Εφαρμοσμένη Βελτιστοποίηση: Αναγνώριση Δυναμικών Συστημάτων & Προβλεπτικός Έλεγχος με Μοντέλο

Χαράλαμπος Μπεχλιούλης, Αναπληρωτής Καθηγητής

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

16 Δεκεμβρίου 2025

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
& Τεχνολογίας Υπολογιστών

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
& Τεχνολογίας Υπολογιστών

Δομή Διάλεξης

1. Εισαγωγή στα Δυναμικά Συστήματα
2. Αναγνώριση Συστημάτων ως Πρόβλημα Βελτιστοποίησης
3. Προβλεπτικός Έλεγχος με χρήση Εκτιμώμενου Μοντέλου

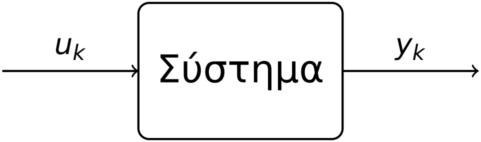
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

Τι είναι ένα Δυναμικό Σύστημα;

Ένα δυναμικό σύστημα περιγράφει την εξέλιξη της κατάστασης ενός φυσικού φαινομένου.

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k), \qquad y_k = g(x_k, v_k)$$

- x_k: εσωτερική κατάσταση
- u_k: είσοδος/έλεγχος
- y_k: μετρούμενη έξοδος
- w_k, v_k: θόρυβος/διαταραχές

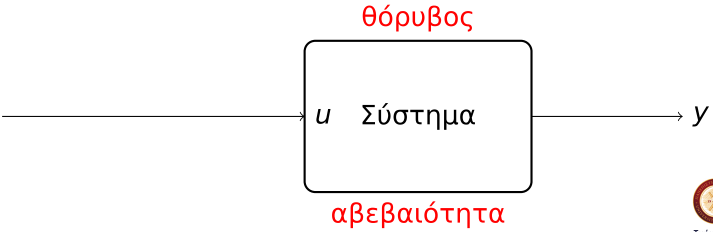


Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
& Τεχνολογίας Υπολογιστών

Περιορισμοί Δυναμικών Συστημάτων

Τα πραγματικά συστήματα εμφανίζουν:

- **Μη γραμμικότητα**: $f(\cdot)$ συχνά πολύπλοκη
- **Κορεσμοί** ενεργοποιητών
- **Καθυστερήσεις** αισθητήρων/υπολογισμού
- **Αβεβαιότητα** παραμέτρων
- **Θόρυβο μετρήσεων**
- **Εξωτερικές διαταραχές**



Εφαρμογές Δυναμικών Συστημάτων

- **Αεροναυτική**: drones, quadrotors, UAV
- **Ρομποτική**: βραχίονες, κινητά ρομπότ
- **Αυτοκινητοβιομηχανία**: cruise control, autonomous driving
- **Ενέργεια**: θερμικά συστήματα, διαχείριση φορτίου
- **Βιολογία**: population dynamics

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

Τι είναι Αναγνώριση Δυναμικών Συστημάτων;

Στόχος: από δεδομένα εισόδου–εξόδου να βρούμε ένα **μοντέλο**.

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k; \theta)$$

$$\theta^\star = \arg\min_\theta \sum_{k=1}^{N} \left(y_k - \hat{y}_k(\theta)\right)^2$$

Απαιτείται:

- Για σχεδίαση ελέγχου (MPC, LQR)
- Για προσομοίωση/πρόβλεψη
- Για διάγνωση βλαβών

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

Σημασία της Αναγνώρισης

Χωρίς σωστό μοντέλο → δεν υπάρχει αξιόπιστος έλεγχος.

- Το MPC απαιτεί προβλέψιμη εξέλιξη του συστήματος
- Τα δεδομένα αισθητήρων έχουν θόρυβο (Φίλτρο Kalman)
- Οι παράμετροι αλλάζουν με τον χρόνο (aging)

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
& Τεχνολογίας Υπολογιστών

Διατύπωση Προβλήματος

$$J(\theta) = \sum_{k=1}^{N-1} \left(y_k - \hat{y}_k(\theta)\right)^2$$

$$\theta^\star = \arg\min_\theta J(\theta)$$

- Least Squares (LS)
- Gradient Descent (GD)
- Gauss–Newton
- Levenberg–Marquardt

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

Γραμμικό ως προς Παραμέτρους Μοντέλο

$$\hat{y}_k = \phi_k^\top \theta$$

Παράδειγμα:

