολουθίας.



ΣΧΗΜΑ 4-1-12 Ένα στάδιο του διαγράμματος trellis της διαμόρφωσης καθυστέρησης.

Από την περιγραφή του αλγόριθμου Viterbi που παρατέθηκε παραπάνω, δεν είναι σαφές το πως, με βάση τις επιζώσες ακολουθίες, λαμβάνονται οι αποφάσεις όσον αφορά την επιλογή των συγκεκριμένων συμβόλων πληροφορίας που ανιχνεύονται. Εάν έχουμε προχωρήσει σε κάποιο στάδιο στο διάγραμμα trellis, ας πούμε το K , όπου $K \gg L$ και συγκρίνουμε τις επιζώσες ακολουθίες, θα βρούμε ότι, με πιθανότητα που τείνει προς την μονάδα, όλες οι επιζώσες ακολουθίες θα ταυτίζονται στις θέσεις των bits (ή συμβόλων) $K - 5L$ και λιγότερο. Στις εφαρμογές του αλγόριθμου στην πράξη, οι αποφάσεις για το κάθε πληροφοριακό bit (ή σύμβολο) λαμβάνονται μετά από μία καθυστέρηση των 5 bits, και έτσι, οι επιζώσες ακολουθίες έχουν περικοπεί στα $5L$ πιο πρόσφατα bits. Έτσι αποφεύγεται μία μεταβλητή καθυστέρηση στην ανίχνευση των bits ή των συμβόλων. Η απώλεια της απόδοσης, η οποία προκύπτει από την υποβέλτιστη διαδικασία ανίχνευσης είναι αμελητέα, εάν η καθυστέρηση είναι τουλάχιστον $5L$.

Παράδειγμα 4-1-4

Ανακαλέστε τον κανόνα απόφασης για την ανίχνευση της ακολουθίας δεδομένων σε ένα NRZI σήμα με έναν αλγόριθμο Viterbi που έχει καθυστέρηση των $5L$ bits. Το trellis διάγραμμα του NRZI σήματος απεικονίζεται στο Σχ. 4-1-11. Σε αυτήν την περίπτωση, $L = 1$, έτσι η καθυστέρηση στην ανίχνευση των bits έχει ρυθμισθεί στα 5 bits. Στην $t = 6T$, θα έχουμε λοιπόν δύο επιζώσες ακολουθίες, μία για κάθε μία από τις δύο καταστάσεις και τα αντίστοιχα μέτρα τα $\mu_6(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$ και $\mu_6(b'_1, b'_2, b'_3, b'_4, b'_5, b'_6)$. Σε αυτό το στάδιο, με πιθανότητα σχεδόν ίση με τη μονάδα, το bit b'_1 θα είναι ίσο με το b_1 . Δηλαδή, αμφότερες οι ακολουθίες θα έχουν κοινό τον πρώτο κλάδο. Εάν $b_1 \neq b'_1$, μπορούμε να επιλέξουμε το bit που αντιστοιχεί στο μικρότερο από τα δύο μέτρα. Κατόπιν, το πρώτο bit κόβεται από τις δύο επιζώσες ακολουθίες. Στην $t = 7T$, τα δύο μέτρα $\mu_7(b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)$ και $\mu_7(b'_2, b'_3, b'_4, b'_5, b'_6, b'_7)$ θα χρησιμοποιηθούν για τον καθορισμό της απόφασης ως προς το bit b_2 . Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται σε κάθε στάδιο της αναζήτησης για την ακολουθία με την ελάχιστη

απόσταση στο διάγραμμα trellis. Έτσι η καθυστέρηση ανίχνευσης είναι σταθερή στα 5 bits*.

4-1-5 Η Πιθανότητα Λάθους της Δυαδικής Διαμόρφωσης

4-2 ΈΝΑΣ ΑΝΑ ΣΥΜΒΟΛΟ ΑΝΙΧΝΕΥΤΗΣ ΓΙΑ ΣΗΜΑΤΑ ΜΕ ΜΝΗΜΗ

Σε αντίθεση με τον ανιχνευτή ακολουθίας μέγιστης πιθανοφάνειας που ανιχνεύει την μεταδιδόμενη πληροφορία, θα περιγράψουμε τώρα έναν ανιχνευτή, ο οποίος παίρνει αποφάσεις ανά σύμβολο, βασιζόμενος στον υπολογισμό της μέγιστης εκ των υστέρων πιθανότητας (Maximum A Posteriori Probability- MAP) για κάθε σύμβολο που έχει ανιχνευθεί. Επομένως, ο ανιχνευτής αυτός είναι βέλτιστος υπό την έννοια ότι ελαχιστοποιεί την πιθανότητα ενός εσφαλμένου συμβόλου. Ο αλγόριθμος ανίχνευσης που παρουσιάζεται παρακάτω οφείλεται των Abend και Fritchman (1970), οι οποίοι τον ανέπτυξαν ως αλγόριθμο ανίχνευσης για κανάλια με διασυμβολική παρεμβολή, δηλαδή, κανάλια με μνήμη.

Θα παρουσιάσουμε τον αλγόριθμο στα πλαίσια της ανίχνευσης ενός PAM σήματος με M πιθανά επίπεδα. Υποθέστε ότι θέλουμε να ανιχνεύσουμε το πληροφοριακό σύμβολο που μεταδόθηκε στο k -οστό διάστημα σηματοδότησης και ότι $r_1, r_2, \dots, r_{k+D}$ είναι η υπό παρατήρηση λαμβανομένη ακολουθία, όπου D είναι η παράμετρος καθυστέρησης που επιλέγεται ώστε να υπερβαίνει την μνήμη του σήματος, δηλαδή, $D \geq L$, με L την μνήμη που είναι έμφυτη στο σήμα. Με βάση την λαμβανόμενη ακολουθία, υπολογίζουμε τις εκ των υστέρων πιθανότητες

$$P(s^{(k)} = A_m | r_{k+D}, r_{k+D-1}, \dots, r_1) \quad (4-1-65)$$

για τις M πιθανές τιμές συμβόλου και διαλέγουμε το σύμβολο με τη μεγαλύτερη πιθανότητα. Εφ όσον

$$P(s^{(k)} = A_m | r_{k+D}, \dots, r_1) = \frac{P(r_{k+D}, \dots, r_1 | s^{(k)} = A_m) P(s^{(k)} = A_m)}{P(r_{k+D}, r_{k+D-1}, \dots, r_1)} \quad (4-1-66)$$

και εφ όσον ο παρονομαστής είναι κοινός για όλες τις M πιθανότητες, το κριτήριο της μέγιστης εκ των υστέρων πιθανότητας (MAP) είναι ισοδύναμο με την επιλογή της τιμής του $s^{(k)}$ η οποία μεγιστοποιεί τον αριθμητή της (4-1-66). Έτσι, το κριτήριο για την απόφαση ως προς το σύμβολο $s^{(k)}$ είναι

$$\hat{s}^{(k)} = \arg \left\{ \max_{s^{(k)}} P(r_{k+D}, \dots, r_1 | s^{(k)} = A_m) P(s^{(k)} = A_m) \right\} \quad (4-1-67)$$

Όταν τα σύμβολα είναι εξίσου πιθανά, η πιθανότητα $P(s^{(k)} = A_m)$ μπορεί να παραλειφθεί από τον υπολογισμό.