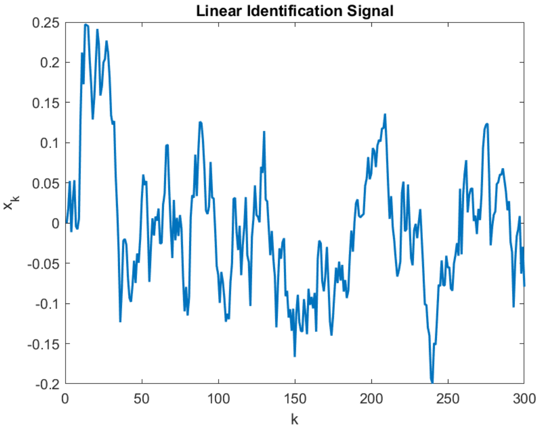
$$x_{k+1} = \alpha x_k + \beta u_k$$

$$\theta = [\alpha, \beta]$$

$$\theta^\star = (\Phi^\top \Phi)^{-1} \Phi^\top Y$$

Παράδειγμα

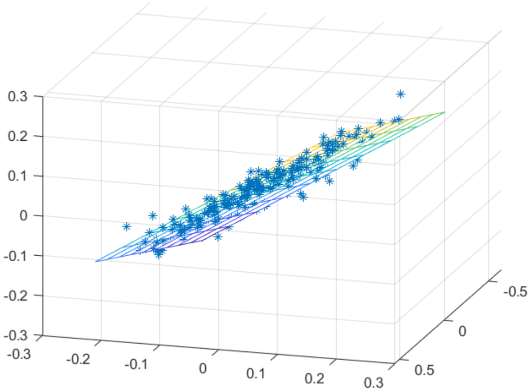
$$x_{k+1} = 0.92 x_k + 0.15 u_k + \nu_k$$



Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

Παράδειγμα

$$x_{k+1} = 0.92x_k + 0.15u_k + n_k$$



$$\theta = [0.8936, 0.1507]$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

Γραμμικό vs Μη-γραμμικό ως προς Παραμέτρους

Γραμμικό		Μη Γραμμικό
$\hat{y} = \phi^\top \theta$	$\rightarrow$	$\hat{y} = f(u, \theta)$
LS εφαρμόζεται		χρειάζεται κλίση

Το μοντέλο:

$$\hat{y} = f(u, \theta)$$

δεν γράφεται ως $\phi^\top \theta$.

Παράδειγμα: $\omega_{k+1} = \omega_k + dt(a\omega_k + bu_k^c)$

Η παράμετρος c μπαίνει ως εκθέτης → μη γραμμικό ως προς παραμέτρους.

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

Μη-Γραμμικό ως προς Παραμέτρους
Παράδειγμα

Drone pitch model:

$$\omega_{k+1} = \omega_k + dt(a\omega_k + bu_k^c)$$

$$\theta = [a, b, c]$$

$$e_k = \omega_{k+1} - \hat{\omega}_{k+1}(\theta)$$

$$J = \sum e_k^2$$

Δεν υπάρχει κλειστή λύση → iterative optimization.

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

Gradient Descent

$$\theta_{i+1} = \theta_i - \alpha \nabla J(\theta_i)$$

$$\nabla J = 2 \sum e_k \frac{\partial e_k}{\partial \theta}$$

Πλεονεκτήματα:

- Καθολική εφαρμογή

Μειονεκτήματα:

- Αργή σύγκλιση
- Ευαισθησία στο βήμα α

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

Παράγωγοι για μη-γραμμικά παραμετροποιημένο μοντέλο

$$\frac{\partial e_k}{\partial a} = -dt\,\omega_k$$

$$\frac{\partial e_k}{\partial b} = -dt\,u_k^c$$

$$\frac{\partial e_k}{\partial c} = -dt\,b\,u_k^c \ln(u_k)$$

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
& Τεχνολογίας Υπολογιστών

Gauss–Newton

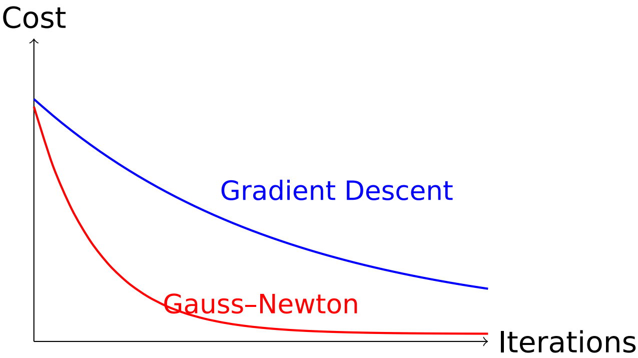
$$\theta_{i+1} = \theta_i - (J_\theta^\top J_\theta)^{-1} J_\theta^\top e$$