Ο αλγόριθμος του επαναληπτικού υπολογισμού των πιθανοτήτων στην (4-1-67) αρχίζει με το πρώτο σύμβολο $s^{(1)}$. Έχουμε

* Ίσως να έχει γίνει ήδη προφανές ότι τόσο ο ανιχνευτής ML ακολουθίας όσο και ο ανά σύμβολο ανιχνευτής που αγνοεί την μνήμη του NRZI σήματος καταλήγουν στις ίδιες αποφάσεις. Επομένως, δεν χρειάζεται η καθυστέρηση της απόφασης. Πάντως, η διαδικασία που περιγράφηκε ανωτέρω βρίσκει γενική εφαρμογή.

$$\begin{aligned}
\tilde{s}^{(1)} &= \arg \left\{ \max_{s^{(1)}} p(r_{1+D}, \dots, r_1 | s^{(1)} = A_m) P(s^{(1)} = A_m) \right\} \\
&= \arg \left\{ \max_{s^{(1)}} \sum_{s^{(1+D)}} \dots \sum_{s^{(2)}} p(r_{1+D}, \dots, r_1 | s^{(1+D)}, \dots, s^{(1)}) P(s^{(1+D)}, \dots, s^{(1)}) \right\} \\
&= \arg \left\{ \max_{s^{(1)}} \sum_{s^{(1+D)}} \dots \sum_{s^{(2)}} p_1(s^{(1+D)}, \dots, s^{(2)}, s^{(1)}) \right\}
\end{aligned} \tag{4-1-68}$$

όπου το $\tilde{s}^{(1)}$ υποδηλώνει την απόφαση ως προς το $s^{(1)}$ και, για μαθηματική διευκόλυνση, έχουμε ορίσει

$$p_1(s^{(1+D)}, \dots, s^{(2)}, s^{(1)}) \equiv p(r_{1+D}, \dots, r_1 | s^{(1+D)}, \dots, s^{(1)}) P(s^{(1+D)}, \dots, s^{(1)}) \tag{4-1-69}$$

Η από κοινού πιθανότητα $P(s^{(1+D)}, \dots, s^{(2)}, s^{(1)})$ μπορεί να παραληφθεί εάν τα σύμβολα είναι εξίσου πιθανά και στατιστικώς ανεξάρτητα. Ως συνέπεια της στατιστικής ανεξαρτησίας της ακολουθίας του προσθετικού θορύβου, έχουμε

$$\begin{aligned}
p(r_{1+D}, \dots, r_1 | s^{(1+D)}, \dots, s^{(1)}) \\
= p(r_{1+D} | s^{(1+D)}, \dots, s^{(1+D-L)}) p(r_D | s^{(D)}, \dots, s^{(D-L)}) \dots p(r_2 | s^{(2)}, s^{(1)}) p(r_1 | s^{(1)})
\end{aligned} \tag{4-1-70}$$

όπου θεωρούμε ότι $s^{(k)} = 0$ για $k \leq 0$.
Για την ανίχνευση του συμβόλου $s^{(2)}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\tilde{s}^{(2)} &= \arg \left\{ \max_{s^{(2)}} p(r_{2+D}, \dots, r_1 | s^{(2)} = A_m) P(s^{(2)} = A_m) \right\} \\
&= \arg \left\{ \max_{s^{(2)}} \sum_{s^{(2+D)}} \dots \sum_{s^{(1)}} p(r_{2+D}, \dots, r_1 | s^{(2+D)}, \dots, s^{(2)}) P(s^{(2+D)}, \dots, s^{(2)}) \right\}
\end{aligned} \tag{4-1-71}$$

Η από κοινού υπό συνθήκη πιθανότητα στο πολλαπλό άθροισμα μπορεί να εκφρασθεί ως

$$\begin{aligned}
p(r_{2+D}, \dots, r_1 | s^{(2+D)}, \dots, s^{(2)}) \\
= p(r_{2+D} | s^{(2+D)}, \dots, s^{(2+D-L)}) p(r_{1+D}, \dots, r_1 | s^{(1+D)}, \dots, s^{(2)})
\end{aligned} \tag{4-1-72}$$

Επιπλέον, η από κοινού πιθανότητα

$$p(r_{1+D}, \dots, r_1 | s^{(1+D)}, \dots, s^{(2)}) P(s^{(1+D)}, \dots, s^{(2)})$$

μπορεί να ληφθεί από τις πιθανότητες που υπολογίστηκαν προηγουμένως κατά την ανίχνευση του $s^{(1)}$. Δηλαδή

$$\begin{aligned}
p(r_{1+D}, \dots, r_1 | s^{(1+D)}, \dots, s^{(2)}) \\
= \sum_{s^{(1)}} p(r_{1+D}, \dots, r_1 | s^{(1+D)}, \dots, s^{(1)}) P(s^{(1+D)}, \dots, s^{(1)}) \\
= \sum_{s^{(1)}} p_1(s^{(1+D)}, \dots, s^{(2)}, s^{(1)})
\end{aligned} \tag{4-1-73}$$

Έτσι, συνδυάζοντας τις (4-1-71) και (4-1-72) και αντικαθιστώντας στην (4-1-71) παίρνουμε

$$\tilde{s}^{(2)} = \arg \left\{ \max_{s^{(2)}} \sum_{s^{(2+D)}} \dots \sum_{s^{(3)}} p_2(s^{(2+D)}, \dots, s^{(3)}, s^{(2)}) \right\} \quad (4-1-74)$$

όπου, εξ ορισμού,

$$\begin{aligned} p_2(s^{(2+D)}, \dots, s^{(3)}, s^{(2)}) \\ = p(r_{2+D} | s^{(2+D)}, \dots, s^{(2+D-L)}) P(s^{(2+D)}) \sum_{s^{(1)}} p_1(s^{(1+D)}, \dots, s^{(2)}, s^{(1)}) \end{aligned} \quad (4-1-75)$$

Γενικά, ο επαναληπτικός αλγόριθμος ανίχνευσης του συμβόλου $s^{(k)}$ έχει ως εξής: με την λήψη των $r_{K+D}, \dots, r_2, r_1$, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \tilde{s}^{(k)} &= \arg \left\{ \max_{s^{(k)}} p(r_{k+D}, \dots, r_1 | s^{(k)}) P(s^{(k)}) \right\} \\ &= \arg \left\{ \max_{s^{(k)}} \sum_{s^{(k+D)}} \dots \sum_{s^{(k+1)}} p_k(s^{(k+D)}, \dots, s^{(k+1)}, s^{(k)}) \right\} \end{aligned} \quad (4-1-76)$$

όπου εξ' ορισμού,

$$\begin{aligned} p_k(s^{(k+D)}, \dots, s^{(k+1)}, s^{(k)}) \\ = p(r_{k+D} | s^{(k+D)}, \dots, s^{(k+D-L)}) P(s^{(k+D)}) \sum_{s^{(k-1)}} p_{k-1}(s^{(k-1+D)}, \dots, s^{(k-1)}) \end{aligned} \quad (4-1-77)$$

Έτσι, η επαναληπτική φύση του αλγόριθμου διαπιστώνεται από τις σχέσεις (4-1-76) (4-1-77).

Το κύριο πρόβλημα του αλγόριθμου είναι η υπολογιστική πολυπλοκότητά του. Συγκεκριμένα, ο υπολογισμός του μέσου όρου των συμβόλων $s^{(k+D)}, \dots, s^{(k+1)}, s^{(k)}$ στην (4-1-76) προκαλεί ιδιαίτερο υπολογιστικό φόρτο ανά λαμβανόμενο σήμα, ειδικά εάν ο αριθμός M των επιπέδων πλάτους $\{A_m\}$ είναι μεγάλος. Από την άλλη πλευρά, εάν το M είναι μικρό και η μνήμη L είναι σχετικά μικρή, ο αλγόριθμος αυτός εφαρμόζεται εύκολα.

Η ΑΠΟΔΟΣΗ ΤΟΥ ΒΕΛΤΙΣΤΟΥ ΔΕΚΤΗ ΣΤΗΝ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΧΩΡΙΣ ΜΝΗΜΗ

Στην ενότητα αυτή, εξετάζουμε την πιθανότητα λάθους των σημάτων της χωρίς μνήμη διαμόρφωσης που περιγράφηκαν στην Ενότητα 4-3-1. Κατ' αρχήν θα εξετάσουμε τα δυαδικά PAM σήματα και κατόπιν τα M -αδικά σήματα διαφόρων τύπων.

Ας θεωρήσουμε δύο μορφές σημάτων δυαδικής PAM $s_1(t) = g(t)$ και $s_2(t) = -g(t)$ όπου $g(t)$ είναι ένας αυθαίρετος παλμός, μη μηδενικός στο διάστημα $0 \leq t \leq T_b$ και μηδενικός οπουδήποτε αλλού.

Εφ' όσον $s_1(t) = -s_2(t)$, αυτά τα σήματα λέγονται *αντίποδα* (*antipodal*). Η ενέργεια του παλμού $g(t)$ είναι E_b . Όπως ελέγχθη και στην Ενότητα 4-3-1, τα PAM σήματα είναι μονοδιάστατα και, επομένως, η γεωμετρική τους αναπαράσταση είναι απλώς το μονοδιάστατο διάνυσμα $s_1 = \sqrt{E_b}$, $s_2 = -\sqrt{E_b}$. Το Σχ-5-2-1 απεικονίζει τα δύο σημεία σήματος.

Ας υποθέσουμε ότι τα δύο σήματα είναι ισοπίθανα και ότι μεταδόθηκε το σήμα $s_1(t)$. Τότε, το λαμβανόμενο σήμα από τον αποκωδικοποιητή (είτε ετεροσυσχετιστών είτε προσαρμοσμένων φίλτρων) είναι

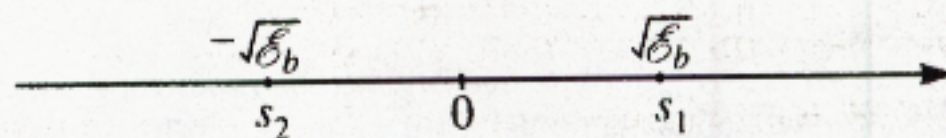
$$r = s_1 + n = \sqrt{E_b} + n \quad (4-2-1)$$

όπου n αναπαριστά το στοιχείο του προσθετικού Gaussian θορύβου, ο οποίος έχει μηδενική μέση τιμή και διασπορά $\sigma_n^2 = 1/2 N_0$. Σε αυτήν την περίπτωση, ο κανόνας απόφασης βάσει του μέτρου συσχέτισης που δίνεται από την (4-1-44) συγκρίνει το r με το κατώφλι του μηδενός. Αν $r > 0$, τότε η απόφαση ευνοεί το $s_1(t)$, ενώ αν $r < 0$, τότε η απόφαση ευνοεί το $s_2(t)$. Σαφώς, οι δύο υπό συνθήκη σ.π.π. του r είναι

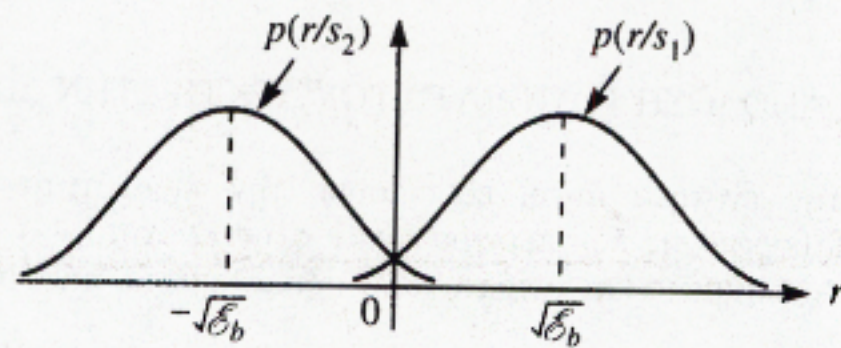
$$p(r | s_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-(r - \sqrt{E_b})^2 / N_0} \quad (4-2-2)$$

$$p(r | s_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-(r + \sqrt{E_b})^2 / N_0} \quad (4-2-3)$$

Αυτές οι δύο υπό συνθήκη σ.π.π. δείχνονται στο Σχ. 4-2-2.



ΣΧΗΜΑ 4-2-1 Τα σημεία των δυαδικών αντιπόδων σημάτων στον διανυσματικό χώρο.



ΣΧΗΜΑ 4-2-2 Οι υπό συνθήκη σ.π.π. των δύο σημάτων.

Δεδομένου ότι έχει μεταδοθεί το $s_1(t)$, η πιθανότητα λάθους είναι απλώς η πιθανότητα $r < 0$, δηλαδή,

$$\begin{aligned}
 P(e | s_1) &= \int_{-\infty}^0 p(r | s_1) dr \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^0 \exp \left[-\frac{(r - \sqrt{E_b})^2}{N_0} \right] dr \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{2E_b/N_0}} e^{-x^2/2} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2E_b/N_0}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \\
 &= Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right)
 \end{aligned} \tag{4-2-4}$$

όπου $Q(x)$ είναι η συνάρτηση Q που ορίστηκε στην (2-1-97). Ομοίως, αν υποθέσουμε ότι έχει μεταδοθεί το $s_2(t)$, $r = -\sqrt{E_b} + n$ και η πιθανότητα να είναι $r > 0$ είναι $P(e | s_2) = Q(\sqrt{2E_b/N_0})$. Εφ' όσον τα σήματα $s_1(t)$ και $s_2(t)$ μεταδίδονται με την ίδια πιθανότητα, η μέση πιθανότητα λάθους είναι

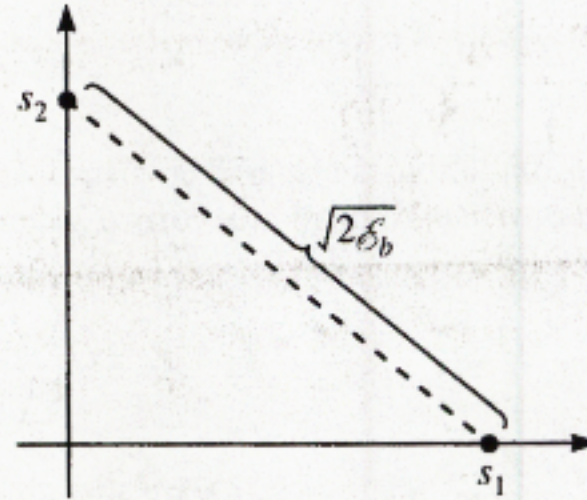
$$\begin{aligned}
 P_b &= \frac{1}{2} P(e | s_1) + \frac{1}{2} P(e | s_2) \\
 &= Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right)
 \end{aligned} \tag{4-2-5}$$

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε δύο σημαντικά χαρακτηριστικά αυτού του μέτρου της απόδοσης. Πρώτον, παρατηρούμε ότι η πιθανότητα λάθους εξαρτάται μόνον από τον λόγο E_b/N_0 και όχι από οποιαδήποτε άλλα λεπτομερή χαρακτηριστικά των σημάτων και του θορύβου. Δεύτερον, παρατηρούμε ότι το $2E_b/N_0$ αποτελεί επίσης και τον SNR₀ της εξόδου του προσαρμοσμένου φίλτρου. Ο λόγος E_b/N_0 συνήθως αποκαλείται ανά bit λόγος σήματος-προς-θόρυβο (signal-to-noise ratio per bit).

Επίσης παρατηρούμε ότι η πιθανότητα λάθους μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει της απόστασης μεταξύ των δύο σημάτων s_1 και s_2 . Από το Σχ. 4-2-1 παρατηρούμε ότι τα δύο σήματα διαχωρίζονται από μία απόσταση $d_{12} = 2\sqrt{E_b}$. Χρησιμοποιώντας την σχέση $E_b = \frac{1}{4} d_{12}^2$ στην (4-2-5), λαμβάνουμε

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{d_{12}^2}{2N_0}}\right) \quad (4-2-6)$$

Η σχέση αυτή δείχνει την εξάρτηση της πιθανότητας λάθους από την απόσταση μεταξύ των δύο σημείων σήματος.



ΣΧΗΜΑ 4-2-3 Τα σημεία των δυαδικών ορθογωνίων σημάτων στον διανυσματικό χώρο.

Στην συνέχεια, ας υπολογίσουμε την πιθανότητα λάθους των δυαδικών ορθογωνίων σημάτων. Θυμηθείτε ότι τα διανύσματα των σημάτων s_1 και s_2 είναι διδιάστατα, όπως δείχνεται στο Σχ. 4-2-3, και μπορούν να εκφραστούν, σύμφωνα με την (4-3-30), ως

$$\begin{aligned} s_1 &= \begin{bmatrix} \sqrt{E_b} & 0 \end{bmatrix} \\ s_2 &= \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{E_b} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-2-7)$$

όπου το E_b εκφράζει την ενέργεια κάθε κυματομορφής. Σημειώστε ότι η απόσταση μεταξύ αυτών των σημείων είναι $d_{12} = \sqrt{2E_b}$.