Πλεονεκτήματα:

- Πολύ γρήγορη σύγκλιση
- Ιδανικό για μη-γραμμικά μοντέλα

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

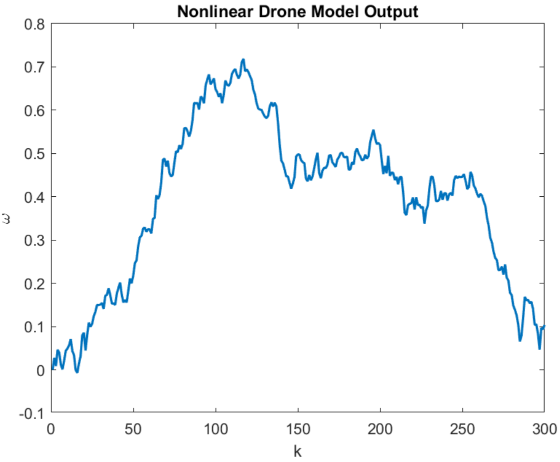
Σύγκριση Σύγκλισης



Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

Παράδειγμα: Pitch Dynamics

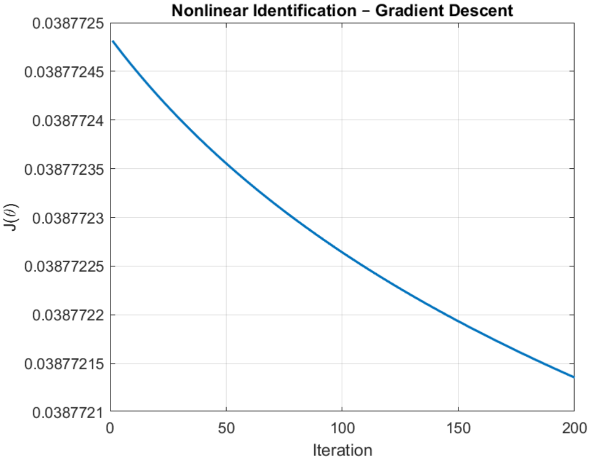
$$\omega_{k+1} = \omega_k + 0.02(-0.45\omega_k + 0.25u_k^{0.8}) + \nu_k$$



Πανεπιστήμιο Πατρών
University of Patras
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

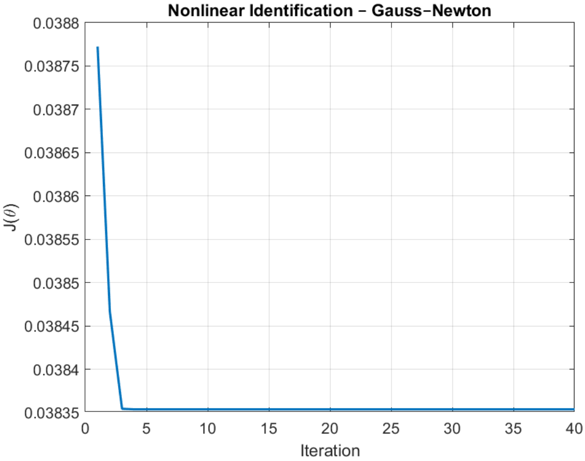
Παράδειγμα: Gradient Descent

$$[a, b, c] = [-0.1160, 0.0871, 0.5026]$$



Παράδειγμα: Gauss–Newton

$$[a, b, c] = [-0.4229, 0.1831, 0.6585]$$



Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

Τα Βήματα της Αναγνώρισης

1. Συλλογή δεδομένων
2. Επιλογή δομής μοντέλου
3. Αρχική εκτίμηση παραμέτρων
4. Iterative optimization
5. Validation

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
& Τεχνολογίας Υπολογιστών

Τι είναι ο Προβλεπτικός Έλεγχος με Μοντέλο (Model Predictive Control - MPC);

Το MPC είναι μέθοδος ελέγχου που επιλύει ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης **σε πραγματικό χρόνο**.

$$\min_{u_{0:N-1}} \sum_{k=0}^{N-1} \left(x_k^\top Q x_k + u_k^\top R u_k \right)$$