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα λάθους, ας υποθέσουμε ότι έχει μεταδοθεί το s_1 . Τότε, το ληφθέν διάνυσμα στην έξοδο του αποδιαμορφωτή είναι

$$r = \begin{bmatrix} \sqrt{E_b} + n_1 & n_2 \end{bmatrix} \quad (4-2-8)$$

Μπορούμε να αντικαταστήσουμε το r στα συσχετιστικά μέτρα που δίνονται από την (4-1-44) για να πάρουμε τα $C(r, s_1)$ και $C(r, s_2)$. Τότε, η πιθανότητα λάθους είναι η πιθανότητα $C(r, s_2) > C(r, s_1)$. Έτσι,

$$P(e | s_1) = P[C(r, s_2) > C(r, s_1)] = P[n_2 - n_1 > \sqrt{E_b}] \quad (4-2-9)$$

Εφ' όσον τα n_1 και n_2 είναι στατιστικώς ανεξάρτητες γκαουσσιανές τυχαίες μεταβλητές μηδενικής μέσης τιμής και διασποράς $\frac{1}{2}N_0$, η τυχαία μεταβλητή $x = n_2 - n_1$ είναι γκαουσσιανή με μηδενική μέση τιμή και διασπορά N_0 . Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
P(n_2 - n_1 > \sqrt{E_b}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} \int_{\sqrt{E_b}}^{\infty} e^{-x^2/2N_0} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{E_b/N_0}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \\
&= Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)
\end{aligned} \tag{4-2-10}$$

Λόγω συμμετρίας, η ίδια πιθανότητα λάθους προκύπτει αν υποθέσουμε ότι μεταδίδεται το s_2 . Κατά συνέπεια, η μέση πιθανότητα λάθους για δυαδικά ορθογώνια σήματα είναι

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) = Q(\sqrt{\gamma_b}) \tag{4-2-11}$$

όπου, εξ ορισμού, γ_b είναι ο SNR ανά bit.

Αν συγκρίνουμε την πιθανότητα λάθους των δυαδικών αντιπόδων σημάτων με αυτήν των δυαδικών ορθογωνίων σημάτων, βρίσκουμε ότι τα ορθογώνια σήματα απαιτούν διπλάσια ενέργεια για να επιτύχουν την ίδια πιθανότητα λάθους με τα αντίποδα σήματα. Εφ' όσον $10\log_{10}2 = 3$ dB, λέμε ότι τα ορθογώνια σήματα είναι κατά 3dB φτωχότερα από τα αντίποδα σήματα. Η διαφορά των 3dB οφείλεται στην απόσταση μεταξύ των σημείων των δύο σημάτων, η οποία είναι $d_{12}^2 = 2E_b$ στα ορθογώνια σήματα και $d_{12}^2 = 4E_b$ στα αντίποδα σήματα.

Στο Σχ. 4-2-4 απεικονίζεται η πιθανότητα λάθους έναντι του $10\log_{10}E_b/N_0$ για αυτούς τους δύο τύπους σημάτων. Όπως παρατηρούμε στο σχήμα, σε οποιαδήποτε δεδομένη πιθανότητα λάθους, ο E_b/N_0 που απαιτείται για τα ορθογώνια σήματα είναι κατά 3dB μεγαλύτερος από αυτόν που απαιτείται για τα αντίποδα σήματα.

4-2-1 Η Πιθανότητα Λάθους των M -αδικών Ορθογωνίων Σημάτων

Στα ορθογώνια σήματα ίσης ενέργειας, ο βέλτιστος ανιχνευτής επιλέγει το σήμα για το οποίο προκύπτει η μέγιστη ετεροσυσχέτιση μεταξύ του λαμβανομένου διανύσματος $\mathbf{r}$ και του καθενός εκ των M πιθανώς μεταδιδόμενων διανυσμάτων $\{\mathbf{s}_m\}$, δηλαδή,

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m = \sum_{k=1}^M r_k s_{mk}, \quad m = 1, 2, \dots, M \tag{4-2-12}$$

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα λάθους, ας υποθέσουμε ότι μεταδίδεται το σήμα s_1 . Τότε, το διάνυσμα του λαμβανομένου σήματος είναι

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \sqrt{E_s} + n_1 & n_2 & n_3 \dots n_M \end{bmatrix} \tag{4-2-13}$$

όπου $n_1, n_2, \dots, n_M$ είναι γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές, αμοιβαίως στατιστικώς ανεξάρτητες μηδενικής μέσης τιμής και ίσης διασποράς $\sigma_n^2 = 1/2 N_0$. Στην περίπτωση αυτή, η έξοδος από τους M συσχετιστές είναι

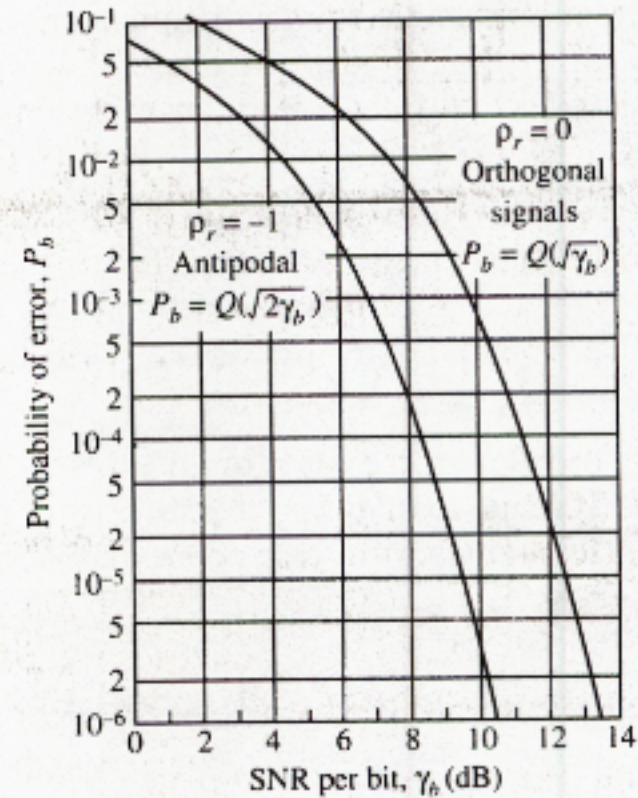
$$C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_1) = \sqrt{E_s} (\sqrt{E_s} + n_1)$$

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_2) = \sqrt{E_s} n_2$$

$$\vdots$$

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_M) = \sqrt{E_s} n_M$$

(4-2-14)



ΣΧΗΜΑ 4-2-4 Η πιθανότητα λάθους των δυαδικών σημάτων.

Παρατηρείστε ότι ο παράγοντας κλιμάκωσης E_s μπορεί να εξαλειφθεί από τις εξόδους του συσχετιστή εάν κάθε έξοδος διαιρεθεί με το $\sqrt{E_s}$. Τότε, με την κανονικοποίηση αυτή, η σ.π.π. της πρώτης εξόδου του συσχετιστή ($r_1 = \sqrt{E_s} + n_1$) είναι

$$p_{r_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left[-\frac{(x_1 - \sqrt{E_s})^2}{N_0} \right] \quad (4-2-15)$$

και οι σ.π.π. των υπολοίπων $M-1$ εξόδων του συσχετιστή είναι

$$p_{r_m}(x_m) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-x_m^2/N_0}, \quad m = 2, 3, \dots, M \quad (4-2-16)$$

Είναι ευκολότερο από μαθηματικής πλευράς να υπολογίσουμε πρώτα την πιθανότητα να πάρει μία ορθή απόφαση ο ανιχνευτής. Αυτή είναι η πιθανότητα να είναι το r_1 μεγαλύτερο από καθεμιά από τις υπόλοιπες $M-1$ εξόδους του συσχετιστή $n_1, n_2, \dots, n_M$. Αυτή η πιθανότητα μπορεί να εκφραστεί ως

$$P_c = \int_{-\infty}^{\infty} P(n_2 < r_1, n_3 < r_1, \dots, n_M < r_1 | r_1) p(r_1) dr_1 \quad (4-2-17)$$

όπου $P(n_2 < r_1, n_3 < r_1, \dots, n_M < r_1 | r_1)$ υποδηλώνει την δεσμευμένη από κοινού πιθανότητα ότι οι $n_2, n_3, \dots, n_M$ είναι όλες μικρότερες από την r_1 , υπό την συνθήκη ότι έχει ληφθεί το r_1 . Στην συνέχεια βρίσκουμε την μέση τιμή αυτής της από κοινού πιθανότητας ως προς όλα τα r_1 . Εφ' όσον τα $\{r_m\}$ είναι στατιστικώς ανεξάρτητα, η από κοινού πιθανότητα απλοποιείται σε ένα γινόμενο των $M-1$ οριακών πιθανοτήτων της μορφής

$$\begin{aligned} P(n_m < r_1 | r_1) &= \int_{-\infty}^{r_1} p_{r_m}(x_m) dx_m, \quad m = 2, 3, \dots, M \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{r_1 \sqrt{2/N_0}} e^{-x^2/2} dx \end{aligned} \quad (4-2-18)$$

Αυτές οι πιθανότητες ταυτίζονται για $m = 2, 3, \dots, M$, και, συνεπώς, η από κοινού πιθανότητα που μελετούμε είναι απλώς το αποτέλεσμα της (4-2-18) υψωμένο στην $(M-1)$ -στή δύναμη. Κατά συνέπεια, η πιθανότητα μιας ορθής απόφασης είναι

$$P_c = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{r_1 \sqrt{2/N_0}} e^{-x^2/2} dx \right)^{M-1} p(r_1) dr_1 \quad (4-2-19)$$

και η πιθανότητα ενός λανθασμένου συμβόλου των k -bits είναι

$$P_M = 1 - P_c \quad (4-2-20)$$

όπου

$$P_M = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-x^2/2} dx \right)^{M-1} \right] \exp \left[-\frac{1}{2} \left(y - \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}} \right)^2 \right] dy \quad (4-2-21)$$

Η ίδια έκφραση της πιθανότητας λάθους προκύπτει και όταν μεταδίδεται οποιοδήποτε από τα άλλα $M-1$ σήματα. Εφ' όσον τα M σήματα είναι ισοπίθανα, η έκφραση της P_M που δίνεται από την (4-2-21) είναι η μέση πιθανότητα ενός λανθασμένου συμβόλου. Αυτή η έκφραση μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικώς.

Για να συγκρίνουμε την απόδοση των διαφόρων μεθόδων ψηφιακής διαμόρφωσης, καλόν θα είναι να έχουμε την πιθανότητα λάθους εκφρασμένη ως προς τον SNR ανά bit, E_b / N_0 , αντί του SNR ανά σύμβολο, E_s / N_0 . Με $M = 2^k$, το κάθε σύμβολο μεταφέρει k πληροφοριακά bits και, επομένως, $E_s = kE_b$. Συνεπώς, η (4-2-21) μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει του E_b / N_0 με την αντικατάσταση του E_s .

Μερικές φορές, είναι επιθυμητό να μετατρέψουμε την πιθανότητα ενός λανθασμένου συμβόλου σε μια ισοδύναμη πιθανότητα ενός λανθασμένου δυαδικού ψηφίου. Όταν τα ορθογώνια σήματα είναι ισοπίθανα, όλα τα διαφορετικά λάθη ενός συμβόλου είναι ισοπίθανα και εμφανίζονται με πιθανότητα

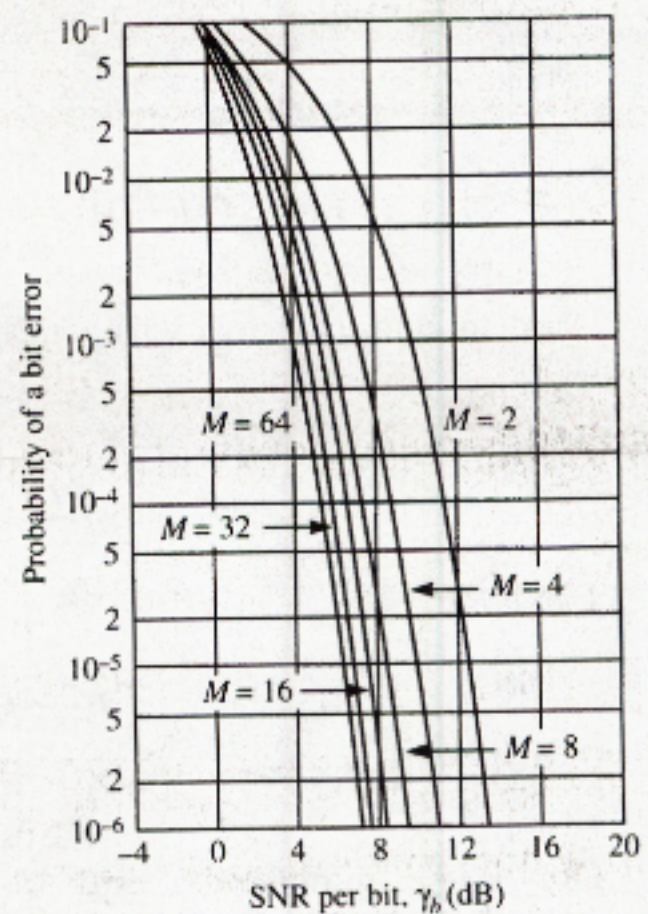
$$\frac{P_M}{M-1} = \frac{P_M}{2^k - 1} \quad (4-2-22)$$

Επιπροσθέτως, υπάρχουν $\binom{k}{n}$ τρόποι με τους οποίους τα n bits από τα k μπορούν να είναι λανθασμένα. Κατά συνέπεια, ο μέσος αριθμός των λανθασμένων bits ανά σύμβολο των k bits είναι

$$\sum_{n=1}^k \binom{k}{n} \frac{P_M}{2^k - 1} = k \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} P_M \quad (4-2-23)$$

και η μέση πιθανότητα ενός λάθους του ενός bit είναι απλώς το αποτέλεσμα της (4-2-23) δια του k , δηλαδή του αριθμού των bits ανά σύμβολο. Οπότε,

$$P_b = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} P_M \approx \frac{P_M}{2}, \quad k \gg 1 \quad (4-2-24)$$



ΣΧΗΜΑ 4-2-5 Η πιθανότητα ενός λανθασμένου bit στην συμφασική ανίχνευση των ορθογωνίων σημάτων.

Οι γραφικές παραστάσεις της πιθανότητας ενός λανθασμένου δυαδικού ψηφίου ως συνάρτηση του SNR ανά bit, E_b / N_0 , δείχνονται στο Σχ. 4-2-5 για $M = 2, 4, 8, 16, 32, 64$. Το σχήμα αυτό δείχνει ότι, αυξάνοντας τον αριθμό M των κυματομορφών, μπορούμε να μειώσουμε τον SNR ανά bit που απαιτείται για να επιτύχουμε μία δεδομένη πιθανότητα ενός λανθασμένου bit. Για παράδειγμα, για να επιτευχθεί $P_b = 10^{-5}$, ο απαιτούμενος SNR ανά bit είναι λίγο περισσότερος από 12dB για $M = 2$, αλλά αν το M αυξηθεί σε 64 κυματομορφές σήματος ($k = 6$ bits/σύμβολο), ο απαιτούμενος SNR ανά bit είναι περίπου 6dB. Επομένως, εξασφαλίζουμε ένα κέρδος μεγαλύτερο των 6dB (μία μείωση κατά ένα παράγοντα του 4) στην ισχύ του πομπού (ή στην ενέργεια) που απαιτείται για να επιτευχθεί $P_b = 10^{-5}$ εάν αυξήσουμε το M από $M = 2$ σε $M = 64$. Ποιος είναι ο ελάχιστος απαιτούμενος E_b / N_0 για να επιτευχθεί μία αυθαίρετα μικρή πιθανότητα λάθους όταν το M τείνει στο άπειρο; Η απάντηση στην ερώτηση αυτή θα δοθεί παρακάτω.