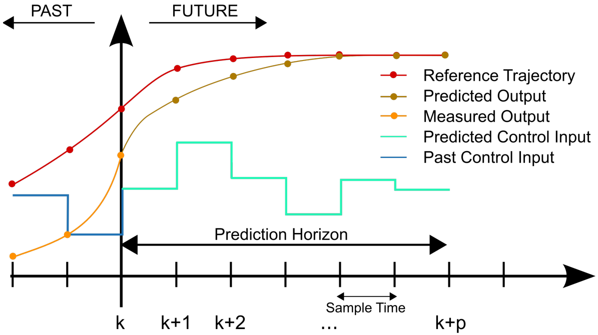
Περιορισμοί:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k), \qquad u_{\min} \leq u_k \leq u_{\max}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

Η βασική ιδέα

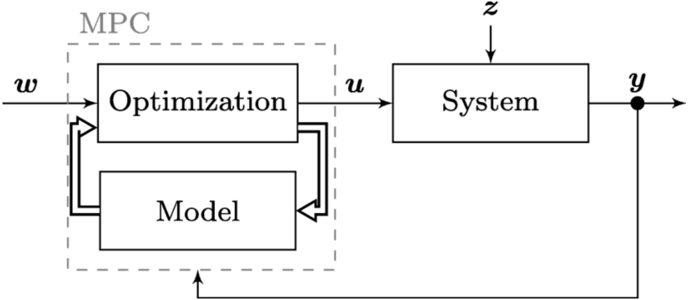
1. Προβλέπεις μελλοντικές καταστάσεις (prediction)
2. Επιλέγεις είσοδο που ελαχιστοποιεί κόστος (optimization)
3. Εφαρμόζεις μόνο το πρώτο control input (receding horizon)



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

Γιατί MPC;

- Χειρίζεται ρητά περιορισμούς (inputs & states)
- Προβλεπτικός έλεγχος – αξιοποιεί μοντέλο
- Λειτουργεί και με μη γραμμικά συστήματα



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

Γραμμικό MPC

Για σύστημα:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

MPC πρόβλημα:

$$\min_U \, (X - X_{\text{ref}})^\top Q (X - X_{\text{ref}}) + U^\top R U$$

Η λύση είναι Quadratic Programming (QP).

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

Μήτρες Πρόβλεψης

Για prediction horizon N:

$$X = \mathcal{A}x_0 + \mathcal{B}U$$

όπου:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} B & 0 & \dots \\ AB & B & \dots \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

Πανεπιστήμιο Πατρών
University of Patras
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

QP Formulation

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης γίνεται:

$$\min_{U} \frac{1}{2} U^\top H U + f^\top U$$

με περιορισμούς:

$$GU \leq h$$

Ο πίνακας H είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

Ενεργά Σύνολα

Τα constraints οδηγούν σε συνθήκες KKT:

$$\nabla_U L(U, \lambda) = 0$$

$$GU \leq h, \quad \lambda \geq 0, \quad \lambda^\top (GU - h) = 0$$

Αλγόριθμοι:

- Active-set
- Interior-point
- Gradient-based MPC

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

Παράδειγμα: Drone altitude MPC

Κατάσταση:

$$x = \begin{bmatrix} h \\ v \end{bmatrix}$$

Έλεγχος:

$$u = \text{thrust}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
& Τεχνολογίας Υπολογιστών

Μοντέλο Drone

$$h_{k+1} = h_k + dt\, v_k$$

$$v_{k+1} = v_k + dt\, k u_k$$

Σε μορφή $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & dt \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ k\, dt \end{bmatrix}$$

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
& Τεχνολογίας Υπολογιστών

Στόχος:

$$\min \sum (x_k - x_{\text{ref}})^\top Q (x_k - x_{\text{ref}}) + \rho u_k^2$$

- $N_{pred} = 20$
- $Q = \text{diag}(1, 0.1)$
- $\rho = 0.05$

Απαραίτητο: σωστό μοντέλο από αναγνώριση!

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
& Τεχνολογίας Υπολογιστών

MATLAB: Solve QP

```
u_opt = quadprog(H,f,[],[],[],[],umin*ones(N,1),umax*ones(N,1));
```

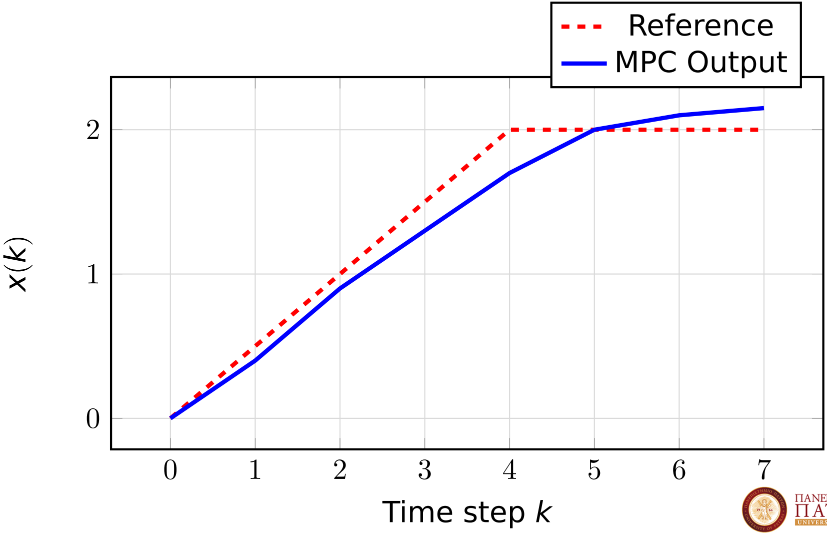
Στη συνέχεια:

$$u_0 = u_{\text{opt}}(1)$$

και εφαρμόζεται στο σύστημα.

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

Παράδειγμα Plot: MPC Tracking



Nonlinear MPC

Για μη-γραμμικό σύστημα:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k)$$

Το optimization γίνεται μη-γραμμικό:

$$\min_{U} \sum \|x_k - x_k^{ref}\|_Q^2 + \|u_k\|_R^2$$

Επιλύεται με SQP ή nonlinear interior point.

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

Drone Nonlinear Example

$$\dot{h} = v$$

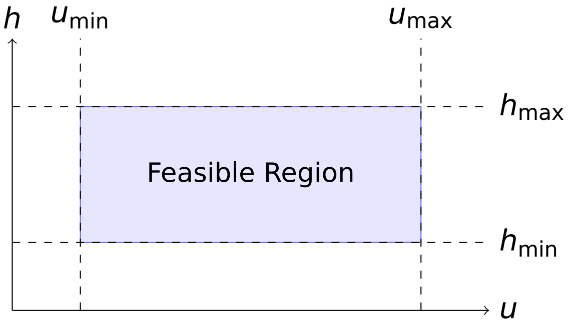
$$\dot{v} = -g + k_1 u - k_2 v^2$$

Πανεπιστήμιο Πατρών
University of Patras
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

State & Input Constraints

$$u_{\min} \leq u_k \leq u_{\max}$$

$$h_{\min} \leq h_k \leq h_{\max}$$



Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

Πλεονεκτήματα MPC

- Βέλτιστη χρήση ενεργοποιητών
- Προβλεπτική συμπεριφορά
- Λειτουργεί σε complex συστήματα

Προσομοιακές Ασκήσεις

Το παρόν σετ ασκήσεων ασκεί τον φοιτητή:

- στην αναγνώριση παραμέτρων δυναμικών μοντέλων,
- στη χρήση Gradient Descent και Gauss–Newton,
- στη διαμόρφωση και επίλυση MPC προβλημάτων,
- στην εφαρμογή MPC για παρακολούθηση τροχιάς.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

Άσκηση 1: Γραμμική Αναγνώριση

Δίνεται σύστημα:

$$x_{k+1} = \alpha x_k + \beta u_k + w_k$$

Ζητείται:

1. Να δημιουργήσετε dataset με τυχαίο u_k.
2. Να υπολογίσετε α, β με Least Squares.
3. Να σχεδιάσετε την πραγματική και την εκτιμώμενη έξοδο.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
& Τεχνολογίας Υπολογιστών

Άσκηση 2: Μη-Γραμμική Αναγνώριση

Μη γραμμικό μοντέλο:

$$\omega_{k+1} = \omega_k + dt(a\omega_k + b\,u_k^c)$$

Ζητείται:

1. Να εφαρμόσετε Gradient Descent.
2. Να εφαρμόσετε Gauss–Newton.
3. Να συγκρίνετε τις καμπύλες σύγκλισης.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
& Τεχνολογίας Υπολογιστών

Άσκηση 3: Κατασκευή Γραμμικού MPC

Για:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

Ζητείται:

1. Δημιουργία prediction matrices $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.
2. Κατασκευή πίνακα κόστους H και διανύσματος f.
3. Επίλυση QP με quadprog.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Τεχνολογίας Υπολογιστών

Άσκηση 4: Drone Altitude MPC

Δίνεται:

$$h_{k+1} = h_k + dt\, v_k$$

$$v_{k+1} = v_k + dt(-g + k u_k)$$

Ζητείται:

1. Υλοποίηση MPC για παρακολούθηση τροχιάς.
2. Σχεδίαση $h(t)$, $h_{ref}(t)$ και $u(t)$.
3. Ανάλυση της επίδρασης του prediction horizon.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
& Τεχνολογίας Υπολογιστών