Ένα Καθολικό (union) Όριο της Πιθανότητας Λάθους Ας ερευνήσουμε το αποτέλεσμα της αύξησης του M στην πιθανότητα λάθους των ορθογωνίων σημάτων. Για να απλοποιήσουμε την μαθηματική ανάπτυξη, πρώτα θα υπολογίσουμε ένα άνω όριο της πιθανότητας ενός λανθασμένου συμβόλου που είναι αρκετά πιο απλό από τον ακριβή τύπο που δίνεται από την (4-2-21). Θυμηθείτε ότι η πιθανότητα λάθους των δυαδικών ορθογωνίων σημάτων δίνεται από την (4-2-11). Τώρα, αν θεωρήσουμε τον ανιχνευτή για M ορθογώνια σήματα ως ένα ανιχνευτή οποίος λαμβάνει $M-1$ δυαδικές αποφάσεις (επιλογές) μεταξύ της εξόδου του συσχετιστή $C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_1)$ που περιέχει το σήμα και των εξόδων $C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$ των άλλων $M-1$ των συσχετιστών, $m = 2, 3, \dots, M$, η πιθανότητα λάθους φράσσεται εκ των άνω με το καθολικό όριο (union bound) των $M-1$ γεγονότων. Με άλλα λόγια, αν E_i αναπαριστά το γεγονός $C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_i) > C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_1)$ για $i \neq 1$, τότε έχουμε $P_M = P(\cup_{i=1}^n E_i) \leq \sum_{i=1}^n P(E_i)$. Άρα,

$$P_M \leq (M-1)P_2 = (M-1)Q(\sqrt{E_s / N_0}) < MQ(\sqrt{E_s / N_0}) \quad (4-2-25)$$

Αυτό το όριο μπορεί να απλοποιηθεί περισσότερο εάν φραχθεί εκ των άνω η $Q(\sqrt{E_s / N_0})$. Έχουμε

$$Q(\sqrt{E_s / N_0}) < e^{-E_s / 2N_0} \quad (4-2-26)$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} P_M &< M e^{-E_s / 2N_0} = 2^k e^{-kE_b / 2N_0} \\ P_M &< e^{-k(E_b / N_0 - 2 \ln 2) / 2} \end{aligned} \quad (4-2-27)$$

Όταν $k \rightarrow \infty$, ή ισοδύναμα, όταν $M \rightarrow \infty$, η πιθανότητα λάθους τείνει στο μηδέν εκθετικά, εφ' όσον το E_b / N_0 είναι μεγαλύτερο από το $2 \ln 2$, δηλαδή,

$$\frac{E_b}{N_0} > 2 \ln 2 = 1.39 \quad (1.42 \text{ dB}) \quad (4-2-28)$$

Το απλό άνω όριο της πιθανότητας λάθους που δίνεται από την (4-2-27) υποδηλώνει ότι, εφόσον $\text{SNR} > 1.42 \text{ dB}$, μπορούμε να επιτύχουμε μία αυθαίρετα μικρή P_M . Ωστόσο, αυτό το καθολικό όριο δεν αποτελεί ένα στενό άνω όριο στις αρκετά μικρές τιμές του SNR, λόγω του γεγονότος ότι το άνω όριο της συνάρτησης Q στην (4-2-26) είναι χαλαρό. Πράγματι, με την χρήση περισσότερο περίτεχνων τεχνικών οριοθέτησης, στην Ενότητα 7 θα δειχθεί ότι το άνω όριο της (4-2-27) είναι αρκετά στενό για $E_b / N_0 > 4 \ln 2$. Για $E_b / N_0 < 4 \ln 2$, ένα σφικτότερο άνω όριο της P_M είναι

$$P_M < 2e^{-k(\sqrt{E_b/N_0} - \sqrt{\ln 2})^2} \quad (4-2-29)$$

Κατά συνέπεια, $P_M \rightarrow 0$ καθώς $k \rightarrow \infty$, εφ' όσον

$$\frac{E_b}{N_0} > \ln 2 = 0.693 \quad (-1.6 \text{ dB}) \quad (4-2-30)$$

Συνεπώς, καθώς $k \rightarrow \infty$ ($M \rightarrow \infty$), ο ελάχιστος απαιτούμενος SNR ανά bit για να επιτευχθεί μια αυθαίρετα μικρή πιθανότητα λάθους τείνει στο -1.6 dB . Ο ελάχιστος αυτός SNR ανά bit ονομάζεται *όριο Shannon* (*Shannon limit*) για ένα κανάλι προσθετικού λευκού γκαουσιανού θορύβου.

4-2-2 Η Πιθανότητα Λάθους στα M-αδικά Αμφορθογώνια Σήματα

Όπως δείχθηκε στην Ενότητα 4-3, μπορούμε να συνθέσουμε ένα σύνολο $M = 2^k$ αμφορθογωνίων σημάτων από $\frac{1}{2}M$ ορθογώνια σήματα, εάν συμπεριλάβουμε και τα αντίθετα των ορθογωνίων σημάτων. Έτσι, μειώνουμε την πολυπλοκότητα του αποκωδικοποιητή των αμφορθογωνίων σημάτων εν σχέσει με αυτόν των ορθογωνίων σημάτων, εφ' όσον ο αποκωδικοποιητής αμφορθογωνίων σημάτων κατασκευάζεται με $\frac{1}{2}M$ ετεροσυσχετιστές ή προσαρμοσμένα φίλτρα, ενώ ο αποκωδικοποιητής ορθογωνίων σημάτων απαιτεί M προσαρμοσμένα φίλτρα ή ετεροσυσχετιστές.

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα λάθους του βέλτιστου ανιχνευτή, ας υποθέσουμε ότι έχει μεταδοθεί το σήμα $s_1(t)$ που αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\mathbf{s}_1 = [\sqrt{E_s} \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$. Τότε, το λαμβανόμενο διάνυσμα σήματος είναι

$$\mathbf{r} = [\sqrt{E_s} + n_1 \quad n_2 \quad \dots \quad n_{M/2}] \quad (4-2-31)$$

όπου τα $\{n_m\}$ είναι μηδενικού μέσου όρου, αμοιβαίως στατιστικώς ανεξάρτητες και ταυτόσημα κατανομημένες γκαουσιανές τυχαίες μεταβλητές, με διασπορά $\sigma_n^2 = \frac{1}{2}N_0$. Ο βέλτιστος ανιχνευτής επιλέγει το σήμα που αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη σε μέγεθος ετεροσυσχέτιση

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = \mathbf{r} \bullet \mathbf{s}_m = \sum_{k=1}^{M/2} r_k s_{mk}, \quad m = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}M \quad (4-2-32)$$

ενώ αποφασίζουμε αν μεταδόθηκε το $s_m(t)$, ή, το $-s_m(t)$ με βάση το πρόσημο του μέγιστου αυτού όρου. Σύμφωνα με αυτόν τον τρόπο απόφασης, η πιθανότητα μιας ορθής απόφασης είναι ίση με την πιθανότητα να συμβαίνει $r_1 = \sqrt{E_s} + n_1 > 0$ και το r_1 να υπερβαίνει το $|r_m| = |n_m|$ για $m = 2, 3, \dots, \frac{1}{2}M$. Αλλά

$$P(|n_m| < r_1 | r_1 > 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-r_1}^{r_1} e^{-x^2/N_0} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-r_1/\sqrt{N_0/2}}^{r_1/\sqrt{N_0/2}} e^{-x^2/2} dx \quad (4-2-33)$$

Τότε, η πιθανότητα μιας ορθής απόφαση είναι

$$P_c = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-r_1/\sqrt{N_0/2}}^{r_1/\sqrt{N_0/2}} e^{-x^2/2} dx \right)^{M/2-1} p(r_1) dr_1$$

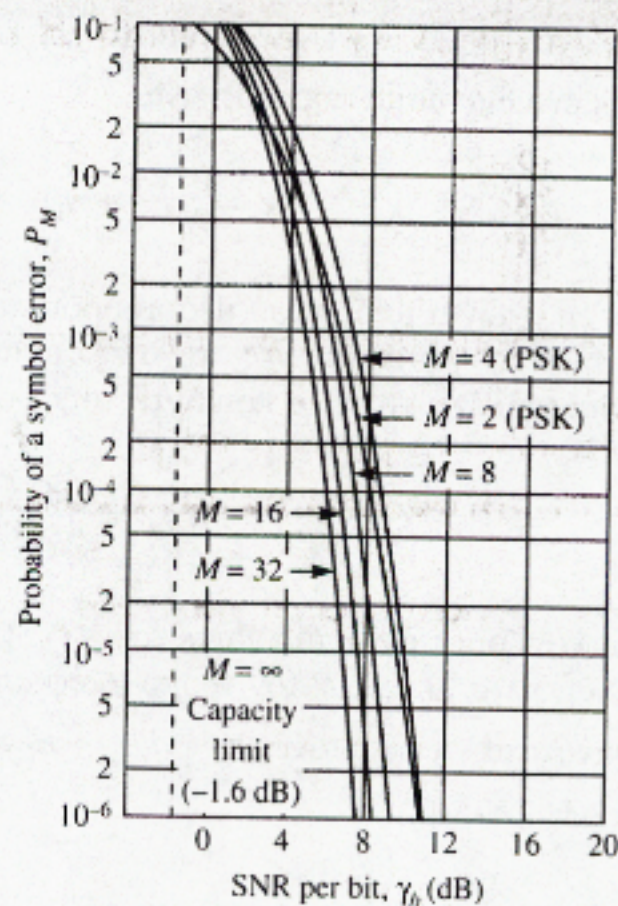
από την οποία με αντικατάσταση του $p(r_1)$ παίρνουμε

$$P_c = \int_{\sqrt{2E_s/N_0}}^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(v+\sqrt{2E_s/N_0})}^{v+\sqrt{2E_s/N_0}} e^{-x^2/2} dx \right)^{M/2-1} e^{-v^2/2} dv \quad (4-2-34)$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την σ.π.π. του r_1 που δίνεται στην (4-2-15). Τέλος, η πιθανότητα ενός λανθασμένου συμβόλου είναι $P_M = 1 - P_c$, και, επομένως, η P_M μπορεί να υπολογισθεί αριθμητικά για διαφορετικές τιμές του M από την (4-2-34). Το γράφημα που δείχνεται στο Σχ. 4-2-6 αναπαριστά την P_M ως συνάρτηση του E_b/N_0 για $M = 2, 4, 8, 16, 32$. Παρατηρούμε ότι αυτό το γράφημα είναι παρόμοιο με αυτό των ορθογωνίων σημάτων (βλέπε Σχ. 4-2-5). Ωστόσο, σε αυτήν την περίπτωση, η πιθανότητα λάθους για $M = 4$ είναι μεγαλύτερη από αυτήν για $M = 2$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στο Σχ. 4-2-6 έχουμε σχεδιάσει την πιθανότητα λανθασμένου συμβόλου P_M . Αν είχαμε σχεδιάσει την ισοδύναμη πιθανότητα λανθασμένου bit, θα βλέπαμε ότι τα γραφήματα για $M = 2$ και $M = 4$ συμπίπτουν. Όπως στην περίπτωση των ορθογωνίων σημάτων, όταν $M \rightarrow \infty$ ή $k \rightarrow \infty$, ο ελάχιστος απαιτούμενος E_b/N_0 για

ΣΧΗΜΑ 4-2-6 Η πιθανότητα ενός λανθασμένου συμβόλου στα αμφορθογώνια σύμβολα

την επίτευξη μίας αυθαίρετα μικρής πιθανότητας λάθους είναι -1.6dB , το όριο Shannon.



4-2-3 Η πιθανότητα Λάθους στα Simplex Σήματα

Ακολουθώντας, θα ασχοληθούμε με την πιθανότητα λάθους στα M simplex σήματα. Ας θυμηθούμε από την Ενότητα 4-3 ότι τα simplex σήματα είναι ένα σύνολο M εξ ίσου συσχετισμένων σημάτων με συντελεστές αμοιβαίας ετεροσυσχέτισης $\rho_{mn} = -1 / (M-1)$. Αυτά τα σήματα έχουν τον ίδιο ελάχιστο διαχωρισμό $2\sqrt{E_s}$ μεταξύ γειτονικών σημείων σήματος σε έναν χώρο M -διαστάσεων ως ορθογώνια σήματα. Αυτός ο αμοιβαίος διαχωρισμός επιτυγχάνεται με μία μεταδιδόμενη ενέργεια $E_s (M-1) / M$, η οποία είναι μικρότερη απ' αυτήν που απαιτείται για ορθογώνια σήματα κατά παράγοντα $(M-1) / M$. Συνακόλουθα, η πιθανότητα λάθους των simplex σημάτων είναι η ίδια με την πιθανότητα λάθους των ορθογωνίων σημάτων, αλλά αυτή η απόδοση επιτυγχάνεται με μια μείωση

$$10 \log(1 - \rho) = 10 \log \frac{M}{M-1} \text{ dB} \quad (4-2-35)$$

του SNR. Για $M = 2$, η μείωση αυτή είναι 3 dB. Ωστόσο, καθώς το M αυξάνεται, η μείωση του SNR πλησιάζει τα 0 dB.

4-2-4 Η Πιθανότητα Λάθους στα M -αδικά Δυαδικώς Κωδικοποιημένα Σήματα

Δείξαμε στην Ενότητα 4-3 ότι οι κυματομορφές των δυαδικώς κωδικοποιημένων σημάτων αναπαρίστανται από τα διανύσματα των σημάτων

$$\mathbf{s}_m = [s_{m1} \quad s_{m2} \quad \dots \quad s_{mN}], \quad m = 1, 2, \dots, M$$

όπου $s_{mj} = \pm \sqrt{E/N}$ για όλα τα m και j . N είναι το μήκος της ομάδας (block) του κώδικα, και είναι επίσης και η διάσταση των M κυματομορφών σήματος.

Αν $d_{\min}^{(e)}$ είναι η ελάχιστη Ευκλείδεια απόσταση των M κυματομορφών σήματος, τότε η πιθανότητα ενός λανθασμένου συμβόλου φράσσεται εκ των άνω ως

$$\begin{aligned} P_m &< (M-1)P_b = (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{(d_{\min}^{(e)})^2}{2N_0}}\right) \\ &< 2^k \exp\left[-\frac{(d_{\min}^{(e)})^2}{4N_0}\right] \end{aligned} \quad (4-2-36)$$

Η τιμή της ελάχιστης Ευκλείδειας απόστασης εξαρτάται από την επιλογή των κωδικών λέξεων, δηλαδή, από την σχεδίαση κώδικα.

4-2-5 Η Πιθανότητα Λάθους στην M -αδική PAM

Ας θυμηθούμε ότι τα M -αδικά PAM σήματα αναπαρίστανται γεωμετρικώς ως M μονοδιάστατα σημεία σήματος με τιμή

$$s_m = \sqrt{\frac{1}{2} E_g} A_m, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (4-2-37)$$

όπου E_g είναι η ενέργεια του βασικού παλμού σήματος $g(t)$. Οι τιμές του πλάτους μπορούν να εκφραστούν ως

$$A_m = (2m - 1 - M)d, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (4-2-38)$$

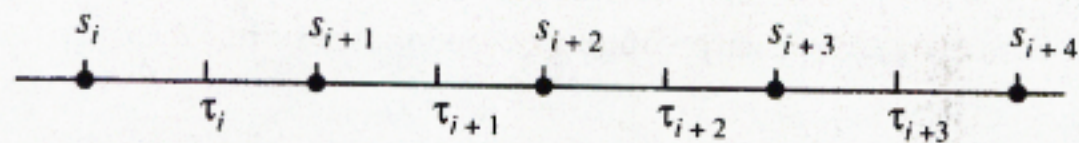
όπου η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ γειτονικών σημείων σήματος είναι $d\sqrt{2E_g}$

$$\begin{aligned} E_{av} &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M E_m = \frac{d^2 E_g}{2M} \sum_{m=1}^M (2m - 1 - M)^2 \\ &= \frac{d^2 E_g}{2M} \left[\frac{1}{3} M(M^2 - 1) \right] = \frac{1}{6} (M^2 - 1) d^2 E_g \end{aligned} \quad (4-2-39)$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να χαρακτηρίσουμε αυτά τα σήματα συναρτήσει της μέσης ισχύος τους, η οποία είναι

$$P_{av} = \frac{E_{av}}{T} = \frac{1}{6} (M^2 - 1) \frac{d^2 E_g}{T} \quad (4-2-40)$$

Η μέση πιθανότητα λάθους της M -αδικής PAM μπορεί να υπολογισθεί από τον κανόνα απόφασης που μεγιστοποιεί τα συσχετιστικά μέτρα που δίνεται από την (4-1-44). Ισοδύναμα, ο ανιχνευτής συγκρίνει την έξοδο r του αποδιαμορφωτή με ένα σύνολο από $M-1$ κατώφλια, τα οποία τοποθετούνται στα μέσα των αποστάσεων των διαδοχικών επιπέδων πλάτους, όπως φαίνεται στο Σχ. 4-2-7. Συνεπώς, επιλέγεται το επίπεδο πλάτους που βρίσκεται πλησιέστερα στο r .



ΣΧΗΜΑ 4-2-7 Η τοποθέτηση των κατωφλίων στα μέσα των αποστάσεων των διαδοχικών επιπέδων πλάτους.

Η τοποθέτηση των κατωφλίων όπως φαίνεται στο Σχ. 4-2-7 βοηθά στον υπολογισμό της πιθανότητας λάθους. Σημειώνουμε ότι αν μεταδοθεί το m -οστό επίπεδο πλάτους, η έξοδος του αποδιαμορφωτή είναι

$$r = s_m + n = \sqrt{\frac{1}{2} E_g} A_m + n \quad (4-2-41)$$

όπου η μεταβλητή του θορύβου n έχει μηδενική μέση τιμή και διασπορά $\sigma_n^2 = \frac{1}{2} N_0$. Επειδή όλα τα επίπεδα πλάτους έχουν την ίδια εκ των προτέρων πιθανότητα, η μέση πιθανότητα ενός

λανθασμένου συμβόλου είναι απλώς η πιθανότητα, το πλάτος της μεταβλητής θορύβου n να υπερβαίνει το ήμισυ της απόστασης μεταξύ των επιπέδων. Ωστόσο, όταν μεταδίδεται οποιοδήποτε από τα δύο εξωτερικά επίπεδα ($M-1$), μόνο προς την μια κατεύθυνση μπορεί να συμβεί ένα λάθος. Άρα, έχουμε

$$\begin{aligned}
 P_M &= \frac{M-1}{M} P(|r - s_m| > d\sqrt{\frac{1}{2}E_g}) \\
 &= \frac{M-1}{M} \frac{2}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{d\sqrt{E_g/2}}^{\infty} e^{-x^2/N_0} dx \\
 &= \frac{M-1}{M} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{d^2 E_g / N_0}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \\
 &= 2 \frac{M-1}{M} Q\left(\sqrt{\frac{d^2 E_g}{N_0}}\right)
 \end{aligned} \tag{4-2-42}$$

Η πιθανότητα λάθους της (4-2-42) μπορεί επίσης να εκφραστεί συναρτήσει της μέσης μεταδιδόμενης ισχύος. Από την (4-2-40), σημειώνουμε ότι

$$d^2 E_g = \frac{6}{M^2 - 1} P_{av} T \tag{4-2-43}$$

Αντικαθιστώντας το $d^2 E_g$ στην (4-2-42) παίρνουμε την μέση πιθανότητα ενός λανθασμένου συμβόλου της PAM σε σχέση με την μέση ισχύ

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6P_{av}T}{(M^2-1)N_0}}\right) \tag{4-2-44}$$

ή, ισοδύναμα,

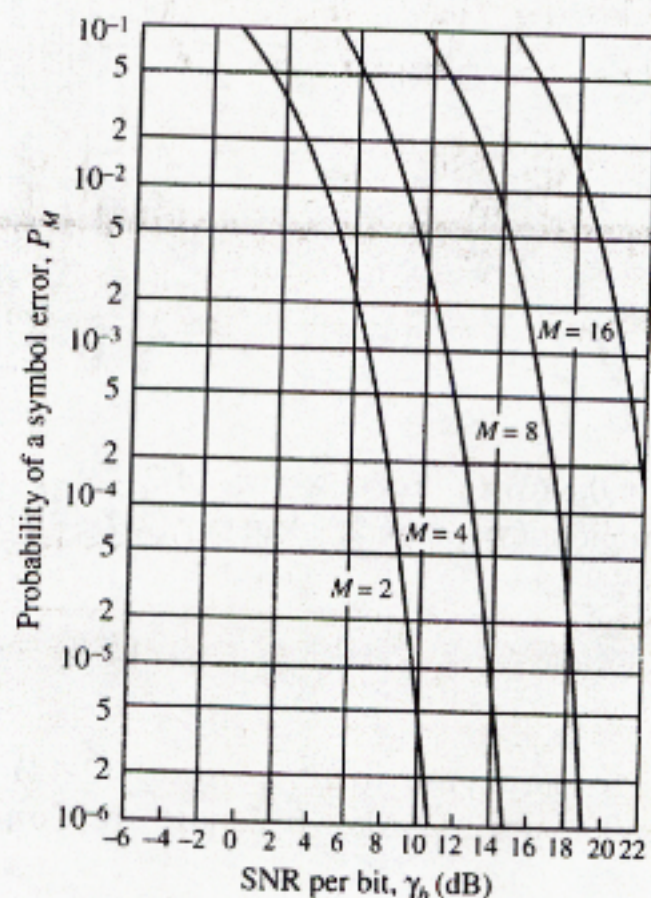
$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6E_{av}}{(M^2-1)N_0}}\right) \tag{4-2-45}$$

όπου $E_{av} = P_{av} T$ είναι η μέση ενέργεια.

Κατά τον σχεδιασμό της πιθανότητας ενός λανθασμένου συμβόλου στα M -αδικά σήματα, όπως τα σήματα της M -αδικής PAM, συνηθίζεται η χρήση του SNR ανά bit ως της βασικής παραμέτρου. Επειδή $T = kT_b$ και $k = \log_2 M$, η (4-2-45) μπορεί να εκφραστεί ως

$$P_M = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{(6\log_2 M)E_{bav}}{(M^2-1)N_0}}\right) \tag{4-2-46}$$

όπου $E_{bav} = P_{av} T_b$ είναι η μέση ενέργεια ενός bit και E_{bav} / N_0 είναι ο μέσος SNR ανά bit. Το Σχ. 4-2-8 δείχνει την πιθανότητα ενός λανθασμένου συμβόλου ως συνάρτηση του $10 \log_{10} E_{bav} / N_0$ με το M ως παράμετρο. Σημειώστε ότι η περίπτωση $M = 2$ αντιστοιχεί στην πιθανότητα λάθους των δυαδικών αντιπόδων σημάτων. Επίσης παρατηρείστε ότι ο SNR ανά bit αυξάνει κατά μία ποσότητα μεγαλύτερη των 4 dB σε κάθε διπλασιασμό του M . Σε μεγάλες τιμές του M , ο πρόσθετος SNR ανά bit που απαιτείται για τον διπλασιασμό του M προσεγγίζει τα 6dB.



ΣΧΗΜΑ 4-2-8 Η πιθανότητα ενός λανθασμένου συμβόλου στην PAM.

4-2-6 Η Πιθανότητα Λάθους στην M -αδική PSK

Θυμηθείτε από την Ενότητα 4-3 ότι οι κυματομορφές των ψηφιακών κατά φάση διαμορφωμένων σημάτων μπορούν να εκφραστούν ως

$$s_m(t) = g(t) \cos \left[2\pi f_c t + \frac{2\pi}{M}(m-1) \right], \quad 1 \leq m \leq M, \quad 0 \leq t \leq T \quad (4-2-47)$$

και να έχουν την διανυσματική αναπαράσταση

$$\mathbf{s}_m = \left[\sqrt{E_s} \cos \frac{2\pi}{M}(m-1) \quad \sqrt{E_s} \sin \frac{2\pi}{M}(m-1) \right] \quad (4-2-48)$$

όπου $E_s = \frac{1}{2} E_x$ είναι η ενέργεια κάθε κυματομορφής και $g(t)$ είναι η μορφή του παλμού του μεταδιδόμενου σήματος. Εφ' όσον οι κυματομορφές των σημάτων έχουν ίση ενέργεια, ο βέλτιστος ανιχνευτής για το AWGN κανάλι που δίνεται από την (4-1-44) υπολογίζει τα συσχετιστικά μέτρα